

中華民國三十三年五月十三日

教育部批准發行

漢 譯

舒塞斯三氏立體幾何學

新亞書店發行

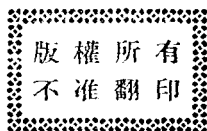
舒塞斯三氏立體幾何學

Schultze, Sevenoak & Schuyler:

Solid Geometry

江苏工业学院图书馆
英譯
藏書章

新亞書店印行



學何幾體立氏三塞舒譯漢

定價國幣一元四角

(外埠酌加寄費)

譯	述	者	吳	靜	山
發	行	者	陳	邦	楨
印	刷	者	新	亞	店
發	行	所	新	亞	書

上海河南路一五九號

中華民國三十六年二月五版

目次

第六編 空間之直線及平面—多面角

空間之直線及平面.....	1
二面角.....	19
多面角.....	30
習題.....	36
復習題.....	38

第七編 多面體, 柱及錐

多面體.....	40
棱柱及平行六面體.....	41
復習題.....	60
棱錐.....	61
正多面體.....	76
柱.....	78
錐.....	85
雜題.....	97
復習題.....	101

第八編 球

球.....	102
球面多邊形.....	113
極三角形.....	119
球面圖形之度量.....	127
球體積.....	138
復習題.....	144

附 錄

立體幾何學附錄.....	147
對數表.....	156
平方, 立方, 平方根, 及立方根表.....	158
有用之數值.....	158
立體幾何學之公式.....	159
中英名詞對照表.....	161

立體幾何學

第六編

空間之直線及平面—多面角

480. 定義 空間幾何學或立體幾何學討論原素不全在同一平面內之圖形。

481. 定義 平面爲一面，連結其上任意兩點之直線完全在此面上者。

若過數定點或數定直線，僅有一平面可作，則此平面稱爲由定點或直線所決定。

公設 A. 過不在一直線上三點之平面惟一。

公設 B. 若二平面有一點公共，則必有第二點公共。

482. 定義 若一直線與一平面，不論若何延長之決不相交者，則此直線與平面平行。

483. 定義 若二平面不論若何延長之決不相交者，則此二平面平行。

註 由上述任何原素決定之平面，在立體幾何學中，似有其具體方法作其圖形，實則惟有用模型作之爲可能耳。以直尺與圓規所作之圖，不過爲一種象徵，即所繪者僅爲所求圖形之略號，絕不能如平面幾何之能獲得所需要之圖形。

命題 I. 定理

484. 一平面由

(1) 一直線及線外之一點而決定.

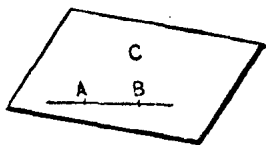
(2) 相交二直線而決定.

(3) 二平行直線而決定.

(1) 求證一平面由一直線 AB 及線外一點 C 而決定.

過直線上二點 A, B 及另一點 C , 僅能作一平面. (481, 公設 A)

直線 AB 在此平面內. (481)



(2) 求證相交二直線 AB 及 AC 決定一平面.

[學者自證之.]

(3) 求證二平行線 AB 及 CD 決定一平面.



由定義, 平行線 AB 及 CD 在一平面內.



因 AB 及一點 C 決定一平面, 故二平行線決定一平面.

485. 系 二平面之交界爲一直線.

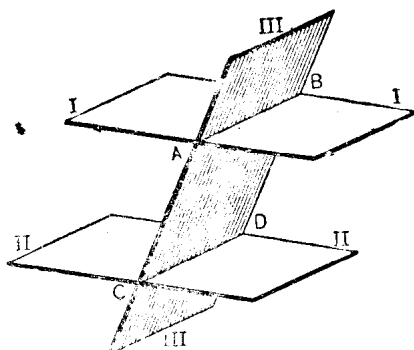
二平面之相交處不能含不在一直線上之三點, 因過此三點僅能作一平面. (481, 公設 B)

習題 1. 照相用之鏡箱與測量用之經緯儀, 爲何皆用三足支持之?

習題 2. 設有四點不在一平面內, 問可決定若干平面?

