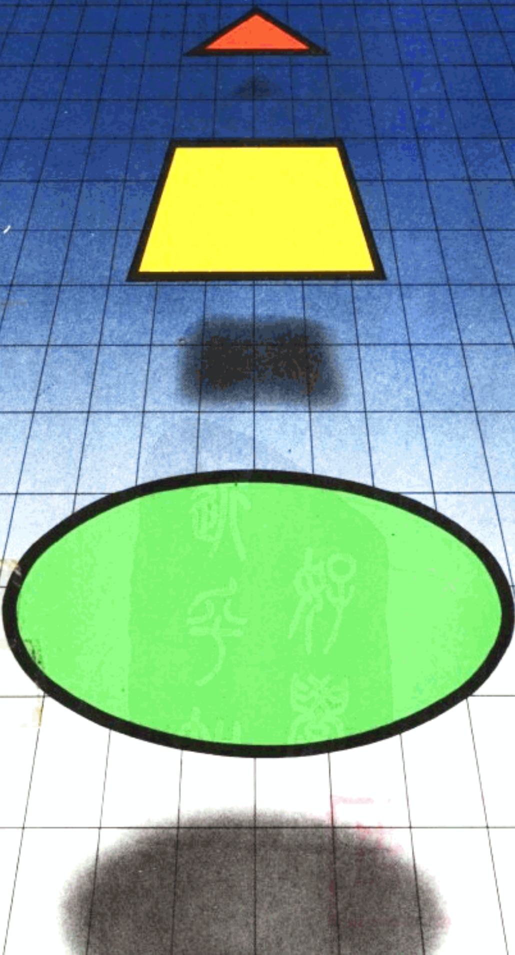
中學數學複習指導

平面幾何

端福澤編著・商務印書館



中學數學複習指導

平面幾何

端福澤編者・商務印書館

中學數學複習指導
平面幾何
編著者——端福澤
出版者——商務印書館香港分館
香港皇后大道中35號
印刷者——中華商務聯合印刷(香港)有限公司
香港九龍炮仗街75號
版 次——1980年4月初版

目　　錄

1 緒 論

§1·1 基本概念

任何一門科學都有與它有關的基本概念，要學好這門科學，首先就要確切地理解這些概念，否則將會寸步難行。因此，我們要學好幾何學，就必須正確地理解有關的基本概念，不僅要能夠説明每一個概念的內容，而且要充分地掌握各個概念的相互關係，對此，我們必須給予足够的重視。

概念的內容是用描述或定義的方法來表明的。對於一些最基本的概念或叫做原始概念，如點、綫、面、體等通常是用描述的方法來表明它們的內容的。例如，“點”這個概念的內容是用下面的方法描述的：“綫與綫相交時就得到‘點’，‘點’没有長、闊、厚，只有位置。”但對於極大多數的概念是用定義的方法來表明它們的內容的。我們有必要學會對概念下定義的方法，這樣才能談到正確理解概念。

我們知道有些概念彼此間是存在着從屬關係的。例如，四邊形和平行四邊形，平行四邊形和菱形都是有從屬關係的概念；平行四邊形是特殊的四邊形，而菱形是特殊的平行四邊形。一般來説，如果概念 P 是概念 Q 的特殊情形，P 和 Q 這兩個概念就有從

屬關係，其中概念 Q 叫做類概念，而概念 P 叫做種概念。例如，平行四邊形，對菱形來說，是類概念，而對四邊形來說，則是種概念。對某一個概念下定義時，先指出它的類概念，然後指出它的本質屬性，使得它能够區別於所有其他概念。例如，當我們給‘矩形’這個概念下定義時，首先指出它最接近的類——平行四邊形；因爲菱形也是平行四邊形，爲了把矩形和菱形區別開來，還必須指出它的本質屬性——内角爲直角，我們把這個本質屬性叫做‘種差’。所以給‘矩形’下定義時，說：“内角爲直角的平行四邊形叫做矩形”就可以了。定義的結構可以用下面的公式來表示：

‘種’=最接近的‘類’+‘種差’

