

# SOLID GEOMETRY

By

SCHULTZE SEVENOAK & SCHUYLER  
SOLUTIONS OF QUESTIONS

SS

## 立體幾何學題解

蔣伯蒼編演



库存书

香港中流出版社印行

三 S  
立體幾何學題解

蔣伯倉編

江苏工业学院图书馆

藏書章

香港中流出版社印行

# 三 S 立體幾何學題解

蔣伯蒼編演

---

出版兼發行者：

中流出版社

香港北角渣華道82號二樓

印刷者：

嶺南印刷公司

香港德輔道西西安里十三號

---

一九七八年八月版      定價港幣三元

版權所有 · 不准翻印

## 例 言

一 本書係根據三 S 立體幾何學 (Solid Geometry, By Schultze-Sevenoak-Schuyler) 教本習題所編之題解，每一習題均予以精確詳細之解答。

二 本書專供教師及學生於教授或演算時之參考。凡家居自修，預備應試，均可以將本題解作為幫助，但僅為一般學生在演算困難，思索不得之際，作為指導，倘完全照書直抄，以此依賴，放棄練習演算，實非編者向願。

三 本書編制，是接續三 S 平面幾何學，每章習題依次解答，每一題解，重於提示，詳簡不一，凡採用中流版漢譯本式及其他書局出版之漢譯本，本題解一概適用。

四 本書在每習題前，均註明原書頁碼，使讀者便於查閱，(中流版譯本頁碼與原書頁碼同)，其他如排式醒目，印刷清晰，校對謹嚴，務期臻於完善，惟編印匆促，脫誤之處，尤恐難免，希國內外專家和讀者教正。

## 幾何學

聳立在埃及尼羅河畔著名之金字塔，爲五千年前幾何圖形之一種變裝也，具有如此古遠歷史之幾何問題，不特種類不一，變化繁多；且無一定有系統之研究方法，誠爲複雜，學者宜如何着手學習此種問題，頗費思索，茲特臚列各項心得，以爲初學者之參考。

(一) 首先須明瞭題意 學習幾何題目，先須熟讀題目，明瞭命題之意義，題目假設之條件爲何？有何要求？需何證明？凡此種種，均須於明瞭之後，方能着手解答，否則徒費腦力與時間，無補實際，事倍功半，得益淺鮮，且易發生錯誤。

(二) 次及於運用定理 幾何學之基礎，係建築於許多定理與原理之上，學者於學習幾何學之初，即須學習此種定理，不特須了解其原理，熟習其證法；且須記憶此種定理之文字，知道其運用之方法，則於着手解答題目之時，方可得心應手，運用自如。

(三) 繪出準確必需之圖形 許多幾何問題之解答，均須藉圖形以爲幫助，蓋幾何學原爲圖形

## 學習要點

之學問也，由於繪出正確之圖形，可獲得解答之領悟，於是推理及思考，亦容易取得門徑矣！

(四)推考思索以自求解答 幾何學理之探討，較為呆板，祇須熟讀記憶，融會貫通，即可應用。但幾何習題之作答，則須細加思索，詳為推考，方能領會體味，而得思想上之進步，尤須注重自動之能力。本社將習題與解答分冊出版，俾養成讀者獨立解答之能力與自動思考之習慣，所以編印解答之作用，不過在給予暗示，作為讀者參考之資料與無法解答時之借鑑而已。

(五)培養推論與判斷之能力 斷片之智識，不能發生有效之功用，故必須聯貫之以合應用。本書中竭力作有系統之研究，諸君讀之，常可看出習題解法之原理潛在何處，再進而求解答，乃可養成集中全部智識，以求獲得解答之推論力與判斷力。

