

新版中学教材要点难点解析丛书

要点难点解析

初中数学

毕东方 主编

广西师范大学出版社
光明日报出版社

· 新版中考

新版初中数学一点难点解析

主 编 毕东方
编 著 袁惠龄

广西师范大学出版社
光明日报出版社

(京)新登字101号

新版中学教材要点难点解析丛书

总 编 张德政

副总编 马 衲

杨惠娟

严大成

• 新版中学教材要点难点解析丛书 •

新版初中数学要点难点解析

主 编 毕东方

☆

广西师范大学出版社
(广西桂林市育才路3号) 出版
光明日报出版社

广西新华书店发行

广西民族印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 15.75 字数 341 千字

1991年5月第1版 1991年12月第2次印刷

印数: 41,001—76,000

ISBN 7-80091-039-3/G·390

定价: 6.80 元

前 言

《新版初中数学要点难点解析》是根据国家教委1990年颁布的《全日制中学数学教学大纲》和《九年制义务教育教学大纲》的有关规定编写的。

本书配合初中学生学习数学的需要，侧重对教材要点难点的解析，力求对典型例题进行分析，指出解题思路、方法和技巧，以帮助学生掌握教材的主要内容，加深对基本概念的理解，抓好重点，突破难点，提高计算能力和逻辑推理能力，以利于他们的复习和升学。为了使学生更好地巩固基础知识，本书在每节的后面提供了一定数量的练习题，在每一章的后面又配备了一些综合题，全书最后又仿照北京市近几年中考的试题编拟了两份模拟题，以供毕业班学生自我检测知识掌握的程度。本书也可为青年教师上好初中数学课提供参考。

参加本书编写的都是在普教战线上任教近30年的高级教师，具有丰富的教学经验。她们是北京市西城区一六一中（原女一中）的袁惠龄和陈璐。由毕东方担任主编。全书由北京外国语学院科研处徐荣华先生审定。

丛书编委会

1991年1月

目 录

第一编 代数	(1)
第一章 实数	(2)
第一节 实数的概念	(3)
第二节 实数的运算	(17)
习题一	(23)
第二章 代数式	(27)
第一节 整式	(27)
第二节 分式	(61)
第三节 根式	(88)
习题二	(110)
第三章 方程、方程组与不等式	(117)
第一节 方程	(118)
第二节 方程组	(142)
第三节 列方程(组)解应用题	(156)
第四节 不等式	(169)
习题三	(184)
第四章 指数与对数	(191)
第一节 指数	(191)
※第二节 对数	(198)
第五章 函数	(207)
习题五	(224)
第六章 解三角形	(229)
第一节 三角函数	(229)

第二节	解直角三角形	(238)
第三节	解斜三角形	(243)
	习题六	(254)
第七章	统计初步	(257)
	习题七	(263)
第二编 几何		(267)
第一章	基本概念	(267)
第一节	直线、射线、线段	(268)
第二节	角	(272)
	习题一	(278)
第二章	相交线、平行线	(281)
第一节	相交线、垂线	(281)
第二节	平行线	(284)
第三节	命题、定理、证明	(289)
	习题二	(292)
第三章	三角形	(295)
第一节	三角形	(295)
第二节	全等三角形	(304)
第三节	等腰三角形、直角三角形	(311)
第四节	基本作图	(332)
第五节	对称	(336)
	习题三	(339)
第四章	四边形	(344)
第一节	多边形	(344)
第二节	平行四边形	(348)
第三节	梯形	(363)
	习题四	(373)
第五章	面积、勾股定理	(377)
第一节	面积	(377)

第二节	勾股定理	(384)
	习题五	(393)
第六章	相似形	(397)
第一节	比例线段	(397)
第二节	相似三角形	(411)
	习题六	(435)
第七章	圆	(439)
第一节	圆的有关性质	(439)
第二节	直线和圆的位置关系	(451)
第三节	圆与圆的位置关系	(463)
第四节	正多边形和圆	(472)
第五节	点的轨迹	(479)
	习题七	(484)
初中数学模拟题		(489)
综合习题一		(489)
综合习题二		(492)

第一编 代 数

〔引言〕

初中代数是整个中学代数的重要的一部分，是进一步学习数学、物理和化学的基础。

《初中数学教学大纲》（简称《大纲》）中列入初中代数的内容是多方面的基础知识，它的内容包括数、式、方程和不等式、函数的初步知识、解三角形、统计初步等。

实数，代数式及其运算是其他内容的基础，方程和不等式则是用等号或用不等号将代数式连结起来组成的，所以代数式与方程、不等式有着密切的关系。求代数式的值实际上就是求函数值，解三角形是求边角的数值，统计要对数据进行整理和计算，各部分内容，是相互为用与密切联系的。所以只要在学习中，抓住要点，突破难点，掌握好每一章节的内容以及它们之间的内在联系，就能学好初中代数。

