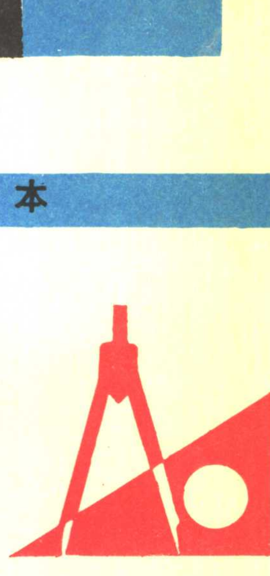
数学

修 订 本

高中数学

胡炯涛 主编

北京师范学院出版社



高中数学教与学

修　订　本

胡炯涛　叶宝康　黄自强
欧美明　陈丽珏　杨逸琴　编
王士兰

北京师范学

1990年·北京

顾 问 鲍 霁

主 编 蔡健光

副主编 张国栋 高建军

编 委 （以姓氏笔划为序）

王立根 王绍宗 华跃义 孟学军 张国栋

胡炯涛 高建军 董凤举 鲍 霁 蔡健光

高中数学教与学

修 订 本

胡炯涛 主编

*

北京师范学院出版社出版发行

（北京阜成门外花园村）

全国新华书店经销

国防科工委印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：16.5 字数：340千

1990年6月北京第2版 1990年6月北京第1次印刷

印数：00，001—50，000册

ISBN 7-81014-139-2/G · 134

定价：5.20元

修订说明

《教与学》丛书自1988年2月份出版以来，已印刷数次，受到了广大中学师生的充分肯定和热情赞扬。在两年多的时间里，编委会认真听取了各方面的使用意见，在原丛书的基础上进行了适当的调整和修改。修改后的丛书保留了原丛书的精华部分，删掉了可以去掉的内容，使之更具可读性、实用性。这次修订，充分地反映了全国部分重点中学著名教师刻意求新、锐意进取的治学精神和教学经验。《教与学》是您各科教学的忠实朋友。

值得一提的是，为使《教与学》丛书发挥更大的社会效益，我社与北京高教音像出版社联合出版了以该丛书为蓝本而拍摄的《教与学》系列录像教学片。录像片与丛书配套同步，书像结合，尤如名师请到身边，必将对中学各科教学产生莫大的影响。

编委会

1990年3月

丛书小引

鲍霁

在《全日制中小学各科教学大纲修订说明》的《前言》里，国家教委中小学教材审定委员会办公室指出："最近经国家教委批准正式颁发的18个学科教学大纲，是修订现行教学大纲"而成的，是"今后一段时期过渡性教学大纲"。同时又指出："这个教学大纲在新的教学计划和教学大纲全面实施前，将作为中小学教学的依据，考试的依据，教学质量评估的依据和编写教材的依据"。因此，这个教学大纲理所当然地受到全国中小学教师的普遍关注，而如何更快更好地把它贯彻到自己从事的教学实践中去，则成为大家集中思虑的问题。

向来以推动我国中小学教育事业发展为己任的北京师范学院出版社，闻讯后，随即会同《北京科技报》编辑部，共同邀请全国十四所著名中学（北大附中、人大附中、北师大二附中、北京师院附中、天津南开中学、华东师大一附中和二附中、上海师大附中、南京师大附中、福州一中和三中、东北师大附中、苏州中学、杭州学军中学）和北京教育学院二部的一些教学经验丰富且成绩显著的教师，针对大家所集中思虑的这个问题进行了深入讨论，并最后商定分工合作，各扬所长，以改革的精神为指导，编写一套配合中学语文、

数学、英语、物理、化学各科教学使用的参考性读物；每科初中和高中总的各编写一册。这套丛书每册均题名为“教与学”。

有人可能会问，编写这套丛书既然是为了帮助解决教师所思虑的问题，那为什么在“教”之外还要冠名以“学”呢？这是因为，教与学是构成整个教学过程的基本矛盾的两方面，对立统一，不可分割。况且，教是为了学，教好是为了学好。不以学生学好为出发点的教师，很难教好；不了解教师的教学目的、内容和方法的学生，也不易学好。引申而言，这套丛书固然可供各科教师参阅，同时也可供学生参阅。正是基于这样的认识，我们期望这套丛书能成为中学师生的益友良师。

