数列极限

杨大淳

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}=1.$$

河 北 人 民 出 版 社

数 列 极 限

杨大淳

河 北 人 民 出 版 社

一九八二年·石家庄

数 列 极 限

杨 大 淳

河北人民出版社出版（石家庄市北马路19号）
河北新华印刷一厂印刷　河北省新华书店发行

787×1092毫米 1/32　3印张　59,000字　印数：1—8,610　1982年9月第1版
1982年9月第1次印刷　统一书号：7086·1105　定价：0.28元

前　　言

这本小册子是为在校高中学生，以及自学高中数学的同志写的一本通俗读物。其目的是帮助读者理解数列极限的概念，掌握有关极限的定理和极限方法，以便为进一步学习高等数学奠定一个良好的基础。由于个人水平有限，难免有不妥之处，敬希读者予以批评指正。

编者

1982 年

目　　录

数　　列

§1.数列　我们考察下面各串数：

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16; \tag{1}$$

$$1, 3, 5, 7, 9, \cdots\cdots; \tag{2}$$

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \cdots\cdots; \tag{3}$$

$$1, 1.7, 1.73, 1.732, 1.7320, \cdots\cdots; \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}; \tag{5}$$

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \cdots\cdots; \tag{6}$$

$$0, -2, 0, -4, 0, -8, \cdots\cdots; \tag{7}$$

$$0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \cdots\cdots; \tag{8}$$

$$7, 7, 7, 7, \cdots\cdots; \tag{9}$$

$$1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{6}{7}, \cdots\cdots. \tag{10}$$

这里的每一串数中的各个数都有它本身的确定位置．例如，在（1）中，2在第1个位置，4在第2个位置，……，16在第8个位置；在（2）中，1在第1个位置，3在第2个位置，5在第3个位置，……；等等．于是这些串数中的每一个数都与它所在位置的号数一一对应．因此，我们可以

把每一串数的各个数看作为对应于位置的号数1，2，3，……的函数值. 于是我们规定：

定义 定义域为自然数集合的函数的自变量顺次取1，2，3，……时，一系列的函数值叫做数列.

例如，对于函数 $f(x)=3x^2+2$ 来说，令自变数 x 顺次取1，2，3，4，……，所得的函数值就组成数列

$$5, 14, 29, 50, \cdots\cdots. \tag{11}$$

又如前面的数串（2），就是函数 $f(n)=2n-1$ 中自变数 n 顺次取1，2，3，4，5，……时所得的值.

从上面的例子可以看出数列的定义也可以叙述为：

按照某种法则排列的一串数叫做数列.

数列里的每一个数叫做数列的一项. 在第1个位置上的数叫做第1项，在第2个位置上的数叫做第2项……，在第n个位置上的数叫做第 n 项，也可以称为通项，记作 a_n. a_1 表示第1项，a_2 表示第2项，等等. 例如，上面的数列（11）中，$a_1=5, a_2=14, a_3=29, \cdots\cdots$.

一般地，数列可以表示为

$$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots,$$

简记为 $\{a_n\}$.

§2. 数列的通项 数列有不同的表现形式，比如在§1中给出了数列的各项（如数列（1）—（10））就是数列的一种表现形式.

数列还可以用各项在数轴上所对应的点来表示，如下图.

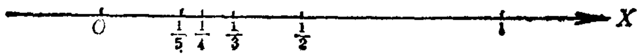

图 一

表示数列：　　$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots\cdots$.

数列的最好表示形式是用解析式子表示，也就是说，用自变数为自然数的函数表达式表示数列．这样，当自变数 n 取 1，2，3，……，n……的时候，表达式 a_n 的一系列数值就组成了一个数列．

公式 a_n 叫做这个数列的通项公式．

例如，数列（2）的解析式表示就是 $2n-1$．$2n-1$ 就是这个数列的通项公式，数列（2）可以表示为 $\{2n-1\}$．

事实上，数列不是都能够用解析式表达的，或者说它不一定存在通项公式．例如，§1 中数列（4）是由 $\sqrt{3}$ 的精确到 $1, 0.1, 0.01, \cdots\cdots, (0.1)^{n-1}, \cdots\cdots$ 的一系列不足近似值组成的，它就不能用解析式表达，而只能是用语言叙述．

如果我们已知一个数列的通项公式，可以说就是明确了这个具体数列的定义。比如给定了一个数列的通项公式为 $a_n = n^2 - 3n$，或者说给定了数列 $\{n^2-3n\}$，这样就可以写出它的任何一项．因此，我们说用通项公式来表示数列是最佳的表现形式．

但是，我们常通过数列的前若干项来探求它的通项公式。

例如，就§1的数列（2）

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots\cdots$$

来说，第2项3是项数的2倍减去1，即$3=2\times2-1$，第3项5是项数的2倍减去1，即$5=2\times3-1$……，于是推测出$a_n=2n-1$。

