九州名导

特级教师精讲通练

高二数学 上

难点重点 课课精讲

考纲考点 章节通练

北京师大附中

湖南师大附中

陕西师大附中

东北师大附中

华东师大附中

华中师大附中

南京师大附中

广西师大附中

总主编　刘　强（美澳国际学校校长）

全国八所重点中学特级教师联合编写

北京教育出版社

特级教师

精讲通练

高二数学 上

难点重点 课课精讲

考纲考点 章节通练

本册主编／张子通 王 跃

编 者／阚超明 查仲波

北京教育出版社

特级教师精讲通练

高二数学(上)

张子通　王　跃　主编

*

北京教育出版社出版

(北京北三环中路6号)

邮政编码:100011

北京出版社出版集团总发行

全 国 各 地 书 店 经 销

衡水华兴印刷有限责任公司印刷

*

880×1230毫米　32开本　9.125印张　180000字

2004年6月第1版　2004年6月第1次印刷

ISBN 7-5303-1830-6

G·1804　定价:11.50元

如发现印、装质量问题,影响阅读,请与我们联系调换

地址:北京市西三环北路27号北科大厦北楼四层　电话:010-68434992

北京美澳学苑教育考试研究中心　邮编:100089　网址:www.jzyh.cn

本书的使用说明

丛书特点：

1. 实用性。直指中学教材改革、教学指导思想的转变和中（高）考考试的核心与本质，不枝不蔓，精粹实用。
2. 科学性。各学科内容在编写时作了客观上的优化（去除陈旧，吸纳新思想、新信息）和微观上的设计（鼓励细节编写的创新）
3. 层次性。紧紧围绕重点（基础）→难点→考点→综合→训练→创新这样一种逐级提升的理念设计。

梳理重点

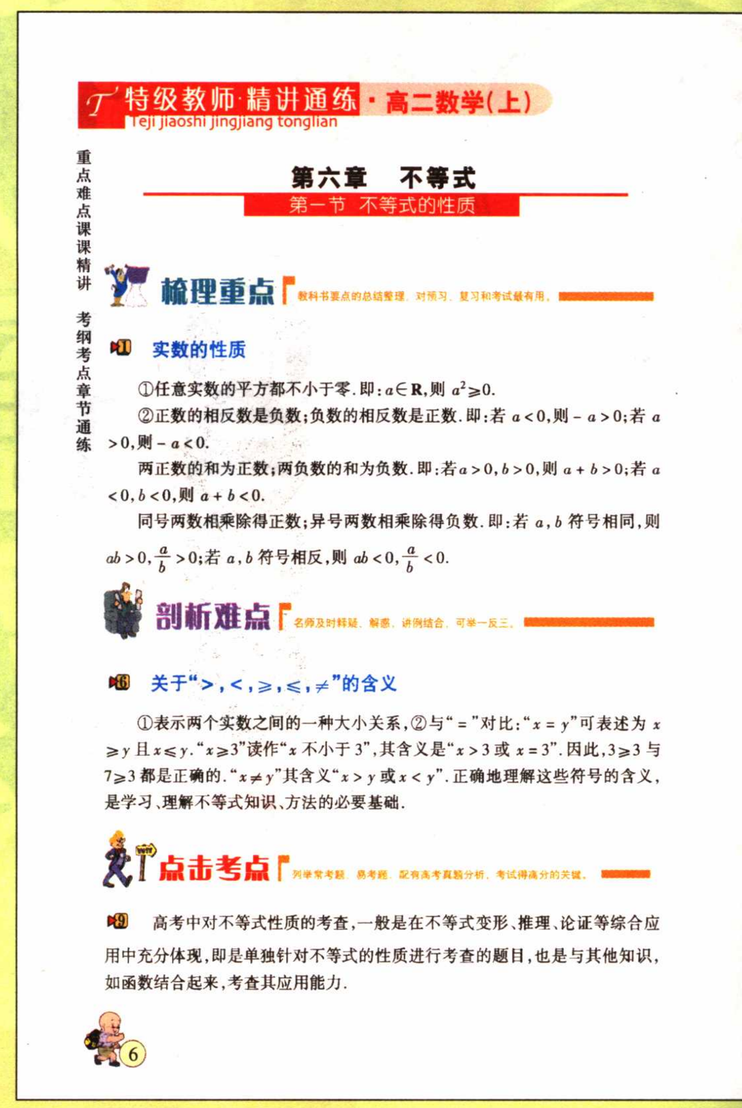
细致梳理基础知识，以及知识点之间的联系，使之系统化、条理化，脉络清晰，辅以精当例题，使学生易于掌握，从而达到融会贯通。

剖析难点

对疑难知识点进行专门解剖和分析，化繁为简，化难为易。难点往往也是重点，突破难点是考试取得高分的关键。

点击考点

站在高（中）考的高度，全面注入考试信息，筛选出本课（节）内容的常考知识点，将考点、考题（含模拟题、能力题、创新题、开放题等）全方位展现给学生，点悟迷津。



特级教师精讲通练

学科综合

紧密结合生产、生活实际和科技发展，大量选用鲜活生动的新话题、新材料，注重创新，提升"综合意识"，加强知识的纵横联系、学科内和跨学科的"综合"思想。

小试牛刀－练·基础

针对本节(课)知识所设计的随堂巩固练习，题目难度低，注重基础性、随堂性、针对性，是巩固新知识、夯实基础的必经之路。

登高望远－测·能力

针对本课(节)重难点所设计的综合性训练题，题目难度中等偏上，注重提高性、阶段性、综合性，是深入理解教材内容，提升知识运用能力的关键。

答案详解

答案详细、规范，注重解题思路、规律、技巧的总结和点拨。鼓励一题多讲，化难为易。

我们永远坚信名师出高徒

学科综合　注意学科内综合及跨学科综合，培养学生的综合能力

学科内综合

不等式性质常与函数、数列等结合，在解决问题的应用中考查应用能力，因此，对不等式的性质的理解、掌握要系统、准确、熟练.只有达到熟练应用的程度，才能充分发挥不等式性质的作用.