我们知道，任何期望的实现都是要付出代价的，而我们这个期望的实现，更要经过切实的努力。为此，我们早在一年前就着手准备，延请名师，组织队伍，深入研讨，认真编写，并成立编委会，出头把关，务求系统完整，科学实用。至于我们的期望能否实现，还有待实践检验，而中学师生是最权威的检验员。

1987 年 10 月于北京花园村

目　　录

第一章　函数……………………………………………… 1

第一节　一次函数与二次函数………………………… 1

第二节　集合与映射………………………………… 12

第三节　函数及其性质……………………………… 17

第四节　幂函数、指数函数和对数函数…………… 26

习题一……………………………………………………… 38

第二章　三角函数………………………………………… 43

第一节　任意角的三角函数………………………… 43

第二节　三角函数的图象与性质…………………… 51

第三节　三角恒等式的证明………………………… 58

习题二……………………………………………………… 69

第三章　反三角函数与简单三角方程…………………… 75

第一节　反三角函数………………………………… 75

第二节　三角方程与三角不等式…………………… 84

第三节　三角函数的应用…………………………… 92

习题三……………………………………………………103

第四章　数列与数学归纳法……………………………108

第一节　数列与等差数列……………………………108

第二节　等差数列与等比数列………………………117

第三节　数列的极限与无穷数列……………………125

第四节　数学归纳法及其应用………………………137

习题四……………………………………………………152

第五章　不等式……156
第一节　不等式的基本性质和同解定理……156
第二节　怎样解不等式……161
第三节　怎样证明代数不等式……169
习题五……182
第六章　复数……186
第一节　复数及其代数运算……186
第二节　复数的几何意义及其应用……194
第三节　复数的三角形式及其应用……208
习题六……217
第七章　排列、组合、二项式定理……221
第一节　排列与组合……221
第二节　二项式定理……227
习题七……234
第八章　直线和平面……238
第一节　点、线与面的共属问题……238
第二节　异面直线……245
第三节　空间直线和平面的位置关系……253
第四节　三垂线定理及其应用……261
第五节　平面和平面的位置关系……269
第六节　二面角与折叠形……276
第七节　立体几何中的反证法与同一法……290
习题八　……297
第九章　多面体和旋转体……303
第一节　多面体与它的体积……303
第二节　旋转体……317

习题九……329
第十章　直线……333
第一节　有向线段、定比分点公式……333
第二节　直线的方程……335
第三节　两直线的位置关系……340
习题十……347
第十一章　圆锥曲线……352
第一节　圆……353
第二节　圆锥曲线的方程……357
第三节　渐近线、准线、离心率和焦半径……364
第四节　如何用圆锥曲线的定义解题……370
第五节　如何用平移化简方程……375
习题十一(一)……383
习题十一(二)……387
第十二章　参数方程、极坐标……391
第一节　曲线的参数方程……391
第二节　如何求轨迹的方程……400
第三节　如何选择参数……408
第四节　极坐标系与极坐标方程……418
第五节　圆锥曲线的极坐标方程……426
第六节　圆锥曲线中的定值问题……437
第七节　解析法在平面几何中的应用……447
习题十二……457
测试题(一)……463
测试题(二)……467
习题答案……472

第一章　函　　数

第一节　一次函数与二次函数

一、一次函数

如果两个变量 x 和 y 之间的函数关系能表示成 $y=kx$（k是不等于零的常量），那末这两个变量间的关系叫做正比例关系。函数 $y=kx$ 叫做正比例函数。它的图象是经过点 $(0,0)$ 和点 $(1,k)$ 的一条直线。k为直线的斜率，当$k>0$时，直线过一、三象限，函数是上升的；当$k<0$时，直线在二、四象限，函数是下降的。

函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 叫做 x 的一次函数。显然，当 $b=0$时，一次函数变成 $y=kx$，所以，正比例函数是一次函数的特例。$y=kx+b$的图象是把$y=kx$沿y 轴平行移动 b 个单位而得。