命題 II. 定理

486. 二平行平面與第三平面之交線互相平行。



已知 I 與 II 爲二平行之平面，與平面 III 相交，其交線各爲 AB 及 CD 。

求證

$$AB \parallel CD.$$

證 AB 與 CD 不能相交，因否則平面 I 與 II 必將相交。

AB 與 CD 在同一平面內。

故

$$AB \parallel CD.$$

487. 系 在平行平面間之平行線相等。

習題 1. 若一平面與二平行平面之一相交，亦必與其他一平面相交。

習題 2. 若一直線與二平行平面之一相交，亦必與其他一平面相交。

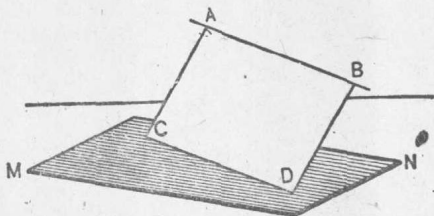
習題 3. 試在教室内指出數例說明命題 II.

習題 4. 在命題 II 之圖內，若 $AC \parallel BD$ ，證明 $AB = CD$ 。

註 學者應注意在立體幾何學中，欲證二直線平行，若僅證其延長之而不相交尙嫌未足，必須更證此二直線在同一平面方可。

命 題 III. 定 理

488. 含有二平行線之一之平面必與他一線平行。



已知 $AB \parallel CD$, 又平面 MN 僅含 CD .

求證 平面 $MN \parallel AB$.

證 AB 與 CD 決定之一平面, 交 MN 於 CD .

故, 若 AB 與 MN 相交, 則必交 MN 於 CD .

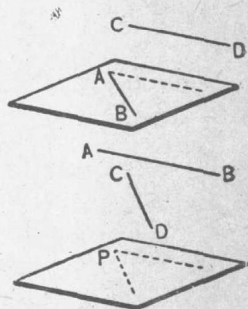
但, 因 $AB \parallel CD$, 此事爲不可能。

故 平面 $MN \parallel AB$.

489. 注意 應用命題 III, 吾人可作一平面使平行於已知直線 AB . 作圖之法, 其第一步每先作一平行於已知線 AB 之直線 CD , 然後通過 CD 作一平面。

490. 系 1. 過一已知之直線可作一平面使平行於任一其他已知直線; 若已知二直線不相平行, 則僅可作一平面。

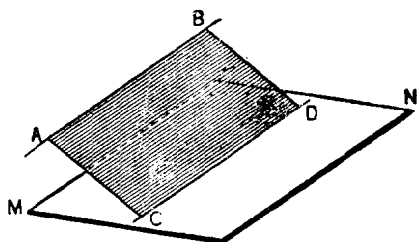
491. 系 2. 過一已知點可作一平面使平行於在空間之任二已知直線; 若已知二直線不相平行, 則僅可作一平面。



習題. 求作一平面平行於一已知之直線, 且通過二已知之點。

命題 IV. 定理

492. 平行於一平面之直線，必與此平面及通過此直線之任何平面之交線平行。



已知 AB 平行於平面 MN ，又含 AB 之平面 BC 交 MN 於 CD 。

求證

$$AB \parallel CD.$$

證 AB 與 CD 不能相交，否則 AB 即當與平面 MN 相交。

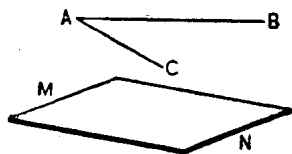
AB 與 CD 在同一平面內。

故

$$AB \parallel CD.$$

493. 系 1. 若相交二直線皆與已知之平面平行，則其平面必平行於已知之平面。

設 AB 與 AC 皆平行於 MN 。若平面 ABC 與 MN 相交，則其交線當平行於 AB ，又平行於 AC ，此為不可能之事。



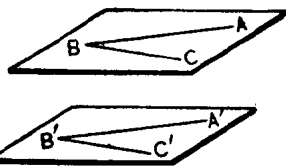
494. 系 2. 若二角之邊各自平行，則其平面亦必平行。

因 $AB \parallel A'B'$ ，平面 ABC 平行於 $A'B'$ ；

又同理，平面 ABC 平行於 $B'C'$ 。

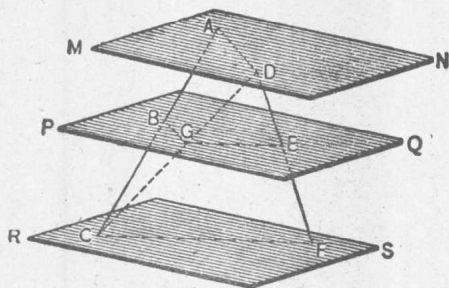
故平面 ABC 平行於平面 $A'B'C'$ 。

(系 1)