小试牛刀－练·双基　基本题型，及时消化课堂学习内容，提高学习水平。

3. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$，下列命题：①$a<b<0\Rightarrow a^2<b^2$；②$\frac{a}{b}<c\Rightarrow a<bc$；③$ac^2>bc^2\Rightarrow a>b$；④$a<b<0\Rightarrow\frac{b}{a}<1$.正确命题的个数是(　　)

A.0个　　B.1个　　C.2个　　D.3个

登高望远－测·能力　综合题型，总结所学内容，提高综合实力及应试能力。

1. "$a>b$"是"$a\log_m n>b\log_m n(0<m<n\leqslant 1)$成立的(　　)条件.

A. 充分非必要　　B. 必要非充分

C. 充要　　D. 既不充分也不必要

2. 已知 $0<x<y<a<1$，则有(　　)

A. $\log_a(xy)<0$　　B. $0<\log_a(xy)<1$

C. $1<\log_a(xy)<2$　　D. $\log_a(xy)>2$

答案详解　注重解题思路、规律、技巧的总结和点拨。

【小试牛刀—练·双基】

3. C　对于命题①：令 $a=-3,b=-2,-3<-2$ 但 $(-3)^2>(-2)^2$

$\therefore$ 命题①不正确.对于命题②：$b<0$ 时，由 $\frac{a}{b}<c$ 得 $a>bc$.故命题②不正确.对于命题③，由 $ac^2>bc^2$ 得 $c^2>0$.否则若 $c^2=0$ 则有 $ac^2=bc^2$ 与 $ac^2>bc^2$ 矛盾 $\therefore$ 由 $ac^2>bc^2\Rightarrow a>b$ 正确.对于命题④ $\because a<b<0.\therefore\frac{b}{a}<1.\therefore$ 命题④正确.综上可知：命题③、④正确.

最新同步助学读物

《北京名师导学》

◎北大附中 ◎人大附中 ◎清华附中 ◎北师大附中

特级高级教师联合编写

- 基本目标要求
- 典型例题分析
- 双基知识导学
- 双基能力训练
- 疑难问题解析
- 习题详细解答

《特级教师精讲通练》

全国八所重点中学特级教师联合编写

重点难点　课课精讲

考纲考点　章节通练

真情讲练　轻巧夺冠

《1+1轻巧夺冠》

全国著名特高级教师联合编写

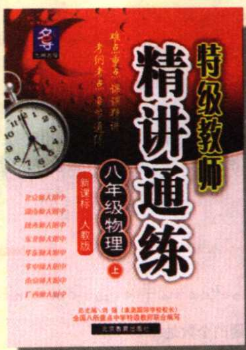
同步讲解 & 优化训练

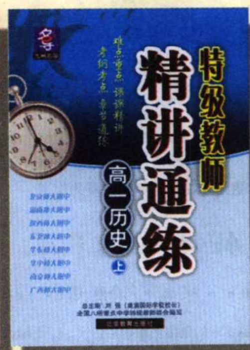
双栏排版，讲例对照。

三层解读，破解秘诀。

有讲有练，方便实用。

名师荟萃，科学权威。





三套书功能各异，特色鲜明，相互映衬，把同步学习的阶段性和系统性有效结合起来，把学科基础要求与中考、高考热点渗透结合起来，实实在在解决了同步课堂教学和中考、高考的要求相一致的问题。注重基础，强化创新，培养能力。

为提高我中心图书质量，欢迎全国各地优秀初高中老师参与我中心图书编写与修订工作。

邮购《名师导学》、《精讲通练》、《轻巧夺冠》系列图书的办法详见书后表格。

走进名导世界　九州名导　感受名师关爱

目 录

第六章 不等式 …… 1
第一节 不等式的性质 …… 1
第二节 算术平均数与几何平均数 …… 13
第三节 不等式的证明 …… 23
第四节 不等式的解法举例 …… 36
第五节 含有绝对值的不等式 …… 50
第六章综合能力检测 …… 65
第七章 直线和圆的方程 …… 67
第一节 直线的倾斜角和斜率 …… 67
第二节 直线的方程 …… 74
第三节 两条直线的位置关系 …… 84
第四～五节 简单的线性规划 线性规划的实际应用 …… 97
第一学期期中测试题 …… 109
第六节 曲线和方程 …… 112
第七节 圆的方程 …… 121
第七章综合能力检测 …… 136
第八章 圆锥曲线 …… 138
第一节 椭圆及其标准方程 …… 138
第二节 椭圆的简单几何性质 …… 147
第三节 双曲线及其标准方程 …… 158
第四节 双曲线的简单几何性质 …… 169
第五节 抛物线及其标准方程 …… 179
第六节 抛物线的简单几何性质 …… 190
第八章综合能力检测 …… 201
第一学期期末测试题 …… 203
参考答案 …… 206

第六章 不等式

第一节 不等式的性质

梳理重点 教科书要点的总结整理，对预习、复习和考试都有用。

1 实数的性质

①任意实数的平方都不小于零.即：$a\in\mathbf{R}$，则 $a^2\geqslant0$.