定義的明文並不是經常指示出‘類’和‘種差’的，但是經過分析，總可以把它們找出來。

下定義時，應當注意下列幾點要求：

(1)下定義時，必須指明最接近的類，不能用超越的類。如果我們說：“各邊相等的多邊形是正方形”就失去了它的正確性。多邊形不是正方形的最接近的‘類’。如果說：“各邊相等的凸四邊形是正方形”，這樣的定義，雖不能說是不正確，但不能說明正方形和其他特殊四邊形的關係，對邏輯推理沒有好處，凸四邊形也不是正方形的最接近的‘類’。正方形的最接近的‘類’是矩形或菱形。最正確的定義應是“各邊相等的矩形叫做正方形”或者“内角爲直角的菱形叫做正方形”。這樣的定義方法，充分說明了正方形和矩形或菱形的從屬關係，它包含了矩形和菱形的所有屬性。

(2)定義應當只指出基本屬性——種差。任何一個概念都有

很多屬性，下定義時不可能也不必要指出所有這些屬性，只要求能指出它的本質屬性，使這個概念和其他概念區別開來，所有其他的屬性，據此都可以導出。例如，‘平行四邊形’這個概念，就有下列的許多屬性：(1)四條邊，(2)對角相等，(3)對角綫互相平分，(4)對邊平行，(5)對邊相等。給‘平行四邊形’下定義時，只需指出它的本質屬性——兩組對邊平行就够了，其他的屬性不必要指出來。

(3)定義不應造成循環的錯誤，定義中的循環錯誤是在於：在同一個定義中的一個概念需要依靠另一個概念來下定義。例如：“含有 90° 的角叫做直角，直角的九十分之一份叫做度。”在這個定義裏，其中一個概念需要依靠另一個概念來下定義，這必然造成同語反覆，內容不清，達不到定義的目的。

同一個概念時常允許有不同的定義，因爲對於所討論的對象，它的任意一種可作爲特徵的性質(亦即它們全體所有的，而且僅僅是它們具有的性質)，都可以作爲基本的性質而當作定義。因此，可能有第二個完全正確的平行四邊形的定義。例如：“有兩組對邊相等的平面四邊形叫做平行四邊形”。但對於某個概念已經建立起正確的定義以後，我們應當不論在什麼地方都以這種意義來解釋它，而且無論以後發展到多麼高的階段，也絕對不能有與它相矛盾的定義。經常有必要推廣很多以前的概念而給它們以新的定義，但是仍保有以前概念的名稱，這時以前的定義僅爲一種特殊情形。例如，銳角三角函數的定義，到進入任意角三角函數就有新的定義，但它仍然包含舊的意義使舊定義成爲新定義的一個特殊情形。

下面列出一些有關的基本概念，對於書中表述這些概念的文

字，讀者切不可死記硬背，應着重理解它們的內容。

1．幾何體　只研究一個物體的形狀和大小，而不研究其他的性質時，我們就把這個物體叫做‘幾何體’，簡稱‘體’。

2．面　任何物體都是用它的面來和鄰接它的其他物體分開的。例如把物體和鄰接它的空氣分開的，就是這個物體的面。面只有長和闊，没有厚。

（1）平面　平面是最簡單的面。在玻璃杯中處於平靜狀態的水面，磨得很平滑的鏡面都給我們一個平面的概念。平面有以下的性質：如果過平面內任意兩點作一直綫，那麼這直綫上的所有點都在這個平面內。

（2）曲面　没有一部分是平的面。

3．綫　面和面相交時就得到綫。綫没有闊和厚，只有長。

（1）直綫　直綫是最簡單的綫。拉緊了的細絲綫，從一個小孔射入的光綫，或者摺叠一張紙所成的摺痕，都給我們一條直綫的概念。一般所講的直綫是指無限長的直綫，我們畫一條直綫的圖形時，只是指出它的位置，而不是指出它的長。