形如 $y=c$（或$y-c=0$）的函数（或方程）的图象是一条过点$(0,c)$且平行于x轴的直线；形如 $x=c$（或$x-c=0$）的函数（或方程）的图象是一条过点$(c,0)$且平行于 y 轴的直线。

二、二次函数

函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 称为 x 的二次函数。它的图象是一条抛物线。在图象中起决定性作用的因素是 a 以及顶

点坐标$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$。其中顶点坐标决定图象的位置，而 a 则决定着抛物线的形状(a 决定开口方向，$|a|$决定着张口的大小)。二次函数与二次方程、二次三项式、二次不等式有密切的联系，一般有“四个二次”之称。

三、例题分析

例 1 设 k、b 的取值范围是$|k|\leqslant1$，$|b|\leqslant1$，试图示 $y=kx+b$图象的存在范围。

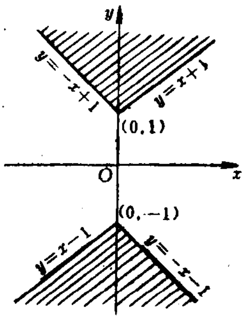


图 1-1

解 若取 b 值一定，k 在 $|k|\leqslant1$ 范围内变动时，直线 $y=kx+b$ 在过点 $(0, b)$，斜率为 ±1 的两直线所成左、右两只角的范围内变动。另外，当 b 在 $|b|\leqslant1$ 的范围内变动时上述两只角沿 y 轴平移而得到图 1-1 中未画斜线的区域，即为所求。

例 2 设梯形 $ABCD$ 中，$AB=CD=5$，$AD=7$，$BC=13$，E 为 AD 上的定点，$AE=4$。动点P从D出发，沿着梯形的周界依次经过 C、B，最后到达 A。设点P走过的距离为x，ΔAPE 的面积为 y，把 y 表示成 x 的函数，且画出图象。

解 可分别考虑点P在 DC、CB 和 BA 边上的三种情形。设$\angle C=\theta$，则$\angle D$的外角也等于θ。则$\sin\theta=\frac{4}{5}$。

(1)当P在DC边上移动，即$0\leqslant x\leqslant5$时，

$$y=S_{\Delta APE}=\frac{1}{2}\cdot4\cdot x\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot4\cdot x\cdot\frac{4}{5}$$

$$=\frac{8}{5}x;$$

（2）当P在CB上移动，即$5\leqslant x\leqslant 18$时，

$$y=S_{\triangle APE}=\frac{1}{2}\times 4\times 4=8;$$

（3）当P在BA上移动，即$18\leqslant x\leqslant 23$时，

$$\begin{aligned}y=S_{\triangle APE}&=\frac{1}{2}\times 4\times(23-x)\sin\theta\\&=\frac{1}{2}\times 4\times(23-x)\times\frac{4}{5}\\&=\frac{8}{5}(23-x).\end{aligned}$$

综合上述三点，即得图象如图 1-2 所示的一段折线。

例 3 变量x、y、z均为非负，并满足$3y+2z=3-x$及$3y+z=4-3x$，求函数$W=3x-2y+4z$的最大值与最小值。

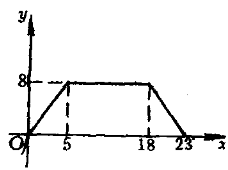


图 1-2

解 一次函数的最大值与最小值常与它的定义域与值域相一致。这里可把W变成x的函数，再由x的取值范围得到W的最大（小）值。

由$\begin{cases}3y+2z=3-x\\3y+z=4-3x\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x\geqslant 0\\y=\frac{5}{3}(1-x)\geqslant 0\\z=2x-1\geqslant 0,\end{cases}$

推出 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1.$

另外，代入得$W=\frac{1}{3}(43x-22)$，它是单调递增函数，

$\therefore$ 当$x=\frac{1}{2}$时W有最小值$-\frac{1}{6}$；

当$x=1$时，W有最大值7。

例4 20个劳力种50亩地，这些地可以种蔬菜、棉花或水稻，若这些农作物每亩地所需的劳力和预计产值如下：蔬菜－1/2劳力/亩，预计产值110元；棉花－1/3劳力/亩，预计产值75元；水稻－1/4劳力/亩，预计产值60元。问怎样安排，才能使每亩地都种上作物，所有劳力都有工作，而且农作物的预计总产值达到最高？