②正数的相反数是负数；负数的相反数是正数.即：若 $a<0$，则 $-a>0$；若 $a>0$，则 $-a<0$.

两正数的和为正数；两负数的和为负数.即：若 $a>0$，$b>0$，则 $a+b>0$；若 $a<0$，$b<0$，则 $a+b<0$.

同号两数相乘除得正数；异号两数相乘除得负数.即：若 a，b 符号相同，则 $ab>0$，$\frac{a}{b}>0$；若 a，b 符号相反，则 $ab<0$，$\frac{a}{b}<0$.

③任意两个实数都可比较大小，其依据是实数的性质：

$a>b\Leftrightarrow a-b>0$；$a=b\Leftrightarrow a-b=0$；$a<b\Leftrightarrow a-b<0$.

据此可知：欲比较两个实数(式)的大小，可归结转化为判断这两个实数的差的符号，这种方法称为作差比较法.其步骤：①作差，②对差变形，③判断差的符号，从而确定两个实数的大小.

2 同向不等式和异向不等式

①同向不等式：在两个不等式中，如果每一个左边都大于(或小于)右边，这两个不等式就是同向不等式.如：$x^2+2>3x+1$ 和 $3x+y>2$；$3x+1<x^2+2$ 和 $a^2-3<2a$是同向不等式.

②异向不等式：在两个不等式中，如果一个不等式的左边大于(或小于)右边，而另一个不等式的左边小于(或大于)右边，那么这两个不等式就是异向不等式.如：$3x+y>2$ 与 $3x+1<x^2+2$.

3 不等式的性质

定理1：如果 $a>b$，那么 $b<a$；如果 $b<a$，那么 $a>b$.即：$a>b\Leftrightarrow b<a$.

阐释：①该定理称为不等式的对称性，类似于等式，$a=b\Leftrightarrow b=a$；

②充分理解该定理的作用和意义.据此定理,可将不等式据需要改写为原不等式等价的异向不等式.如 $a>b$ 可改写成 $b<a$;$b<a$ 可改写成 $a>b$.其作用在后面的不等式的性质中会有充分的体现.

③此定理初学者往往认为显然成立而不需证明,从而认为证明多此一举,不去理解、研究.实际上此定理必须依据实数的性质予以论证,学习者在理解、研究的过程中深刻体会数学的严谨性,培养自己论之有据的严密的数学思维习惯和逻辑推理、论证能力.

证明:$\because a>b \quad \therefore a-b>0 \quad \therefore -(a-b)<0$(正数的相反数是负数).即 $b-a<0 \quad \therefore b<a$.反之,$\because b<a \quad \therefore b-a<0 \quad \therefore -(b-a)>0$(负数的相反数是正数)即 $a-b>0 \quad \therefore a>b$.

定理 2:如果 $a>b,b>c$,那么 $a>c$(不等式的传递性).

可仿照定理 1 的证明过程,据实数的性质完成其证明,充分体验数学的严密性,感悟其证明的思想和方法.

阐释:①与等式性质:若 $a=b,b=c$,则 $a=c$ 相类似.

②若 $a\geqslant b,b\geqslant c$,则 $a\geqslant c$;若 $a\geqslant b,b>c$,则 $a>c$.亦成立.

③据定理 1,定理 2 可改写为:若 $c<b,b<a$,则 $c<a$.(定理 1 作用的具体体现).

定理 3:如果 $a>b$,那么 $a+c>b+c$.该定理文字叙述为:不等式的两边都加上同一个实数,所得不等式与原不等式同向.

证明:(作差比较法)$\because a>b \quad \therefore a-b>0 \quad \therefore (a+c)-(b+c)=a-b>0$,从而 $a+c>b+c$.

阐释:①与等式性质:若 $a=b$,则 $a+c=b+c$ 相类似.

②若 $a\geqslant b$,则 $a+c\geqslant b+c$ 亦成立.

③据定理 1,改写为:若 $b<a$,则 $b+c<a+c$.

推论 1:如果 $a+c>b$,那么 $a>b-c,c>b-a,a+c-b>0$.该推论可用文字叙述为:不等式中的任何一项改变符号后,可以把它从一边移到另一边,此推论是不等式移项的依据,亦可以称为不等式的移项法则.

证明:(紧扣定理 3)$\because a+c>b \quad \therefore (a+c)+(-c)>b+(-c)$

$\therefore a>b-c$.

阐释:①与等式移项法则:若 $a+c=b$,则 $a=b-c$ 相类似.

②若 $a+c\geqslant b$,则 $a\geqslant b-c$ 亦成立.

③据定理 1,此推论可改写成:若 $b<a+c$,则 $b-c<a$.

推论 2:若 $a>b,c>d$,则 $a+c>b+d$.该推论文字叙述为:两个同向不等式两边分别相加,所得不等式与原不等式同向.

证明:(紧扣定理3)$\because a>b$,$\therefore a+c>b+c$,①又 $c>d$,$\therefore b+c>b+d$,②由①、②可得:$a+c>b+d$.