上述五端，為個人學習幾何學時所獲得之心得，讀者若能身體力行，或可有助於學習之進步焉！

# 目 次

## 第六編 空間之直線及平面——多面角

| 原本教科書頁數  | 習 題       | 本書頁數 |
|----------|-----------|------|
| 2.....   | 1—2.....  | 1    |
| 3.....   | 1—4.....  | 1—2  |
| 4.....   | 1 .....   | 2    |
| 6.....   | 1—2.....  | 2    |
| 7.....   | 1.....    | 3    |
| 10.....  | 1—9.....  | 3—4  |
| 11 ..... | 1—3.....  | 4—5  |
| 13.....  | 1—5 ..... | 5—6  |
| 15.....  | 1—7.....  | 6—7  |
| 17.....  | 1—2.....  | 7    |
| 19.....  | 1 .....   | 7    |
| 22.....  | 1—2.....  | 7—8  |
| 23.....  | 1 .....   | 8    |
| 24 ..... | 1—3.....  | 8    |
| 25.....  | 1 .....   | 8    |
| 25.....  | 1 .....   | 9    |
| 26.....  | 1 .....   | 9    |
| 29.....  | 1—12..... | 9—12 |

| 原本教科書頁數    | 習 題       | 本書頁數  |
|------------|-----------|-------|
| 32.....    | 1—2 ..... | 12    |
| 36—37..... | 1—19..... | 12—15 |
| 38—39..... | 1—28..... | 16—21 |

## 第七編 多面體 柱及錐

|            |           |       |
|------------|-----------|-------|
| 42—43..... | 1—2 ..... | 22    |
| 43.....    | 1—2 ..... | 22    |
| 44.....    | 1—2 ..... | 23    |
| 47—48..... | 1—4 ..... | 23—24 |
| 50.....    | 1—2 ..... | 24    |
| 51—52..... | 1—6 ..... | 24—26 |
| 54.....    | 1—9 ..... | 26—27 |
| 55.....    | .....     | 28    |
| 56.....    | 1—3 ..... | 28    |
| 57.....    | 1—3 ..... | 28—29 |
| 59.....    | 1—14..... | 29—31 |
| 60.....    | 1—15..... | 31—34 |
| 64.....    | 1—7 ..... | 34—35 |
| 66.....    | 1—6 ..... | 36    |
| 68.....    | 1.....    | 37    |
| 70—71..... | 1—19..... | 37—40 |
| 73.....    | 1—10..... | 40—42 |
| 75.....    | 1—2 ..... | 43    |
| 77—78..... | 1—14..... | 43—46 |
| 83.....    | 1.....    | 47    |

| 原本教科書頁數     | 習題        | 本書頁數  |
|-------------|-----------|-------|
| 85.....     | 1—5 ..... | 47—48 |
| 91.....     | 1—3 ..... | 48    |
| 92.....     | 1—6 ..... | 48—49 |
| 93.....     | 1—3 ..... | 49—50 |
| 94.....     | 1 .....   | 50    |
| 96.....     | 1—6 ..... | 50—51 |
| 96.....     | 1—2 ..... | 52    |
| 97—100..... | 1—40..... | 52—60 |
| 101.....    | 1—13..... | 61—64 |

## 第八編 球

|              |           |       |
|--------------|-----------|-------|
| 102.....     | 1.....    | 65    |
| 104.....     | 1—2 ..... | 65    |
| 105—106..... | 1—2 ..... | 65—66 |
| 108.....     | 1—2 ..... | 66    |
| 109.....     | 1.....    | 66    |
| 110.....     | 1.....    | 66    |
| 114.....     | 1.....    | 67    |
| 117—118..... | 1—20..... | 67—69 |
| 118.....     | 1.....    | 69    |
| 121.....     | 1—3 ..... | 70    |
| 122.....     | 1—3 ..... | 70—71 |
| 123.....     | 1—2 ..... | 71    |
| 124.....     | 1.....    | 71    |
| 124.....     | 1.....    | 71    |

| 原本教科書頁數      | 習 題       | 本書頁數  |
|--------------|-----------|-------|
| 125.....     | 1—3 ..... | 71—72 |
| 126.....     | 1.....    | 72    |
| 128.....     | 1—2 ..... | 72    |
| 130.....     | 1—3 ..... | 73    |
| 132.....     | 1—6 ..... | 74    |
| 133.....     | 1—4 ..... | 74—75 |
| 134.....     | 1.....    | 75    |
| 135.....     | 1—3 ..... | 75—76 |
| 136—137..... | 1—13..... | 76—80 |
| 140—144..... | 1—54..... | 81—92 |
| 144—146..... | 1—32..... | 92—98 |