（2）綫段　直綫上任意兩點間的有限部分叫做綫段，這兩點叫做綫段的端點。

（3）射綫　在直綫上某一點一旁的部分叫做射綫，或者叫做半直綫。

（4）曲綫　没有一部分是直的綫。

（5）折綫　不在同一直綫上，而首尾順次相接的若干綫段組

成的綫叫做折綫，每一綫段叫做這折綫的邊。

4．點　綫與綫相交時就得到點，點只有位置，没有長、闊、厚。

5．圓　圓是一條封閉的曲綫，整條曲綫都在同一平面上，而且綫上各點與某一點的距離都相等；這一點叫做圓心，這個距離叫做半徑。

6．弧　圓周的任何一部分叫做弧。

7．切綫　與圓在同一平面内，且與圓只相交於一點的直綫，叫做這圓的切綫，這交點叫做切點。

8．割綫　與圓相交於兩點的直綫，叫做這圓的割綫。

9．弦　連結圓上任意兩點的綫段叫做弦（或割綫在圓内的部分叫做弦）。

10．直徑　通過圓心的弦叫做直徑。直徑等於半徑的兩倍。

11．弓形　一條弧和這弧所對的弦所組成的圖形叫做弓形。

12．扇形　一條弧和分別通過這弧的兩個端點的兩條半徑所組成的圖形叫做扇形。

13．角　從同一點引出的兩條射綫所組成的圖形叫做角。這兩條射綫叫做角的邊。

（1）平角　角的兩邊是方向相反的射綫，這角就叫做平角。每個平角等於180°。

（2）直角　等於90°的角叫做直角。

（3）銳角　小於90°的角叫做銳角。

（4）鈍角　大於90°而小於180°的角叫做鈍角。

（5）圓心角　同一個圓的兩條半徑所組成的角叫做圓心角。

（6）圓周角　同一個圓上一點引出的兩條弦所組成的角叫做圓周角。

(7)圓內角　頂點在圓內，兩邊和圓相交的角叫做圓內角。

(8)圓外角　從圓外一點引出的兩條割綫所組成的角叫做圓外角。

(9)弦切角　從圓上一點引出的一條弦和一條切綫所組成的角叫做弦切角。

(10)鄰角　兩個角有一個公共頂點和一條公共邊，而它們的另一邊分別在公共邊的兩旁，這兩個角叫做互爲鄰角。

(11)餘角　兩個角的和等於 90°(直角)，這兩個角就叫做互爲餘角。

(12)補角　兩個角的和等於 180°(平角)，這兩個角就叫做互爲補角。

(13)對頂角　如果一個角的兩邊分別是另一個角的兩邊的反向延長綫，這兩個角就叫做對頂角。

(14)內錯角、同位角、同旁內角　兩直綫被另一直綫所截，得 8 個角，其中有三種關係。如圖 1：

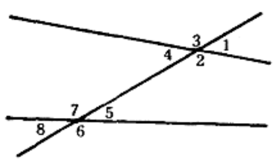


圖 1

∠2 和∠7，∠4 和∠5 都叫做內錯角；

∠1 和∠5，∠2 和∠6，∠3 和∠7，∠4 和∠8 都叫做同位角；

∠2 和∠5，∠4 和∠7 都叫做同旁內角。

14．垂直　兩條直綫相交成直角，這兩條直綫叫做互相垂直，其中的一條叫做另一條的垂綫，交點叫做垂足。

15．平行　同一平面內的兩條直綫如果不相交，這兩條直綫就叫做互相平行。

16．多邊形　首端和末端相重合的折綫叫做多邊形。將多邊形的任意一邊向兩方延長成直綫，如果其他各邊都在這直綫的同一旁，這樣的多邊形叫凸多邊形。通常所講的多邊形是指凸多邊形，有三條邊的叫三角形，四條邊的叫四邊形，……，n 條邊的叫 n 邊形。n 邊形有 n 個角，因此 n 邊形也叫 n 角形。多邊形的任一邊的延長綫和它的鄰邊所成的角叫做這多邊形的外角。（這裏所講的多邊形是指平面多邊形）