阐释:①该推论可推广到有限个同向不等式两边分别相加.即:两个或更多个同向不等式两边分别相加,所得不等式与原不等式同向,可表示为:若 $a_1>b_1,a_2>b_2,\cdots,a_n>b_n$,则$a_1+a_2+\cdots+a_n>b_1+b_2+\cdots+b_n$.

②若 $a_1\geqslant b_1,a_2\geqslant b_2,\cdots,a_n\geqslant b_n$,则 $a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant b_1+b_2+\cdots+b_n$(当且仅当 $a_1=b_1,a_2=b_2,\cdots,a_n=b_n$ 同时成立时,等号成立).

③与等式性质:若 $a_1=b_1,a_2=b_2,\cdots,a_n=b_n$,则 $a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$比较.由于等式没有同向、异向之分,而不等式却有同向、异向之别,所以二者相较,必须强调指出:不等式必须是同向不等式两边才可相加,此为该推论成立的前提条件,忽视这一条件,是不少同学易出错的地方,须引起高度重视.如$5>3,4<15$推出$5+4>3+15$的错误根源在于$5>3$和$4<15$是异向不等式.

④据定理1,该推论可改写为:若 $b<a,d<c$,则 $b+d<a+c$.因此,该推论可概括为:"同向不等式可相加".可理解为:"大加大更大,小加小更小".

定理4:如果 $a>b,c>0$,则 $ac>bc$;如果 $a>b,c<0$,那么 $ac<bc$.该定理文字叙述为:不等式两边同乘一个正数,所得不等式与原不等式同向;不等式两边同乘一个负数,所得不等式与原不等式异向.

证明:(作差法)$ac-bc=(a-b)c$　$\because a>b$　$\therefore a-b>0$.据同号相乘得正,异号相乘得负.$\therefore$当 $c>0$时,$(a-b)\cdot c>0$,从而 $ac>bc$;当 $c<0$时,$(a-b)\cdot c<0$,从而 $ac<bc$.

阐释:①与等式性质:若 $a=b,c\in\mathbf{R}$,则 $ac=bc$ 相比较.存在重要的差别:欲在不等式 $a>b$ 两边同乘以一个实数c,必须确定 c 的符号,如不能确定 c 的符号,需分 $c>0,c<0,c=0$讨论.特别地,当 $c=0$时,由 $a>b,c=0\Rightarrow ac=bc=0$.该定理虽然在初中阶段已学习,但此处仍是易出错而且反复出错的地方.

②若 $a\geqslant b,c>0$,则 $ac\geqslant bc$,若 $a\geqslant b,c<0$,则 $ac\leqslant bc$ 亦成立.

③据定理1,该定理可改写为:若 $b<a,c>0$,则 $bc<ac$;若 $b<a,c<0$,则 $bc>ac$.

推论1:若 $a>b>0,c>d>0$,则 $ac>bd$.该推论文字叙述为:两个两边皆为正数的同向不等式两边分别相乘,所得不等式与原不等式同向.

证明:(紧扣定理4)$\because a>b,c>0$,$\therefore ac>bc$.①　又 $c>d,b>0$　$\therefore bc>bd$　②　由①、②得:$ac>bd$.

阐释:①该推论可推广为任意有限个两边皆是正数的同向不等式两边分别相乘.即两个或更多个两边皆为正数的同向不等式两边分别相乘,所得不等式与原不等式同向.可表示为:若 $a_1>b_1>0,a_2>b_2>0,\cdots,a_n>b_n>0(n\in\mathbf{N}_+)$,

则 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n>b_1\cdot b_2\cdot\cdots\cdot b_n$.

②若 $a_1\geqslant b_1>0,a_2\geqslant b_2>0,\cdots,a_n\geqslant b_n>0$,则 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n\geqslant b_1\cdot b_2\cdot\cdots\cdot b_n$（当且仅当 $a_1=b_2,a_2=b_2,\cdots,a_n=b_n$ 同时成立时,取等号）

③与等式性质:若 $a_1=b_1,a_2=b_2,\cdots,a_n=b_n$,则 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n=b_1\cdot b_2\cdot\cdots\cdot b_n$.不等式两边相乘的前提条件是:①同向不等式,②每个不等式两边皆正.忽视这一前提条件,亦是不等式变形过程中极易出现的错误.如:①$3>2,5<9$,则 $3\times5>2\times9$,其错误的根源在于 $3>2,5<9$ 是异向不等式.②$3>2,-4>-5$,则 $3\times(-4)>2\times(-5)$,其错误的根源在于 $-4>-5$ 不满足两边皆正.

④该推论据定理 1 可改写:成若 $0<b<a,0<d<c$,则 $bd<ac$.因此,该推论可概括为:"两边皆正的同向不等可相乘".

推论 2:(将推论 1 特殊化):若 $a>b>0$,则 $a^n>b^n(n>1,n\in\mathbf{N})$.该推论可文字叙述为:两边皆正的不等式两边分别乘方,所得不等式与原不等式同向.

阐释:①与等式性质:若 $a=b$,则 $a^n=b^n(n>1,n\in\mathbf{N})$比较,不等式两边乘方的前提是:两边皆正且 $n>1,n\in\mathbf{N}_+$,忽视这一前提条件亦是不等式性质应用中的常见错误.如:若 $3>-9$,则 $3^2>(-9)^2$;若 $-2>-8$,则$(-2)^4>(-8)^4$.错误之源在于不满足不等式两边皆正的条件;又若 $6>5$,则 $6^{-2}>5^{-2}$错误之源在于幂指数 $-2<0$,不满足 $n>1,n\in\mathbf{N}_+$.