## 附 錄

|                  |           |         |
|------------------|-----------|---------|
| 148.....         | 1—2 ..... | 99      |
| 150.....         | 1—3 ..... | 99—100  |
| 153.....         | 1—5 ..... | 100—101 |
| 155.....         | 1—4 ..... | 101—102 |
| 立體幾何基本定理彙集 ..... |           | 1       |
| 基本計算公式彙集 .....   |           | 3       |

# 三 S 立體幾何學題解

## 第 六 編

### 空間之直線及平面—多面角

#### 原 本 第 2 頁

**習題 1.** 攝影者之照相機或測量者之經緯儀何故須用三足支持？

[解] 因三點決定一平面 (§ 481, 公法 A), 故三點已足夠, 過多反不穩定。

**習題 2.** 不在同一平面上之四點決定若干平面？

[解] 不在同一平面上之四點, 所決定四平面, 因三點即可決定一平面故四平面為 (a) 1, 2, 3, 三點, (b) 1, 2, 4 三點; (c) 1, 3, 4, 三點及 (d) 2, 3, 4 三點。

#### 原 本 第 3 頁

**習題 1.** 設一平面相交於二平行面之一, 則相交於其餘一平面。

[解] 設二平面為  $AB$  及  $CD$  平行, 又設第三平面  $EF$  交平面  $AB$  與  $GH$ , 從  $GH$  中一點  $K$ , 穿過第四平面  $RS$  並穿過平面  $CD$  中一點  $M$ . 設平面  $EF$  平行於平面  $CD$ , 則平面  $RS$  但須割平

面  $AB$  及  $EF$  於二交線，而此二交線，則須平行於二平面  $RS$  及  $CD$  之交線 (§ 486)，此為不可能者。

**習題 2.** 設一直線相交於二平行平面之一，則相交於其餘一平面。

[解] 設線  $AB$  交平面  $MN$  又設平面  $MN \parallel$  平面  $RS$ ，從線  $AB$  及平面  $RS$  中一點穿過平面  $PQ$ ，餘依習題 1 解之。

**習題 3.** 試指出教室中命題 2 之實例數個。

[解] 地板與四壁等。

**習題 4.** 於命題 2 之圖中，設  $AC \parallel BD$  試證明  $AB = CD$ 。

[解]  $AB \parallel CD$  (§ 486)，則  $ABCD$  為一  $\square$ ， $AB = CD$ 。

### 原本第 4 頁

**習題** 試作一平面平行於已知直線而通過已知二點。

[解] 聯二點中之一直線，在一端作一直線，與已知線平行，此二相交直線所決定之平面，即為所求之平面 (§ 488)。

### 原本第 6 頁

**習題 1.** 設平行三平面於一截線上截相等部分，則於任何截線上截相等部分。

[解] 平行面截二直線上之對應部分成比例 (§ 495)，故一線上之部分相等，則他線上之部分亦相等。

**習題 2.** 設命題 5 之圖中， $BG = 5$ ， $AD = 15$ ， $DE = 4$  求  $EF$ 。

[解] 在命題 5 之圖中，

$$BG : AD = CG : CD = FE : FD \quad (\S 495) \quad \text{設 } EF = x.$$

$$5 : 15 = x : x + 4, \quad 5 : 15 - 5 = x : x + 4 - x \quad (\text{合比}).$$

$$5 : 10 = x : 4, \quad x = \frac{5 \times 4}{10} = 2.$$

## 原本第 7 頁

**習題** 設直線  $AB$  平行於平面  $P$ , 又平行於另一線  $CD$  則平面  $P \parallel CD$ .

[解] 過  $AB$  作平面交平面  $P$  於  $XY$ , 則  $XY \parallel AB$  (§ 492).  
 $CD \parallel XY$  (§ 497), 即  $CD \parallel$  平面  $P$  (§ 488).

## 原本第 10 頁

**習題 1.** 命題 8 之圖中, 設  $AD = 5$ ,  $AB = 4$ ,  $BC = 5$ ,  $\angle CBD = 120^\circ$ , 又  $AB \perp$  平面  $MN$ , 求  $CD$  之長.

[解]  $\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AB}^2$ ,  $BD = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$ .

$BD$  在  $BC$  上之射影  $p = \frac{3}{2}$  (平面幾何 192 頁習題 9).