17．三角形的分類

（1）按照邊的長短關係來分類，有：

（a）不等邊三角形或叫任意三角形　這類三角形的三邊不相等。通常所講的‘三角形’指的就是這一類。

（b）等腰三角形　即僅有兩邊相等的三角形。相等的兩條邊叫做腰，其他一邊叫做底邊，兩腰的夾角叫做頂角，腰和底邊的夾角叫做底角。

（c）等邊三角形（或叫正三角形）　即三條邊都相等的三角形。

（2）按照角的大小來分類，有：

（a）銳角三角形　即三個角都是銳角的三角形。

（b）直角三角形　即有一個角是直角的三角形。夾直角

的兩條邊叫做直角邊，直角的對邊叫做斜邊。

(c)鈍角三角形　即有一個角是鈍角的三角形。

18. 三角形中的主要綫段

(1)中綫　聯結三角形的任一頂點和對邊的中點的綫段，叫做這邊上的中綫。

(2)高　從三角形的任一個頂點向它的對邊作垂綫，頂點到垂足間的綫段叫做這邊上的高。垂足可能在邊上，也可能在邊的延長綫上。

(3)角平分綫　三角形的任意一角的平分綫到對邊爲止的綫段，叫做三角形的角平分綫。

19. 特殊四邊形

(1)梯形　只有一組對邊平行的四邊形叫做梯形。平行的兩邊叫做梯形的底，通常短的一條叫做上底，長的一條叫做下底；不平行的兩邊叫做梯形的腰。

(2)平行四邊形　兩組對邊平行的四邊形叫做平行四邊形。

(3)特殊平行四邊形

(a)矩形　內角是直角的平行四邊形叫做矩形。

(b)菱形　鄰邊相等的平行四邊形叫做菱形。

(c)正方形（特殊的矩形或菱形）　鄰邊相等的矩形叫做正方形。或，內角是直角的菱形叫做正方形。

20. 正多邊形　各邊相等且各角相等的多邊形叫做正多邊形。正多邊形的外接圓和內切圓是同心圓，圓心叫做正多邊形的中心；外接圓的半徑叫做正多邊形的半徑；內切圓的半徑叫做正多邊形的邊心距（指內

切圓過切點的半徑）。

21．外接圓和內切圓

（1）外接圓　通過多邊形的各頂點的圓叫做這個多邊形的外接圓，這個多邊形叫做這個圓的內接多邊形。

（2）內切圓　和多邊形的各邊相切的圓叫做這個多邊形的內切圓，這個多邊形叫做這個圓的外切多邊形。

22．三角形的心

（1）外心　三角形的外接圓圓心叫做這個三角形的外心。

（2）內心　三角形的內切圓圓心叫做這個三角形的內心。

（3）重心　三角形的三條中綫的交點叫做這三角形的重心。

（4）垂心　三角形的三條高綫的交點叫做這三角形的垂心。

（5）旁心　三角形的旁切圓（即與三角形一邊和其他兩邊的延長綫相切的圓）的圓心叫做這三角形的旁心。

23．相似多邊形　兩個邊數相同的多邊形，如果對應邊成比例，且對應角相等，則這兩個多邊形叫做相似多邊形。

24．相切圓　兩圓只相交於一點，這兩圓叫做相切，而交點叫做切點。如果一個圓在另一個圓之外，這樣的相切叫做外切；如果一個圓在另一個圓之內，這樣的相切叫做內切。

25．圓的切綫　一直綫和圓只有一個交點，這直綫就叫做這圓的切綫，交點叫做切點。如果直綫 AB 是 $\odot O$ 的切綫，切點是 C，則我們可以這樣說：直綫 AB 切 $\odot O$ 於 C，或者 $\odot O$ 切 AB 於 C。

如果一直綫和兩個圓相切，這直綫就叫做這兩圓

的公切綫。如果兩個圓在公切綫的同旁，這條公切綫叫做外公切綫；如果兩個圓分別在公切綫的兩旁，這條公切綫叫做内公切綫。

26．兩直綫在空間的相互位置關係：

(1)相交　這時兩條直綫必在同一平面内。

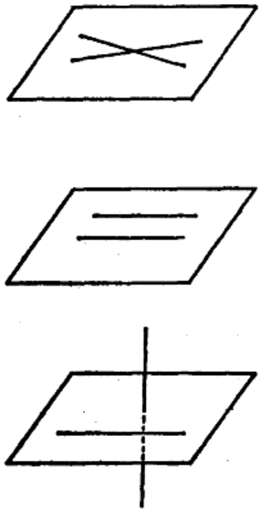
(2)平行　這時兩條直綫必在同一平面内。

(3)不相交也不平行　這時兩條直綫不可能在同一平面内。

27．不相交也不平行的兩條直綫所成的角　從一條直綫(l_1)上任一點作平行於另一條直綫(l_2)的平行綫(l_3)，則l_1與l_3所成的角就叫l_1與l_2所成的角。