初中代数的内容大体可归纳为以下七部分：

1. 实数；
2. 代数式；
3. 方程、方程组与不等式；
4. 指数与对数；
5. 函数；
6. 解三角形；
7. 统计初步。

第一章 实 数

在算术数的基础上，引进负数、无理数，把数集扩展到实数集，实数包括有理数和无理数。实数在日常生活、生产实践及进一步学习数学中，都是非常重要的；数和数的计算是学习初中代数中有关内容的基础。

〔本章要点和难点〕

1. 实数的概念

实数系、数轴、相反数和倒数、绝对值、实数大小的比较、数的开方、近似计算和有效数字。这部分难点是实数的定义、绝对值的概念和算术根的概念。

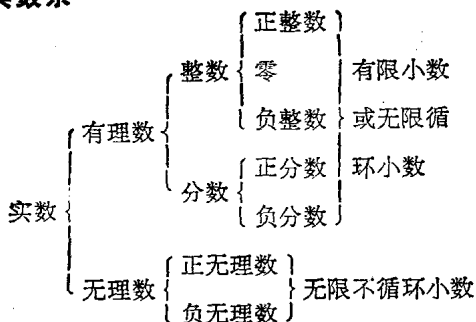
2. 实数的运算

意义、法则、运算律、运算顺序、运算技巧。这部分的难点是准确、迅速地进行有理数的运算。

第一节 实数的概念

〔基本内容〕

1. 实数系



2. 有理数

设 m 、 n 是整数且 $n \neq 0$ ，形如 $\frac{m}{n}$ 的数叫做有理数。

3. 无理数

无限不循环小数叫做无理数。

4. 实数

有理数和无理数统称为实数。

5. 数轴

规定了方向、原点和长度单位的直线叫数轴。

数轴的三要素是原点、方向、长度单位。每一个实数都可以用数轴上唯一的一个点来表示；反过来，数轴上的每一个点都表示唯一的一个实数。

6. 相反数和倒数

(1) 实数 a 和 $-a$ 叫做互为相反数，零的相反数是零。在数轴上关于原点对称的点所表示的数，互为相反数。

(2) 1 除以一个不为零的数的商叫做这个数的倒数，零没有倒数。

应注意相反数与倒数的区别： a, b 互为相反数，当且仅当 $a + b = 0$ ，而 a, b 互为倒数，当且仅当 $a \cdot b = 1$ 。

7. 绝对值

一个正实数的绝对值是它本身；一个负实数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零。即

$$|a| = \begin{cases} a, & (a > 0) \\ 0, & (a = 0) \\ -a, & (a < 0) \end{cases}$$

在数轴上表示一个实数的点到原点的距离就是这个实数的绝对值，所以绝对值是一个非负数，即 $|a| \geq 0$ 。

在 x 轴上的点 $P(a, 0)$ 和原点 $O(0, 0)$ 间的距离是 $d = |OP| = \sqrt{(a-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{a^2}$ ， $|OP|$ 用 $|a|$ 来表示。即 $|a| = \sqrt{a^2}$ 。

绝对值是个重要概念，因为有理数大小比较以及有理数之间的各种运算，除了它们的符号之外，都是在它们的绝对值之间进行的。数的绝对值在整个中学数学课程中应用很广泛。

8. 实数大小的比较

正数都大于零，负数都小于零，正数大于一切负数；两个负数，绝对值大的反而小。

在数轴上，凡右边的点所表示的数比左边一切的点所表示的数大。（数轴方向从左到右）

9. 数的开方

在实数范围内，正数有 n 次方根；负数有奇次方根，但

没有偶次方根；零的 n 次方根是零。

在实数范围内，一个正数的正的 n 次方根叫做算术根，记做 $\sqrt[n]{a}$ ($a > 0$)。零的算术根是零。

一般地，如果一个数的平方等于 a ，这个数就叫做 a 的平方根(也叫二次方根)。

求一个数 a 的平方根的运算，叫做开平方。

一个正数有两个平方根，这两个平方根互为相反数；零的平方根是零；负数没有平方根。

正数 a 的正的平方根，叫做 a 的算术平方根，零的算术平方根仍是零。

10. 近似计算和有效数字

在实数的近似计算中，先把分数、无理数都化为小数，但要取比要求的精确度多一位，最后的结果再精确到所要求的精确度。

近似数中，从左边第一个不是零的数字起，到经过四舍五入后得到的最末一位数字止，所有的数字都叫做这个数的有效数字。

〔例题分析〕

例1 判断下列命题是否正确，正确的在括号内画“√”，错误的在括号内画“×”。

- (1) 若 a 为实数，则 $-a$ 为负数。()
- (2) 若 a 为实数，则 a^2 为正数。()
- (3) 分数一定是有理数。()
- (4) 符号相反的两个数就是相反数。()
- (5) 任何有理数的绝对值都是正数。()
- (6) 两个互为相反数的数，它们的绝对值相等。()