$\overline{CD}^2 = 5^2 + 3^2 + 2 \times 5 \times \frac{3}{2} = 25 + 9 + 15 = 49$ . (§ 336/p. 194, 平面幾何),  $CD = 7$ .

**習題 2.** 設  $ABCD$  是空間四邊形 (即  $A, B, C$  及  $D$  不俱在同平面上) 又  $AB = BC$ ,  $CD = DA$ , 則平面角  $A$  等於平面角  $C$ .

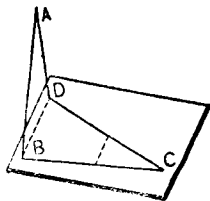
[解] 過  $AB, AD$  二線作一平面, 過  $DC, BC$  亦作一平面, 則二平面相交於直線  $AB$ .

$\triangle ABD \cong \triangle BCD$  (s. s. s.),  $\angle DAB = \angle DCB$  (§ 70).

**習題 3.** 連接空間四邊形二鄰邊中點之直線, 等於且平行於連接其他二邊中點之直線.

[解] 與上題同作二平面, 則二三角形中, 二中點聯線, 必平行且等於  $\frac{1}{2}$  二平面之交線,

則二中線必相等且平行. (§ 497 及公理 1).



(習題 3)

**習題 4.** 設不在同平面上之二角有其二邊平行，而在反對方向，則二角相等。

[解] 將一角之邊迴向其頂點，並穿過頂點而延長之，用 § 53 及 § 498 證之。

**習題 5.** 設二角三邊互相平行，則在何種條件下二角互為補角。

[解] 設  $\angle ABC$  及  $\angle A'B'C'$  為二角， $AB \parallel A'B'$ ， $BC \parallel B'C'$ 。 $BA$  及  $B'A'$  朝同方向伸展之， $BC$  及  $B'C'$  則朝相反方向伸展之。

**習題 6.** 在何種條件下，可作一平面通過二點而垂直於已知直線。

[解] 過已知二點作二垂直線，必交於已知直線，此二線所定之平面，必與已知直線垂直。

**習題 7.** 無四點在同一平面上之五點，可作若干平面通過之。

[解] 三點可決定一直線，故於五點中取 3 點為  $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{60}{6} = 10$  平面。

**習題 8.** 能包圍空間一定部份之最少數平面如何？何故？

[解] 最少數之平面為四平面，三平面相交於一點，而需第四平面將空間截成有限部分。

**習題 9.** 證明：(a) 四邊形決定一平面設其二對角線相交。(b) 設其二邊平行，(c) 設其相對之二邊相交。

[解] (a) 用 § 484 (2) 及 § 481 證之 (b) 用 § 484 (3) 及 § 481 證之 (c) 用 § 484 (2) 及 § 481 證之。

### 原本第 11 頁

**習題 1.** 一直角以其一邊為軸而旋轉，其移動之邊產生何種面？

[解] 成垂直於軸之平面 (§ 504).

習題 2. 三直線互相垂直，試證明不能畫第四直線全垂直於此三已知直線。

[解] 設 4 直線互相垂直，則三直線必有一平面內 (§ 504)，但此為不可能者 (§ 47)，因二線不能在一平面內同時垂直於直線。

習題 3. 證明不能作直線垂直於公有一點之二平面。

[解] 如能作一直線，垂直於公有一點之二平面，則與 § 506 矛盾，故為不可能者。

### 原本第 13 頁

習題 1. 順次連結空間四邊形諸邊中點之直線，成一平行四邊形。

[解] 由 10 頁上習題 3. 知二邊中點連線必平行且相等於對二邊中點之連線，故為一平行四邊形。

習題 2. 連結任何空間四邊形對邊中點之直線，互相平分。

[解] 由上題知四點順次連結成平行四邊形，則對邊中點之聯線成平行四邊形之對角線，故互相二等分。

習題 3. 試述命題 11 如右式：設一平面垂直於平行二直線之一……。

[解] 設二平行線之一垂直於平面，則其餘一線亦必垂直於平面 (§ 510)。

習題 4. 在命題 11，畫  $BB'$ ，再用一對直線如  $BC$  及  $B'C'$ ，以證明之。

[解] 作  $BB'$ ， $AB$  及  $A'B'$  位於同平面上 (§ 484(3))， $AB \perp$  平面  $MN$  (假設)， $AB \perp BC$  (§ 500)， $BB' \perp A'B'$  (§ 105)， $BC \parallel B'C'$  (作圖)， $\angle ABC = \angle A'B'C'$  (§ 493)， $A'B' \perp B'C'$  (同理)， $A'B' \perp$  平

面  $MN$  (§ 502).