又如，§1的数列（6）的前6项中每相邻的两项都是互为相反的数，于是推测出$a_n=(-1)^{n+1}$。

又如，§1的数列(7)的前n项中，奇数位次的项都是0，偶数位次的项顺次为2的正整数幂即$2^1, 2^2, 2^3, \cdots\cdots$的相反数，于是推测出它的通项公式为

$$a_n\begin{cases}\text{当}n=2k-1\text{的时候，}a_n=0. \\ \text{当}n=2k\text{的时候，}a_n=-2^k.\end{cases}\quad (k\text{为正整数})$$

由以上例子可以看出，通过数列的前若干项探索一条规律，可找到数列的通项公式。

从数列的有限项来推测数列的通项公式，结果是不唯一的。也就是说，不能确定唯一的数列。

例如，就数列

$$7,\ 7,\ 7,\ 7,\ \cdots\cdots$$

来说，我们不能断定它后面的各项都是7．当然可能都是7，也可能后面是四个6，再后面是四个5，……；还可能以后的项都是0；等等。

又如，对于数列

$$1,\ 3,\ 5,\ 7\cdots\cdots$$

来说，虽然3比1，5比3，7比5都大2，但并不能断定

7后面的一项是9，它可能是其他的数．原因是：只给了数列的前4项顺次为1，3，5，7，并没有再给出其他约束这个数列的条件．就是由于这个原因，不能从给出的4项确定唯一的数列．

再用下面的方法说明这个问题．

如果给定了一个数列的前3项$a_1=1$，$a_2=4$，$a_3=9$，求这个数列的通项公式．

容易想到$1=1^2, 4=2^2, 9=3^2$，从而推测出$a_n=n^2$．

我们还可以用待定系数法求它的通项公式．

假定数列1，4，9，……的通项$a_n=an^2+bn+c$，那么由已知条件$a_1=1$，$a_2=4$，$a_3=9$，可得

$$a+b+c=1,$$
$$4a+2b+c=4,$$
$$9a+3b+c=9.$$

解由这三个关于a，b，c的方程组成的方程组，得

$$a=1, \quad b=0, \quad c=0.$$

所以
$$a_n=n^2.$$

但是，如果假定这个数列的通项$a_n=an^3+bn+c$，那么，当$n=1$，2，3的时候，a_n的值分别为1，4，9，于是有

$$a+b+c=1,$$
$$8a+2b+c=4,$$
$$27a+3b+c=9.$$

解这个方程组，得

$$a=\frac{1}{6}, \quad b=\frac{11}{6}, \quad c=-1.$$

所以 $$a_n=\frac{1}{6}n^2+\frac{11}{6}n-1.$$

从这里可以看出，只给定了数列的前几项，不能唯一地确定数列的通项公式。

一般地说，只给定了数列的前有限项，是不能唯一地确定它的通项公式的。而是应该在给定数列的前有限项后，再给以附加条件，就可以唯一确定这个数列的通项公式了。

例如，自1起自然数的平方组成的数列

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \cdots\cdots,$$

这就确定了它的通项公式为$a_n=n^2$。

这样，实际上是给出了这个数列的定义。自然从它的有限项能够得到唯一的通项公式。我们都知道的等差数列和等比数列，都是先给出了它们的定义，然后根据定义确定了它们的通项公式。

§3. 数列公式证明举例 对于我们熟悉的有关数列的公式，常常需要利用数学归纳法加以证明。

例1 对于等差数列

$$a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d,\ \cdots\cdots \tag{1}$$

来说，它的第n项为

$$a_n=a_1+(n-1)d. \tag{2}$$

现在用数学归纳法证明它是正确的。

当$n=1$的时候，$a=a_1$，(2)式是成立的。

归纳假定$n=k$的时候，(2)式是成立的，就是

$$a_k=a_1+(k-1)d.$$

于是 $$a_{k+1}=a_k+d$$
$$=a_1+(k-1)d+d$$
$$=a_1+[(k+1)-1]d,$$
所以当 $n=k+1$ 的时候，(2)式也是成立的。因此，对于所有的自然数 n，(2)式都成立。

例 2 数列(1)的前 1 项，前2项的和，前 3 项的和，……，前 n项的和分别表示为 S_1，S_2，S_3，……S_n，于是

$S_1=a_1$，$S_2=2a_1+d$，$S_3=3a_1+3d$，$S_4=4a_1+6d$，……，

从而可以归纳出

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d. \tag{3}$$

现在用数学归纳法证明它是正确的。

当 $n=1$ 的时候，$S_1=a_1$，(3)式成立。

归纳假定 $n=k$ 的时候，(3)式成立，就是

$$S_k=ka_1+\frac{k(k-1)}{2}d.$$

于是 $$S_{k+1}=S_k+a_{k+1}$$
$$=\left[ka_1+\frac{k(k-1)}{2}d\right]+\{a_1+[(k+1)-1]d\}$$
$$=(k+1)a_1+\left[\frac{k(k-1)}{2}+k\right]d$$
$$=(k+1)a_1+\frac{k(k+1)}{2}d$$
$$=(k+1)a_1+\frac{(k+1)[(k+1)-1]}{2}d.$$