②若 $a\geqslant b\geqslant0$,则 $a^n\geqslant b^n(n>1,n\in\mathbf{N}_+)$.

③据定理 1 可改写:若 $0<b<a$,则 $b^n<a^n(n>1,n\in\mathbf{N}_+)$.该推论可概括为:"两边皆正的不等式可乘方".

定理 5:如果 $a>b>0$,那么$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n>1,n\in\mathbf{N}_+)$,该定理可文字叙述为:两边皆正的不等式两边同时开方,所得不等式与原不等式同向.

证明:(反证法)假设$\sqrt[n]{a}$不大于$\sqrt[n]{b}$,则$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$,①或$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$.②

$\because a>0,b>0\quad 0<\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}\ \therefore(\sqrt[n]{a})^n<(\sqrt[n]{b})^n\quad\therefore a<b$ 与 $a>b$ 矛盾.又$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}\quad\therefore(\sqrt[n]{a})^n=(\sqrt[n]{b})^n\quad\therefore a=b$ 与 $a>b$ 矛盾.$\therefore$假设不成立,故而$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

评注:该定理的证明运用了反证法,亦是反证法证明不等式的第一个实例,要注意领悟和掌握.由于$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$的否定有两种情况:$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$及$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$.要对两种情形全部否定,才完成"归谬",从而论证定理.

阐释:①若 $a\geqslant b\geqslant0$,则$\sqrt[n]{a}\geqslant\sqrt[n]{b}(n>1,n\in\mathbf{N}_+)$.

②与等式性质:对于一切 $n>1,n\in\mathbf{N}_+$,若 $a=b\geqslant0$,则$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$相类似之处.

③据定理 1 可改写成:若 $0<b<a$,则$\sqrt[n]{b}<\sqrt[n]{a}(n>1,n\in\mathbf{N}_+)$.

4 知识体系的完善

据前面的梳理,关于不等式的性质构建了:对称性、传递性、加、乘、乘方、开

方等性质,但对于不等式相减、相除的性质,需进一步完善.

①若 $a>b,c>d$,则 $a-d<b-c$

证明:$\because c>d,\therefore -d>-c$ 又 $a>b$ $\therefore a+(-d)>b+(-c)$

即 $a-d>b-c$.

评注:从证明过程来看,不等式相减可转化成不等式相加进行.

②若 $ab>0$ 且 $a>b$,则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$(不等式的倒数法则)

证明:$\because ab>0$ $\therefore \frac{1}{ab}>0$ 又 $a>b$ $\therefore \frac{1}{ab}\cdot a>\frac{1}{ab}\cdot b$ $\therefore \frac{1}{b}>\frac{1}{a}$即$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

评注:①此不等式结论非常有用,应记住,此性质可概括为:"不等式两边同号,取倒数,所得不等式与原不等式异向".②与若 $a=b\neq0$,则$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$的条件不同,a,b 必须同号.③若 $a>0>b$ 则$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$,显然成立.

③若 $a>b>0,0<d<c$,则$\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$

证明:$\because c>d>0,\therefore 0<\frac{1}{c}<\frac{1}{d}$ 即$\frac{1}{d}>\frac{1}{c}>0$,又 $a>b>0$,

$\therefore \frac{1}{d}\cdot a>\frac{1}{c}\cdot b$ 即:$\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$.

评注:①从证明过程来看,不等式相除可借助不等式的倒数法则,转化成不等式的乘法进行.②必须注意前提条件.

5 学法点拨

①不等式性质的系统掌握可借鉴如下线索:对称性、传递性、加、减、乘、除、乘方、开方(运算级别的升级顺序),予以条理化、系统化.②在理解、掌握、应用不等式的性质时,需与相应的等式的性质相比较,重视并弄清不等式性质成立的前提条件,清除等式性质的负面影响,防止不等式性质应用过程中的错误.③对以后不等式的变形,推理论证,必须严格遵循不等式的性质,切忌想当然而导致错误.

例 1 若 $a,b\in\mathbf{R}$,下列命题中:①若 $a>b$,则$a^2>b^2$;②若$|a|>b$,则$a^2>b^2$;③若 $a>|b|$,则$a^2>b^2$;④若 $a^2>b^2$,则 $a>b$;⑤若$|a|\neq b$,则 $a^2\neq b^2$;⑥若 $ac^2>bc^2$,则 $a>b$;⑦若$\frac{1}{a}>1$,则 $a<1$.其中正确的命题是________.

点拨→ ①错误命题.如:令 $a=-3,b=-4,-3>-4\nRightarrow(-3)^2>(-4)^2$.根

源在于缺少不等式平方的前提条件：$a>b>0$.②赋值检验，错误命题.如令 $a=-2,b=-4,|-2|>-4 \nRightarrow (-2)^2>(-4)^2$.③正确.$\because a>|b|\geqslant 0 \quad \therefore a^2>|b|^2$ 即 $a^2>b^2$.满足了不等式两边乘方的前提条件.④错误命题.如：$a=-4,b=1$ 时，$a^2>b^2$ 但此时 $a<b$.⑤错误命题.如：$a=2,b=-2,|a|\neq b$，但 $a^2=b^2=4$.⑥正确.$\because c^2\geqslant 0$，又 $ac^2>bc^2 \quad \therefore c^2>0$（否则 $c^2=0$ 时，$ac^2=bc^2=0$，与 $ac^2>bc^2$ 矛盾）$\because ac^2>bc^2 \quad \therefore \frac{1}{c^2}\cdot ac^2>bc^2\cdot\frac{1}{c^2}$，从而 $a>b$.⑦正确.$\because \frac{1}{a}>1>0 \quad \therefore a<1$（利用不等式两边取倒数）.