解 设蔬菜、棉花、水稻的土地顺次为x亩、y亩、z亩，预计总产值为W元，则据已知条件得

$x+y+z=50\cdots$①，$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=20\cdots$②。

$W=110x+75y+60z\cdots$③。这是求关于一个x、y、z一次函数的最大（小）值问题，象上例一样，它可以转化成闭区间上求x的一次函数最大（小）值问题，从而据一次函数的增减性得解。

由①、②得$y=90-3x$，$z=2x-40$，代入③得

$W=4350+5x$。但由$x\geqslant0$，$y=90-3x\geqslant0$，$z=2x-40\geqslant0$，得$20\leqslant x\leqslant30$。

$\therefore$当$x=30$时，W取最大值4500，这时$y=0$，$z=20$。所以种30亩地蔬菜，20亩地水稻，才能使产值总数最高，达4500元。

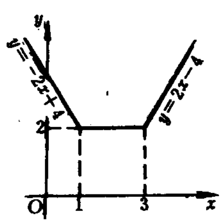


图 1-3

例 5 作函数 $y=|3-x|+|x-1|$ 的图象。

解 当$x\geqslant3$时，$y=x-3+x-1=2x-4$；

当$1\leqslant x\leqslant3$时，$y=3-x+x-1=2$；

当$x\leqslant1$时，$y=3-x+1-x=4-2x$。

据上作出图象为一段折线(图1-3)。

例 6 设 x 的函数 $f(x)=ax^2-2x+2$（a 为常数）对于满足 $1<x<4$ 的一切 x 值都有 $f(x)>0$，求常数 a 的范围。

解 可按$a=0$，$a>0$，$a<0$三种情形分别讨论。

(1)当$a=0$时，$f(x)=-2x+2$，则取 $x=2$ 有 $f(2)=-2$不合题意；

(2)当 $a<0$ 时，$f(2)=4a-2<0$，不合题意；此时，抛物线开口向下，不可能使$f(x)$恒正；

(3)当$a>0$时，$f(x)=a\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+2-\frac{1}{a}\cdots$①，图象是向上开口的抛物线，对称轴是 $x=\frac{1}{a}$。顶点为$\left(\frac{1}{a},2-\frac{1}{a}\right)$，只要 $2-\frac{1}{a}>0$，即$a>\frac{1}{2}$，有 $f(x)$为恒正，当然也满足$1<x<4$时$f(x)>0$。

$\therefore\ a>\frac{1}{2}$。

例 7 有一个x的二次式，当$x=1$时取最大值16。它的图象在 x 轴上截得的线段长为 8，求此二次式。

解 当$x=1$时取最大值 16 的二次式可表示成 $a(x-1)^2+16$，$a<0$，它的图象关于 $x=1$对称。又因在x轴上截得的线段长为 8，因而图象与 x 轴交点的横坐标为 1 ± 4，所以

$a(5-1)^2+16=0$，$\therefore a=-1$。所求二次式为$-(x-1)^2+16=-x^2+2x+15$。

例 8 设二次函数$y=ax^2+bx+c$的最大值等于$-3a$，且它的图象通过点$(-1,\ -2)$、$(1,\ 6)$，求a、b、c的值。

解 把两点代入，再把a、b、c中的两个表示成第三个的函数。

以$(-1,-2)$，$(1,6)$代入整理得$a-b+c=-2$，$a+b+c=6$，解得$b=4$，$c=2-a$，则$y=ax^2+4x+(2-a)=a\left(x+\frac{2}{a}\right)^2+2-a-\frac{4}{a}$，由于$y$有最大值$-3a$，$\therefore a<0$，$2-a-\frac{4}{a}=-3a$，从第二式得$(a-1)(a+2)=0$，取$a=-2$，$\therefore c=4$。