可见当 $n=k+1$ 的时候，(3)式也成立．因此，对于所有的自然数 n，(3)式都成立．

例 3　用数学归纳法证明：

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}. \qquad (4)$$

当 $n=1$ 的时候，$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$，$\frac{n}{n+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$，所以(4)式成立．

归纳假定 $n=k$ 的时候，(4)式成立，就是

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}.$$

在等式的两边各加上 $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$，得

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

由于 $\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{(k+1)+1}$，

所以　$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k+1}{(k+1)+1}.$$

可见当 $n=k+1$ 的时候，(4)式也成立。因此，对于所有的自然数 n，(4)式都成立。

也可以用演绎法证明(4) 式是成立的。

首先，把$\frac{1}{n(n+1)}$分为部分分式。

假设 $$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}.$$

用 $n(n+1)$乘等式的两边，得

$$1=a(n+1)+bn,$$

就是 $$1=(a+b)n+a.$$

这是一个恒等式，所以等式两边的对应项系数应该相等。于是

$$\begin{cases} a+b=0, \\ a=1. \end{cases}$$

解得 $$a=1,\ b=-1.$$

所以 $$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

可见 $$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

这就是所要证明的。

如果给定了公式

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)},$$

那么

$$\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=\frac{1}{(n-1)n},$$

$$\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}=\frac{1}{(n-2)(n-1)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2\cdot 3},$$

$$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{1\cdot 2}.$$

这样，就可以确定一个恒等式

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

也可以说确定了一个数列

$$\frac{1}{1\cdot 2},\ \frac{1}{2\cdot 3},\ \frac{1}{3\cdot 4},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{n(n+1)},\ \cdots\cdots,$$

它的前 n 项和为 $\frac{n}{n+1}$.

例 4　用数学归纳法证明：

$$1+3+6+\cdots\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2). \quad (5)$$

当 $n=1$ 的时候，等式的左边为 1，右边为$\frac{1}{6}\cdot1\cdot2\cdot3=1$，所以等式(5) 成立。

归纳假定 $n=k$ 的时候，等式(5) 成立，就是

$$1+3+6+\cdots\cdots+\frac{1}{2}k(k+1)=\frac{1}{6}k(k+1)(k+2).$$

在等式的两边各加上$\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$，得

$$\begin{aligned}&1+3+6+\cdots\cdots+\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\\&=\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)+\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\\&=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\left(\frac{1}{3}k+1\right)\\&=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\cdot\frac{k+3}{3}\\&=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(k+3).\end{aligned}$$

可见当 $n=k+1$ 的时候，(5) 式也成立。因此，对于所有的自然数 n，(5) 式都成立。

例 5　用数学归纳法证明：

$$1+4+10+\cdots\cdots+\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

$$= \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(n+3). \quad (6)$$

（即习题一第 5 题第 2 小题）

由等差数列前 n 项和的公式，可以得到

$$1+2+3+4+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1). \quad (7)$$

在这个等式里，右边可以看作由 n 个元素选 2 个元素的组合数 C_n^2，左边的各项顺次看作 C_1^1，C_2^1，C_3^1，$\cdots\cdots$，C_n^1。于是等式(7) 可以写作

$$C_1^1+C_2^1+C_3^1+\cdots\cdots+C_n^1=C_n^2. \quad (8)$$

同样，等式(5) 和(6) 可以分别写作

$$C_2^2+C_3^2+C_4^2+\cdots\cdots+C_n^2=C_n^3. \quad (9)$$

$$C_3^3+C_4^3+C_5^3+\cdots\cdots+C_n^3=C_n^4. \quad (10)$$

依此类推，我们可以得到

$$C_r^r+C_{r+1}^r+C_{r+2}^r+\cdots\cdots+C_n^r=C_n^{r+1}. \quad (11)$$

请读者用数学归纳法证明等式(11)。

§4. 递推方法　递推方法是确定数列的一种方法。实际上，就是用数列 $\{a_n\}$ 中足码小于 n 的某些项与数列通项间的关系式确定数列的一种方法。我们把给出的数列通项 a_n 与它前面的某些项间的关系式叫做递推公式。

比如，我们知道了递推公式 $a_n=a_{n-1}q$，那么就有

$$a_n=a_{n-1}q,$$

$$a_{n-1}=a_{n-2}q,$$

$$a_{n-2}=a_{n-3}q,$$