评注：一般地，判断一个命题是假命题，只要举一反例即可；而判断、说明一个命题是真命题，则必须进行严格的逻辑论证.

例2 （1）已知：$a,b,c\in\mathbf{R}$ 且满足：$b+c=6-4a+3a^2$；①$c-b=4-4a+a^2$.②试确定 a,b,c 之间的大小.

（2）试比较 16^{18} 与 18^{16} 的大小.

点拨→ （1）由②：$c-b=a^2-4a+4=(a-2)^2\geqslant 0 \quad \therefore c\geqslant b$.又由①－②得：$2b=2a^2+2 \quad \therefore b=a^2+1. \therefore b-a=(a^2+1)-a=(a-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$.从而 $b>a$.因此 $c\geqslant b>a$.

评注：此题实际上是两次运用了作差比较法，其中每次均用配方法对差变形而确定其符号，可见配方法在此法中的重要性，应注意领悟、掌握、应用.

（2）此题宜用作商比较法.作商比较法的理论依据是："若 $\frac{a}{b}>1,b>0$，则 $a>b$；若 $\frac{a}{b}>1,b<0$，则 $a<b$."其步骤：①对所比较的两数（或式）作商；②对商变形，变形的目标是判断商与1的大小；③作结论（其中对 $b>0,b<0$ 的判断亦是必不可少的）.

$\because \frac{16^{18}}{18^{16}}=\frac{(2^4)^{18}}{(2\times 3^2)^{16}}=\frac{2^{72}}{2^{16}\cdot 3^{32}}=\frac{2^{56}}{3^{32}}=(\frac{2^7}{3^4})^8=(\frac{128}{81})^8>1$，又 $18^{16}>0 \quad \therefore 16^{18}>18^{16}$.

例3 已知：$a>b>0,c<d<0,e<0$.求证：$\sqrt{\frac{e}{c-a}}<\sqrt{\frac{e}{d-b}}$.

点拨→ $\because a>b>0 \quad \therefore -a<-b<0$，又 $c<d<0 \quad \therefore -a+c<-b+d<0$.从而 $c-a<d-b<0 \quad \therefore \frac{1}{d-b}<\frac{1}{c-a}<0$，又 $e<0 \quad \therefore \frac{e}{d-b}>\frac{e}{c-a}>0$.因此 $\sqrt{\frac{e}{d-b}}>\sqrt{\frac{e}{c-a}}$ 即 $\sqrt{\frac{e}{c-a}}<\sqrt{\frac{e}{d-b}}$.

评注：从这里的证明过程可看出：根据条件，反复使用不等式的性质定理，因此不等式性质熟练地运用是此题证明的关键；同时，在应用性质定理时，须密

切注意是否满足性质定理的前提条件.

剖析难点

名师及时释疑，解惑，讲例结合，可举一反三。

6 关于“$>$，$<$，$\geqslant$，$\leqslant$，$\neq$”的含义

①表示两个实数之间的一种大小关系，②与“$=$”对比：“$x=y$”可表述为 $x\geqslant y$ 且 $x\leqslant y$.“$x\geqslant 3$”读作“x 不小于 3”，其含义是“$x>3$ 或 $x=3$”. 因此，$3\geqslant 3$ 与 $7\geqslant 3$ 都是正确的.“$x\neq y$”其含义“$x>y$ 或 $x<y$”. 正确地理解这些符号的含义，是学习、理解不等式知识、方法的必要基础.

7 比较法在应用过程中的难点是对差式或商式适当地变形及确定差的符号或商与 1 的大小，必要时需对字母分类讨论.

例 4 (1)设 $a>0,b>0$ 且 $a\neq b,n\in \mathbf{N}_+$. 试比较 $(a+b)(a^n+b^n)$ 与 $2(a^{n+1}+b^{n+1})$ 的大小.

(2)设 $a,b\in\mathbf{R}^+$，试比较 a^ab^b 与 $a^b\cdot b^a$ 的大小.

点拨→ (1)作差：设 $P=(a+b)(a^n+b^n)-2(a^{n+1}+b^{n+1})$. 变形：$P=ab^n+a^nb-a^{n+1}-b^{n-1}=a(b^n-a^n)+b(a^n-b^n)=(b^n-a^n)(a-b)$. 确定其符号，需讨论：当 $a>b>0$ 时，$a^n>b^n\ \therefore b^n-a^n<0$，又 $a-b>0\ \therefore P<0$. 当 $b>a>0$ 时，$b^n>a^n\quad\therefore b^n-a^n>0$，又 $a-b<0\ \therefore P<0$. 综上所述，若 $a>0,b>0,a\neq b$. $P<0$ 从而可知：$(a+b)(a^n+b^n)<2(a^{n+1}+b^{n+1})$.

评注：作差后对差式变形的常用方法有：配方法，因式分解，通分(对分式)等.