$\therefore\ a=-2$，$b=4$，$c=4$。

例 9 见图1-4下列各图是当a、b、c取不同值时，抛物线$y=ax^2+bx+c$的图象。指出每一个图象对应a、b、b^2-4ac的正、负。

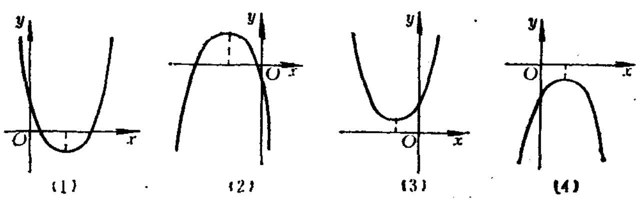


图 1-4

解 顶点坐标是$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$，据此考虑：

(1) $a>0, -\frac{b}{2a}>0, \frac{4ac-b^2}{4a}<0$,

$\therefore a>0,\quad b<0,\quad b^2-4ac>0$；

(2) $a<0,\ -\frac{b}{2a}<0, \frac{4ac-b^2}{4a}>0$,

$\therefore\quad a<0,\ b<0,\ b^2-4ac>0$；

(3) 同上推知$a>0$，$b>0$，$b^2-4ac<0$；

(4) 同上推知$a<0$，$b>0$，$b^2-4ac<0$。

例10 二次函数 $y=ax^2+bx+c\cdots$①，$y=px^2+qx+r\cdots$②的图象见图1-5。根据图象回答如下问题：

(1) 判断p、q、r、$a+c$、pa^2+qa+r的符号；

(2) 求满足 $(a-p)x^2+(b-q)x+(c-r)\geqslant 0$ 的 x 范围；

(3) 记两图象的交点横坐标是α、β。把$\alpha+\beta$、$\alpha\beta$用 a、b、c、p、q、r表示。

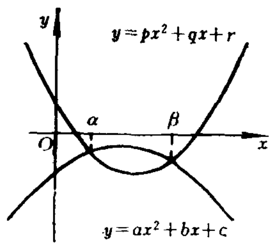


图 1-5

解 (1) 显然$a<0$，$p>0$，$c<0$，$r>0$，$\therefore a+c<0$。

又由$a<0$，② 的图象在y轴左边部分位于 x 轴上方，可知②中令$x=a$，则$y>0$，即$pa^2+qa+r>0$。

②式变形为 $y=p\left(x+\frac{q}{2p}\right)^2-\frac{q^2-4pr}{4p}$，其顶点横坐标为正，$\therefore -\frac{q}{2p}>0$，但$p>0$，$\therefore q<0$。

总之，$p, r, p\alpha^2+q\alpha+r$为正；$q, a+c$ 为负。

（2）$(a-p)x^2+(b-q)x+(c-r)\geqslant 0$，即

$ax^2+bx+c\geqslant px^2+qx+r$，$\therefore \alpha\leqslant x\leqslant\beta$。

（3）考虑方程$ax^2+bx+c=px^2+qx+r$，即

$(a-p)x^2+(b-q)x+(c-r)=0$，

$$\therefore\quad \alpha+\beta=-\frac{b-q}{a-p},\ \alpha\beta=\frac{c-r}{a-p}.$$

例11 m 取何值时，方程 $x^2+2mx+2m+1=0$ 在区间 $(-4,0)$ 中有两个不相等的实数根？

解 问题可转化为确定函数 $y=x^2+2mx+2m+1$ 的图象，与x轴交点在$(-4,0)$与$(0,0)$之间时的 m 取值范围，即可分析抛物线与x轴的关系得到有关系数的取值。

因为 $a>0$，所以开口向上，且抛物线与 x 轴的交点在 $(-4,0)$，$(0,0)$之间，顶点在 x 轴下方，所以有关系式：

$$\begin{cases} f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)<0 \\ -4<-\dfrac{b}{2a}<0 \\ f(-4)>0 \\ f(0)>0 \end{cases}$$

而这里$-\dfrac{b}{2a}=-m$，则有：

$$\begin{cases} m>1+\sqrt{2}\text{ 或 }m<1-\sqrt{2} \\ 0<m<4 \\ m<\dfrac{17}{6} \\ m>-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$