(7) 一个整数的倒数都小于这个整数。()

(8) a 表示实数, 则 a 的倒数是 $\frac{1}{a}$ 。()

(9) 互为相反数的两个数的商为 -1 。()

(10) 若 $m > n$, 则 $\frac{m}{n} > 1$ 。()

分析 解答概念问题, 要准确把握概念的含意, 还要全面细致, 特别是“0”这个数更要给予特别地注意。

(1) 若 a 表示一个非正数, 则 $-a$ 为非负数。

(2) $0^2 = 0$, 但 0 不是正数。

(3) 根据有理数定义, 结论正确。

(4) -2 与 $+3$ 显然符号相反, 但并不是相反数。

(5) 0 的绝对值是 0, 0 不是正数,

(6) a 为任何实数, 都有 $|a| = |-a|$, 结论正确。

(7) 0 是一个整数, 但 0 的倒数不存在; -3 是一个整数, $-\frac{1}{3}$ 就不小于 -3 。

(8) 0 是实数, 但 0 没有倒数。

(9) 0 的相反数是 0, 但 0 除以 0 没有意义。

(10) 1 大于 -3 , 但 $\frac{1}{-3}$ 即 $-\frac{1}{3}$ 并不大于 1。

解 (1) $\times$. (2) $\times$. (3) $\checkmark$. (4) $\times$. (5) $\times$.

(6) $\checkmark$. (7) $\times$. (8) $\times$. (9) $\times$. (10) $\times$.

例2 下列各数哪些属于实数集合? 有理数集合? 整数集合? 并把各实数由小到大用不等号连结起来。

$\sqrt[3]{-27}$, $\cos 60^\circ$, $|1 - \sqrt{2}|$, 0, $\sqrt{(-1)^2}$, π , $\sqrt{-4}$, 0.020020002...

解 $\sqrt[3]{-27} = -3$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$,

$|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$, $\sqrt{(-1)^2} = 1$.

$\sqrt[3]{-27}$, $\cos 60^\circ$, $|1 - \sqrt{2}|$, 0 , $\sqrt{(-1)^2}$, π ,

$0.020020002\cdots$ 属于实数集合.

$\sqrt[3]{-27}$, $\cos 60^\circ$, 0 , $\sqrt{(-1)^2}$ 属于有理数集合.

$\sqrt[3]{-27}$, 0 , $\sqrt{(-1)^2}$ 属于整数集合.

由小到大的排列是: $\sqrt[3]{-27} < 0 < 0.020020002\cdots <$

$|1 - \sqrt{2}| < \cos 60^\circ < \sqrt{(-1)^2} < \pi$.

说明 要从本质上而不是从形式上去判断已知数属什么数系, 不能认为含 π 或根号的数一定是无理数. 要分清有限小数与无限(不循环)小数. $\sqrt{-4}$ 在实数范围内无意义.

例3 填空:

(1) $-1\frac{3}{4}$ 的相反数是_____, $-1\frac{3}{4}$ 的倒数是_____;

$-1\frac{3}{4}$ 的绝对值是_____.

(2) 若 $a + b = 0$, 则 $|a| - |b| =$ _____.

(3) 若 $|m| = m$, 则 m _____ 0.

(4) 若 $|x + 1| = 0$, 则 $x =$ _____.

(5) 若 $|x + 1| = 1$, 则 $x =$ _____.

(6) 若 $x = -x$, 则 $x =$ _____.

(7) 若 $x = \frac{1}{x}$, 则 $x =$ _____.

(8) 若 $x = x^2$, 则 $x =$ _____.

(9) 若 $|x - 4| + (2 + y)^2 = 0$, 则 $x =$ _____,

$y =$ _____.

(10) 能满足 $-4 < x \leq 2$ 的整数 x 有_____.

(11) 化简 $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| =$ _____.

(12) 比较大小:

① $-\frac{1}{3}$ _____ -0.3 ② $-\frac{6}{7}$ _____ $-\frac{7}{8}$.

③ $1 - \left| \frac{-9}{10} \right|$ _____ $-\left(-\frac{9}{10} \right)$.

④ $\sqrt{(-2)^2}$ _____ 1 . ⑤ $-3\sqrt[6]{2}$ _____ $2\sqrt[3]{-4}$.

解 (1) $1\frac{3}{4}$, $-\frac{4}{7}$, $1\frac{3}{4}$. (2) 0 . (3) $\geq$. (4) -1 .

(5) 0 , -2 . (6) 0 . (7) $+1$, -1 . (8) 0 , 1 .

(9) 4 , -2 . (10) -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 .