**習題 5.** 設一平面斜截平行二線之一，試證明此平面不垂直於他一線。

[解] 設  $AB \parallel A'B'$ ，平面  $MN$  斜截  $AB$ ，即  $AB$  不 $\perp$ 於平面  $MN$ ，求證  $A'B'$  亦不 $\perp$ 於平面  $MN$ 。

若  $AB$  不 $\perp$ 於平面  $MN$ ，則  $A'B'$  或 $\perp$ 或不 $\perp$ 於平面  $MN$ ，設  $A'B' \perp$ 平面  $MN$ ，則為不可能 (§ 510)，故  $A'B'$  亦必不 $\perp$ 於平面  $MN$ 。

### 原 本 第 15 頁

**習題 1.** 與已知平面有已知距離之點，其軌跡如何？

[解] 其軌跡為二平行於已知平面，已知距離之二平面。

**習題 2.** 與已知平面有已知距離，而與二已知點等距離之點，其軌跡如何？

[解] 用 § 509 及上題知其軌跡為二平行平面與一平面相截之二平行線。

**習題 3.** 與點  $A$  及  $B$  等距離，且亦與點  $C$  及  $D$  等距離之點，試求其軌跡。

[解] 與二點等距之軌跡為垂直於二點，連線中點之平面，故其軌跡為二平面所截之一直線。

**習題 4.** 習題 3，當 (a) 直線  $AB \parallel$  直線  $CD$  時，(b)  $C$  與  $B$  重合時，(c) 諸點  $A, B, C$  及  $D$  在同一直線上時試討論之。

[解] (a)，除二垂直平分之平面相合時成矩形外，別無軌跡  
(b) 必有軌跡存在 (c) 除  $A$  與  $C$  及  $B$  與  $D$  密合外無軌跡。

**習題 5.** 通過二相交平面外一點，畫一直線平行於各平面。

[解] 作一直線與二平面相交處之直線平行。

習題 6. 證明:每一三角形決定一平面。

[解] 用 § 484 (2) 證之,或 § 481.

習題 7. 設  $AB \parallel A'B'$  又通過各直線作平面各各相交於直線  $CD$ , 則  $CD \parallel AB$ .

[解]  $AB \parallel A'B'$  (題設), 則  $AB$  必平行於含  $A'B'$  及  $CD$  之平面 (§ 488) 故  $AB \parallel CD$  (§ 492).

### 原本第 17 頁

習題 1. 命題 13 之圖中, 設  $\angle B = \angle C$ , 則  $EB = EC$  又  $AB = AC$ .

[解]  $\angle EAC$  及  $\angle EAB = \text{rt. } \angle$ .  $AE = AE$  (公用),  $\angle B = \angle C$ ,  $\text{rt. } \triangle ABE \cong \text{rt. } \triangle ACE$  (§ 117),  $EB = EC$ ,  $AB = AC$  (§ 70).

習題 2. 自離平面  $MN$  三吋之點  $P$ , 畫直線  $PA$ ,  $A$  在  $MN$  上, 設  $PA = 5$  吋, 則  $A$  與自  $P$  至  $MN$  所畫垂線足之距離如何?

[解] 設  $B$  爲  $P$  至平面  $MN$  上垂線之垂足,  $PB = 3$  吋,  $\angle PBA = \text{rt. } \angle$ .  $PA = 5$  吋,  $AD = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$  吋.

### 原本第 19 頁

習題 設二平面平行於第三平面, 則此二平面各各平行。

[解] 於第三平面作線  $\perp$  於二平面則此二平面皆  $\perp$  於此直線 (§ 522), 故互相平行 (§ 521).

### 原本第 22 頁

習題 1. 對頂二面角相等。

[解] 作一平面垂直於二平面相交之處, 則在此平面上之二