如果兩條直綫所成的角是直角，這兩條直綫就叫做互相垂直（不一定相交）。

28．直綫與平面垂直　一直綫如



(a)　(b)　(c)

圖 2

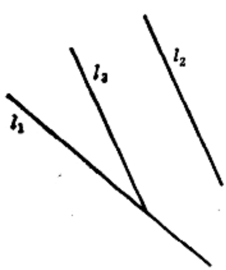


圖 3

果垂直於平面內的任意直線，這直綫和這平面就叫做互相垂直。如圖 4，直綫 l 垂直於平面 M 內的任意直綫如 $a, b, c, d \cdots$ 等，則 $l \perp$ 平面 M。

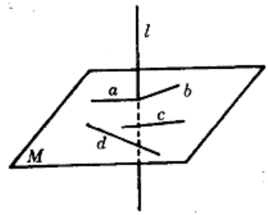


圖 4

29．斜綫與平面相交所成的角　如圖 5 所示，平面 M 與直綫 AB 相交於 B 點，AB 是平面 M 的斜綫，B 是斜綫足，引直綫 $AC \perp$ 平面 M，C 是垂足，CB 就是 AB 在平面 M 內的射影。斜綫和它在平面內的射影所成的銳角（$\angle ABC$），叫做斜綫與平面所成的角。

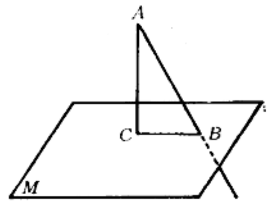
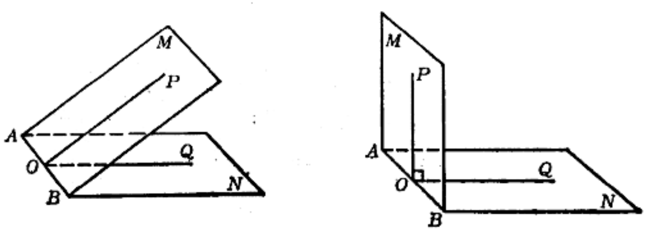


圖 5

30．兩平面相交所成的角——二面角的平面角　如圖 6(a)，平面 M、N 相交於 AB，從 AB 上任一點 O，分別在



(a)　(b)

圖 6

兩平面内作 $PO\perp AB$，$QO\perp AB$，則 $\angle POQ$ 叫做二面角 $M—AB—N$ 的平面角。

如果平面角爲直角，則兩平面互相垂直，如圖6(b)，平面 $M\perp$ 平面 N。

31. 旋轉體

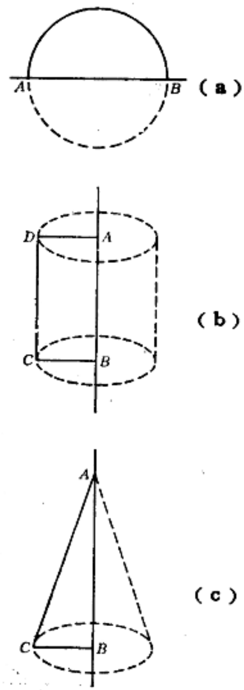


圖 7

(1)球　以半圓的直徑爲軸，將半圓旋轉一周，所得的旋轉體就是一個球。

(2)直圓柱　以矩形的一邊爲軸，將矩形旋轉一周，所得的旋轉體就是一個直圓柱，AB 或 DC 就是這圓柱的高，AD、BC 是兩個底面（圓）的半徑。

(3)直圓錐　以直角三角形的一條直角邊爲軸，將三角形旋轉一周，所得的旋轉體就是一個直圓錐，AB 是這圓錐的高，BC 是底（圓）的半徑，斜邊 AC 是這圓錐的母綫或斜高。