(2)作商：$\dfrac{a^ab^b}{a^b\cdot b^a}=a^{a-b}\cdot b^{b-a}=(\dfrac{a}{b})^{a-b}$ 作商后的变形是确定商与 1 大小的基础和关键. 当 $a>b>0$ 时，$\dfrac{a}{b}>1$，又 $a-b>0$，据指数函数 $y=a^x(a>1)$ 的单调性知：$(\dfrac{a}{b})^{a-b}>(\dfrac{a}{b})^0=1$；当 $b>a>0$ 时，$0<\dfrac{a}{b}<1$，又 $a-b<0$. 据指数函数 $y=a^x(0<a<1)$ 的单调性知：$(\dfrac{a}{b})^{a-b}>(\dfrac{a}{b})^0=1$；当 $a=b>0$ 时，$\dfrac{a}{b}=1$. $\therefore (\dfrac{a}{b})^{a-b}=1$. 综上讨论可知：当 $a,b\in\mathbf{R}^+$ 时，$(\dfrac{a}{b})^{a-b}\geqslant 1\quad\therefore a^ab^b\geqslant a^b\cdot b^a$(当且仅当 $a=b$ 时，等号成立).

评注：分类讨论是数学中的重要思想方法，分类讨论时一般：①研究、确定分类的原则及分类的标准，弄清讨论的对象；②按照统一的分类标准进行恰当

地分类，做到不重复、不遗漏；③分类讨论后要将讨论的情况综合总结；④尽量简化讨论的过程，力争避免分类讨论.

8 实数大小的比较可借助函数的单调性

例5 设 $a>b>0, m>0, n>0$. 试比较 $\frac{b}{a}, \frac{a}{b}, \frac{b+m}{a+m}, \frac{a+n}{b+n}$ 的大小.

点拨→ 由 $a>b>0$，知 $\frac{a}{b}>1, 0<\frac{b}{a}<1$. 又 $m>0, n>0 \therefore a+m>b+m$，$a+n>b+n$，$\therefore \frac{a+n}{b+n}>1, 0<\frac{b+m}{a+m}<1$. 因此，将四个分式的值分类：$\frac{a}{b}>1$，$\frac{a+n}{b+n}>1$；$0<\frac{b}{a}<1, 0<\frac{b+m}{a+m}<1$. 令 $f(x)=\frac{a+x}{b+x}(x\geqslant 0)$ 任取 $0\leqslant x_1<x_2$，

$f(x_1)-f(x_2)=\frac{a+x_1}{b+x_1}-\frac{a+x_2}{b+x_2}=\frac{(b-a)(x_1-x_2)}{(b+x_1)(b+x_2)}$ $\because a>b>0$ $\therefore b-a<0$，

又 $\because 0\leqslant x_1<x_2$ $\therefore x_1-x_2<0$，又 $b+x_1>0, b+x_2>0$ $\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$

$\therefore f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是减函数，从而 $f(0)>f(n)$，即：$\frac{a}{b}>\frac{a+n}{b+n}$.①

同理可证：$g(x)=\frac{b+x}{a+x}(x\geqslant 0)$ 为增函数. $\therefore g(m)>g(0)$ 即：$\frac{b+m}{a+m}>\frac{b}{a}$.②

由①、②知：$\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}<\frac{a+n}{b+n}<\frac{a}{b}$.

评注：①同时比较几个数大小，可先分类，再对同一类数比较大小，最后确定它们的大小关系.②利用函数的单调性比较实数值的大小，须先选定函数，据单调函数的定义证明其单调性后，利用单调性比较大小.③当然，此题在分类后可用比较法比较每类分式的大小，从而确定四个分式的大小关系.（作差法、作商法均可）

点击考点

列举常考点、易考点，配有中考高考真题分析，考试得高分的关键.

9 高考中对不等式性质的考查，一般是在不等式变形、推理、论证等综合应用中充分体现，即是单独针对不等式的性质进行考查的题目，也是与其他知识，如函数结合起来，考查其应用能力.

例6 (1)给出下列四个命题：①$ab>0, -\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$，则 $bc>ad$；②$a-b>1$，则 $(a-b)^{\lg(a-b)}>1$；③$a>b$，则 $2^a>2^b$；④$c<0$，则 $2^c<$

$(\frac{1}{2})^c$.其中正确命题的个数是(　　)

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

(2)设$0<x<1,a>0,a\neq1$,试比较$|\log_a(1-x)|$与$|\log_a(1+x)|$的大小.

点拨→ (1)$\because -\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$　$\therefore \frac{c}{a}>\frac{d}{b}$　$\because ab>0$　$\therefore ab\cdot\frac{c}{a}>ab\cdot\frac{d}{b}$.即$bc>ad$ $\therefore$①正确.又$a-b>1$　$\therefore \log(a-b)>0$,从而$(a-b)^{\lg(a-b)}>1$ $\therefore$②正确③正确(略).④正确$\because c<0$　$\therefore (\frac{1}{2})^c>1,0<2^c<1$　$\therefore 2^c<(\frac{1}{2})^c$综上可知,应选D.