命 題 V. 定 理

495. 若二直線爲數平行之平面所截，則其相應之線段必成比例。



已知 MN, PQ 及 RS 爲三平行之平面，被二直線截之於 A, B, C 及 D, E, F 。

求證

$$AB : BC = DE : EF.$$

證 作 DC ，且通過 AC 及 DC 作一平面交平面 PQ 於 BG ，交平面 MN 於 AD 。

於是

$$AD \parallel BG. \quad (486)$$

通過 DC 及 DF 作一平面，同樣可得

$$GE \parallel CF.$$

故

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DG}{GC}, \quad \text{又} \quad \frac{DE}{EF} = \frac{DG}{GC}. \quad (\text{何故?})$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \quad (\text{公理 1})$$

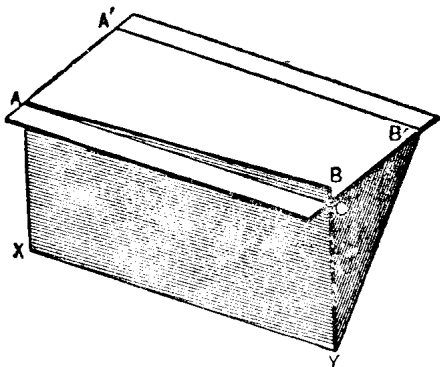
496. 系 若過任一點作數直線，爲二平行之平面所截，則其相應之線段必成比例。

習題 1. 若三平行平面在一截線上截得相等之線段，則在任何截線上亦必截成相等之線段。

習題 2. 在命題 V 之圖內，若 $BG=5$ ， $AD=15$ ， $DE=4$ ，求 EF 。

命題 VI. 定理

497. 若二直線皆與第三直線平行，則彼此亦互相平行。



已知

$$AB \parallel XY \text{ 又 } A'B' \parallel XY.$$

求證

$$AB \parallel A'B'.$$

證 通過 AB 及 XY 作平面 AY ，又通過 $A'B'$ 及一點 A 作平面 $B'A$ 。

設平面 AY 與 $B'A$ 相交於 AC 。

$$\text{平面 } B'A \parallel XY. \quad (488)$$

故

$$A \parallel XY. \quad (492)$$

但

$$AB \parallel XY. \quad (\text{假設})$$

故

$$AB \text{ 與 } AC \text{ 相重合}. \quad (\text{公理 } 16)$$

AB 與 $A'B'$ 在同一平面內。

但

$$AB \text{ 與 } A'B' \text{ 不能相交}. \quad (\text{公理 } 16)$$

故

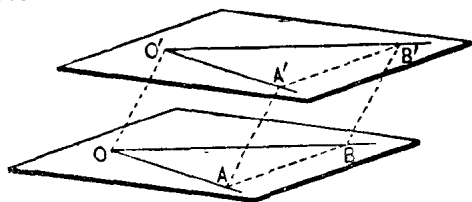
$$AB \parallel A'B'.$$

習題。若一直線 AB 平行於一平面 P ，且平行於另一直線 CD ，則平面 $P \parallel CD$ 。

〔提示〕 通過 AB 作一平面與平面 P 相交於 XY 。

命 題 VII. 定 理

498. 不在同一平面內之二角，若其二邊各自平行且方向相同，則此二角相等。



已知 二角 AOB 及 $A'O'B'$ 之二邊各自平行，且方向相同。

求證

$$\angle AOB = \angle A'O'B'.$$

證 取 $OA = O'A'$ ，又 $OB = O'B'$ 。

作

AA' ， BB' ， AB ，及 $A'B'$ 。

AO' 爲一平行四邊形。

(何故?)

BO' 爲一平行四邊形。

(何故?)

故

AA' 等於且平行於 OO' ，

又

BB' 等於且平行於 OO' 。

故

AA' 等於且平行於 BB' 。

(公理 1) (497)

因而

$AA'BB'$ 爲一平行四邊形，

又

$$AB = A'B'.$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle A'O'B'.$$

(何故?)

$$\therefore \angle O = \angle O'.$$

499. 定義 一直線與一平面之交點，稱爲直線之足。

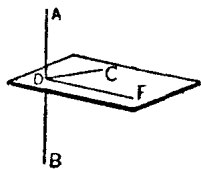
500. 定義 一直線立於一平面上，若在此面上通過其足之任何直線皆與此直線垂直，則稱此直線垂直於平面。