(11) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. (12) ① $<$. ② $>$. ③ $<$. ④ $>$.

⑤ $<$.

说明 要理解掌握相反数、倒数和绝对值概念, 正确区分相反数和倒数, 会比较实数的大小.

例4 求满足下列条件的 x 的值:

(1) $|3 - x| = 1$; (2) $|3 - x| = -2$;

(3) $|x| < 3$ 且 x 为整数. (4) $1 \leq |x| < 3$ 且 x 为整数.

解 (1) 由绝对值的意义可知,

$$3 - x = 1 \quad \text{或} \quad 3 - x = -1,$$

$$\therefore x = 2 \quad \text{或} \quad x = 4.$$

(2) 由绝对值的性质可知,

$$|3 - x| \geq 0.$$

$\therefore$ 满足 $|3 - x| = -2$ 的 x 值不存在.

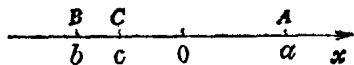
(3) $\because |x| < 3 \therefore -3 < x < 3$.

在这个范围内的整数 x 有 -2 , -1 , 0 , 1 , 2 .

(4) $\because |x| < 3, \therefore$ 整数 x 的值为 $-2, -1, 0, 1, 2$.

又 $\because |x| \geq 1, \therefore$ 整数 x 的值为: $-2, -1, 1, 2$.

例5 若 a, b, c 三实数在数轴上相应点为 A, B, C , 其位置如图1-1所示.



(其中 $|OA| = |OB|$)

图1-1

(1) 用不等号连接 a, b, c .

(2) 判断 $a + c, b + c, a \times c, b \div c$ 的符号.

(3) 化简 $a - |a + b| + |c - a| + |c - b|$.

解 根据 A, B, C 三点在数轴上的位置及已知条件 $|OA| = |OB|$ 有 $a > 0, b < 0, c < 0, |a| = |b|, |c| < |b|, |c| < |a|$.

(1) $b < c < a$. (因 A, B, C 三点从左到右排列依次为 B, C, A)

(2) $a + c = +(|a| - |c|) > 0$. (异号两数相加法则)

$b + c = -(|b| + |c|) < 0$. (同号两数相加法则)

$a \times c < 0$. (异号两数相乘法则)

$b \div c > 0$. (同号两数相除法则)

(3) $a - |a + b| + |c - a| + |c - b|$
 $= a - 0 + [-(c - a)] + (c - b)$
 $= 2a - b$.

说明 实数与数轴上的点是一一对应的. 应用数轴来观察实数的某些性质, 它具有很好的直观性, 如数轴上右边点所对应的实数大于左边点所对应的实数, 在原点右侧的点所对应的实数是正数, 原点左侧的点所对应的实数是负数, 数轴上距原点较远的点所对应的实数的绝对值较大, 在解决各

种类型的问题时,充分利用数轴,有利于迅速地进行判断和计算。

例6 比较下列各组中两个实数的大小:

(1) -1.414 和 $-\sqrt{2}$.

(2) $+(-3\sqrt{6})$ 和 $-|-5\sqrt{2}|$.

(3) $-(4+x^2)$ 和 $|y-3|$.

(4) $\sqrt{34}-\sqrt{33}$ 和 $\sqrt{33}-\sqrt{32}$.

(5) $\frac{\pi+1}{1-\pi}$ 和 $-\frac{\pi+1}{2}$.

解 (1) $\because |-1.414| = 1.414,$
 $|\sqrt{2}| = \sqrt{2} = 1.4142\cdots,$

$$\therefore 1.414 < 1.4142\cdots$$

$$\therefore -1.414 > -\sqrt{2}.$$

(2) $\because +(-3\sqrt{6}) = -3\sqrt{6} = -\sqrt{54},$

$$-|-5\sqrt{2}| = -5\sqrt{2} = -\sqrt{50},$$

又 $\because \sqrt{54} > \sqrt{50}, \therefore +(-3\sqrt{6}) < -|-5\sqrt{2}|.$

(3) $\because 4+x^2 > 0, \therefore -(4+x^2) < 0,$

而 $|y-3| \geq 0, \therefore -(4+x^2) < |y-3|.$

(4) $\because \sqrt{34}-\sqrt{33} = \frac{1}{\sqrt{34}+\sqrt{33}},$

$$\sqrt{33}-\sqrt{32} = \frac{1}{\sqrt{33}+\sqrt{32}},$$

$$(\sqrt{34}+\sqrt{33}) - (\sqrt{33}+\sqrt{32}) = \sqrt{34}-\sqrt{32} > 0,$$

$$\therefore \sqrt{34}+\sqrt{33} > \sqrt{33}+\sqrt{32},$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{34}+\sqrt{33}} < \frac{1}{\sqrt{33}+\sqrt{32}}.$$