(2)解法一,若选择作差比较法,应先去掉绝对值号,须讨论a.$\because 0<x<1$ $\therefore 1+x>1,0<1-x<1$.当$a>1$时,$\log_a(1+x)>0,\log_a(1-x)<0$

$\therefore |\log_a(1+x)|-|\log_a(1-x)|=\log_a(1+x)-[-\log_a(1-x)]=\log_a(1-x^2)$.又$0<1-x^2<1$　$\therefore \log_a(1-x^2)<0$　$\therefore |\log_a(1+x)|<|\log_a(1-x)|$;当$0<a<1$时,$\log_a(1+x)<0,\log_a(1-x)>0$　$\therefore |\log_a(1+x)|-|\log_a(1-x)|=-\log_a(1+x)-\log_a(1-x)=-\log_a(1-x^2)$　又$0<1-x^2<1$

$\therefore \log_a(1-x^2)>0$　$\therefore -\log_a(1-x^2)<0$　$\therefore |\log_a(1+x)|<|\log_a(1-x)|$.

由上述讨论可知:$|\log_a(1+x)|<|\log_a(1-x)|$.

解法二,为了回避对字母a的讨论,可选择作商法.

$$\frac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}=\left|\frac{\log_a(1-x)}{\log_a(1+x)}\right|=|\log_{(1+x)}(1-x)|$$

$\because 0<x<1$　$\therefore 1+x>1,0<1-x<1$

$\therefore \log_{(1+x)}(1-x)<0$　$\therefore |\log_{(1+x)}(1-x)|=-\log_{(1+x)}(1-x)=\log_{(1+x)}\frac{1}{1-x}$.又$(1+x)(1-x)=1-x^2<1$.$\therefore \frac{1}{1-x}>1+x>1$　$\therefore \log_{(1+x)}\frac{1}{1-x}>\log_{(1+x)}(1+x)=1$　从而$\frac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}>1$　$\therefore |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

评注:此法虽然回避了对字母的讨论,但无形之中增强了变形和判定的难度.

解法三,仍为作差比较法.

$$|\log_a(1+x)|-|\log_a(1-x)|=\left|\frac{\lg(1+x)}{\lg a}\right|-\left|\frac{\lg(1-x)}{\lg a}\right|=\frac{|\lg(1+x)|}{|\lg a|}-\frac{|\lg(1-x)|}{|\lg a|}=\frac{\lg(1+x)+\lg(1-x)}{|\lg a|}=\frac{\lg(1-x)^2}{|\lg a|}<0$$　$\therefore |\log_a(1+x)|<|\log_a(1-x)|$

评注:解法三通过换底公式,换成以10为底的对数式后,不仅回避了对字母a的繁琐讨论,而且从难度上,比解法二大大地降低了.因此,在学习过程中,从

多个角度，多个途径思考、探索、寻求多种解决问题的方法，是培养、提高能力的有效方式，也是适应高考，在高考中获得优势的根本立足点和出发点．另外，对问题解决方法的探索，亦可在自己研究、思考的基础上，多与优秀的同学交流．交流的过程中，不仅获取了不同于自己的思想、方法，提高了解决问题的能力，而且无形之中亦培养了与人的交流、沟通及表达自己、理解别人的能力，并能于其中充分享受到智慧和交流带来的快乐．

学科综合

注意学科内综合及跨学科综合、培养学生的综合能力．

10 学科内综合

不等式性质常与函数、数列等结合，在解决问题的应用中考查应用能力，因此，对不等式的性质的理解、掌握要系统、准确、熟练．只有达到熟练应用的程度，才能充分发挥不等式性质的作用．

例 7 已知：$a>b>c>d>0$，且 a,b,c,d 成等差数列，请确定 $\lg\frac{a}{b}$，$\lg\frac{b}{c}$，$\lg\frac{c}{d}$ 的大小顺序．

点拨→ 由 $a>b>c>d>0$ 知：$\frac{a}{b}>1,\frac{b}{c}>1,\frac{c}{d}>1$ $\quad\therefore \lg\frac{a}{b}>0,\lg\frac{b}{c}>0,\lg\frac{c}{d}>0$，因此，欲比较其大小，可作差，亦可作商，又由 a,b,c,d 成等差数列其公差$m<0$，不妨先取特殊值 $a=5,b=4,c=3,d=2$ 探索：显然有：$\frac{5}{4}<\frac{4}{3}<\frac{3}{2}$ 即$\frac{a}{b}<\frac{b}{c}<\frac{c}{d}$，从而 $\lg\frac{a}{b}<\lg\frac{b}{c}<\lg\frac{c}{d}$．在此基础上再证明：$\because \lg\frac{a}{b}-\lg\frac{b}{c}=\lg\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{b}=\lg\frac{ac}{b^2}=\lg\frac{(b-m)(b+m)}{b^2}=\lg\frac{b^2-m^2}{b^2}=\lg(1-\frac{m^2}{b^2})$ 由 $0<\frac{ac}{b^2}=1-\frac{m^2}{b^2}$知：$0<1-\frac{m^2}{b^2}<1$ $\quad\therefore \lg(1-\frac{m^2}{b^2})<0$，因此 $\lg\frac{a}{b}<\lg\frac{b}{c}$．同理可证：$\lg\frac{b}{c}<\lg\frac{c}{d}$．$\therefore \lg\frac{a}{b}<\lg\frac{b}{c}<\lg\frac{c}{d}$．

评注：①本题在解决的过程中，采取了先赋于字母为符合条件的特殊值去探索．猜想，在此基础上展开严密的论证，亦是一种重要的数学方法，它至少能帮助我们明确努力的目标，从而降低解决问题的难度，提高思维的针对性和有效性．