501. 定義 一直線垂直於一平面，則稱此平面垂直於一直線。

503. 系 通過一點作一平面使垂直於一直線。

I. 已知直線 AB 及在 AB 上之一點 D . 通過 AB 作二平面. 在此二平面(圖內未畫出)內作 $DC \perp AB$ 及 $DF \perp AB$.

則平面 CDF 即為所求之平面。



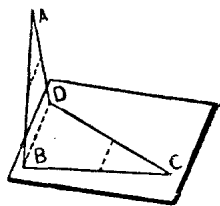
II. 已知直線 AB 及線外之一點 C . 作 $CD \perp AB$. 通過 AB 作一平面, 但不含點 C . 在此平面內作 $DF \perp AB$. 則 CDF 即為所求之平面。

習題 1. 在命題 VIII 之圖內, 若 $AD=5$, $AB=4$, $BC=5$, $\angle CBD=120^\circ$, 又 AB 垂直於平面 MN , 求 CD 之長。

習題 2 若 $ABCD$ 為一空間之四邊形(即 A, B, C , 及 D 不在同一平面內), 又 $AB=BC$, $CD=DA$, 則平面角 A 等於平面角 C 。

習題 3. 連接一空間四邊形兩鄰邊中點之直線必等於其他二邊中點之連結線, 且與之平行。

習題 4. 不在同一平面內之二角, 若其二邊各自平行, 而方向相反, 則此二角相等。



習題 5. 若二角之邊各自平行, 問在何種條件下二角互為補角?

習題 6. 通過二點作一平面, 問在何種條件下此平面得垂直於已知之直線?

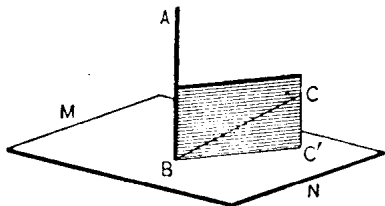
習題 7. 通過 5 點可作若干平面, 五點中無有 4 點在一平面內者?

習題 8. 包圍一定部分之空間, 最少須若干平面? 何故?

習題 9. 求證 (a) 若四邊形之二對角線相交, (b) 若有二邊平行, (c) 若其二對邊相交: 則此四邊形決定一平面。

命題 IX. 定理

504. 過直線上一定點，而垂直於此直線之一切垂線，悉在通過此點而垂直於此直線之平面內。



已知 $AB \perp BC$ ，又 $AB \perp$ 平面 MN 於 B 。

求證 B' 在平面 MN 內。

證 通過 AB 及 B' 作一平面，令其與 MN 相交於 B'' 。

$$AB \perp B'''. \quad (500)$$

$$AB \perp BC. \quad (\text{假設})$$

$$\text{故 } BC \text{ 與 } BC' \text{ 相疊合，} \quad (47)$$

即 BC' 在平面 MN 之內。

505. 系 1. 過直線上之一定點，僅能作一平面垂直於此直線。

506. 系 2. 過直線外一點僅能作一平面垂直於此直線。

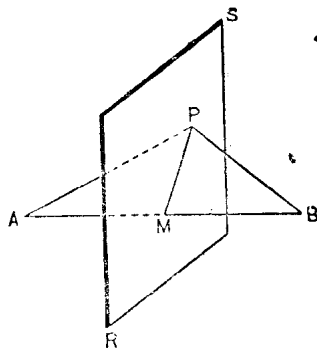
習題 1. 一直角以其一邊為軸而迴轉之，問他一邊轉成何種之面？

習題 2. 三直線互相垂直。求證不能有第四直線垂直於此已知之三直線。

習題 3. 求證作一直線垂直於有一公共點之二平面為不可能。

命 題 X. 定 理

507. 在垂直且平分一直線之平面上各點，與直線之兩端等距離。



已知 RS 為垂直於直線 AB 中點 M 之平面， P 為其內之一點。

求證 點 P 與 A 及 B 等距離；即

$$PA = PB.$$

證 PM 為 AB 之中垂線。

(何故?)

$$PA = PB$$

(何故?)

508. 系 1. 與一直線兩端等距離之點必在已知直線之垂直平分平面內。

[提示] 用上圖，通過 P 作一平面垂直於直線 AB ，證明平面 RS 將平分 AB ，結果平面 RS 為直線 AB 之垂直平分面。

509. 系 2. 與一直線兩端等距離之點之軌跡為垂直於此直線中點之平面。