三角函數

上海教育出版社

三　角　函　数

姚　晶　编

上海教育出版社

说　明

本书讨论了三角比的定义和运算，三角函数的初等性质和解析性质，最后简要介绍了三角方程的初等解法和数值解法．本书可供中学数学教师教学和业务进修参考，也可供中学生课外阅读．

本书作者曾委请韩希塘、邵文宝、马宝龙三同志，根据作者提出的指导思想和内容纲要，搜集材料并写出大部分章节的初稿，配备了练习题及其答案和提示．在此基础上，作者又在有关方面协作下对全稿加以丰富、充实，并对初稿作了大幅度的修改而成．

三　角　函　数
姚　晶　编
上海教育出版社出版
（上海永福路 123 号）
新华书店上海发行所发行　上海市印刷六厂印刷
开本 787×1092 1/32　印张 5　字数 110,000
1980 年 4 月第 1 版　1980 年 4 月第 1 次印刷
印数 1—50,000 本
统一书号：7150·2207　　定价：0.40 元

目　　录

一、三 角 比

1. 锐角三角比

我们知道，一个直角三角形中，有两个内角是锐角，它们互为余角．如果其中一个锐角是 α，那么另一个锐角就是 $90°-\alpha$．一个直角三角形有两条直角边，一条直角边是 α 的对边，另一条直角边是 α 的邻边(图 1-1)。

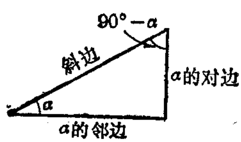

图 1-1

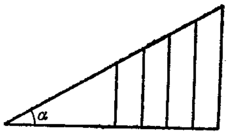

图 1-2

如果把一个直角三角形放大或者缩小，但保持一个锐角不变，将得出一连串和原三角形相似的图形，它们的一个锐角都等于 α，但是边长彼此都不相同(图 1-2)．根据相似三角形对应边成比例的道理，在这一系列直角三角形中，下列比值：

$$\frac{\alpha\text{ 的对边}}{\text{斜边}},\quad \frac{\alpha\text{ 的邻边}}{\text{斜边}},\quad \frac{\alpha\text{ 的对边}}{\alpha\text{ 的邻边}},$$

$$\frac{\alpha\text{ 的邻边}}{\alpha\text{ 的对边}},\quad \frac{\text{斜边}}{\alpha\text{ 的邻边}},\quad \frac{\text{斜边}}{\alpha\text{ 的对边}}$$

都是固定不变的．也就是说，上述六个比值只跟 α 的大小有关(即与直角三角形的形状有关)，而跟直角三角形各边的长短没有关系．因此，可以分别给上述六个比值起个名字，定

义如下：

$$\sin\alpha=\frac{\alpha\text{ 的对边}}{\text{斜边}},\quad \cos\alpha=\frac{\alpha\text{ 的邻边}}{\text{斜边}},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\alpha\text{ 的对边}}{\alpha\text{ 的邻边}},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\alpha\text{ 的邻边}}{\alpha\text{ 的对边}},$$

$$\sec\alpha=\frac{\text{斜边}}{\alpha\text{ 的邻边}},\quad \csc\alpha=\frac{\text{斜边}}{\alpha\text{ 的对边}}.$$

其中，$\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{ctg}\alpha$、$\sec\alpha$、$\csc\alpha$ 分别称为角 α 的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割。它们都是锐角 α 的三角比。

一般，要求出一个锐角的三角比，可以查"三角函数表"。另外，一些特殊角，如 30°、45°、60° 角的三角比，可以根据直角三角形的几何性质求得，现列表如下：(为了帮助记忆，可参考图 1–3)

角	30°	45°	60°
正　弦	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
余　弦	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
正　切	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

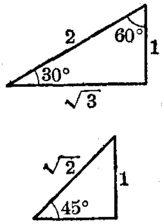

图　1–3

我们知道，在直角三角形中，α 的对边恰是它的余角 $90°-\alpha$ 的邻边；α 的邻边又恰是它的余角 $90°-\alpha$ 的对边(图 1–1)，因此，

$$\sin(90°-\alpha)=\frac{(90°-\alpha)\text{的对边}}{\text{斜边}}=\frac{\alpha\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\cos\alpha,$$

$$\cos(90°-\alpha)=\frac{(90°-\alpha)\text{的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{\alpha\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\sin\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)=\frac{(90^\circ-\alpha)\text{的对边}}{(90^\circ-\alpha)\text{的邻边}}=\frac{\alpha\text{的邻边}}{\alpha\text{的对边}}=\operatorname{ctg}\alpha,$$

同理，

$$\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\sec(90^\circ-\alpha)=\csc\alpha,$$
$$\csc(90^\circ-\alpha)=\sec\alpha.$$

关于余角的三角比的上述六个关系式，只须从图 1-1 出发即可推得，不必死记硬背.

下面再来讨论同角三角比之间的关系.

在直角三角形中，已知一个内角是锐角 α. 如果令斜边等于单位长 1，那么，根据定义，其余两边便分别等于 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$，见图 1-4(1)；同理，如果令邻边等于 1，或者令对边等于 1，另两边之长同样可用 α 的三角比来表示，见图 1-4(2)、(3).

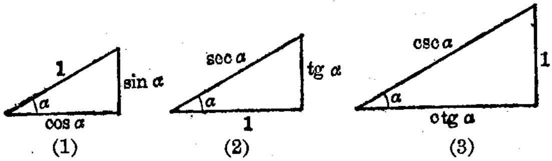

图 1-4

在图 1-4(1)中，根据三角比的定义，即可得出：

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\tag{1}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\tag{2}$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha},\tag{3}$$

$$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}.\tag{4}$$

根据勾股定理，还有

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1. \tag{5}$$

在图 1-4(2)、(3)中，又可得出:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \tag{6}$$

$$\sec^2\alpha=1+\operatorname{tg}^2\alpha, \tag{7}$$

$$\csc^2\alpha=1+\operatorname{ctg}^2\alpha. \tag{8}$$

这就得到了同角三角比之间的八个关系式.

这里，运用式的变换的方法，上述(6)、(7)、(8)三式也可以从(1)～(5)式中推出来. 事实上，利用图 1-4 中任一个三角形，均可推出(1)～(8)式，读者不妨一试. 而这里给出三个三角形，为的是便于记忆，因为只要脑中有图，再根据锐角三角比的定义和勾股定理，同角三角比之间的八个公式即可记住，且不易搞错，以后再结合应用，就能熟练掌握，根本不需死记硬背.

[例 1] 已知 α 为锐角，$\sin\alpha=\dfrac{3}{7}$，求 α 之其它三角比.

解 对于本题，当然可以运用上述同角三角比的八个公式去解，但结合图 1-5，求出 α 的邻边为 $\sqrt{7^2-3^2}=2\sqrt{10}$，再根据锐角三角比的定义，即得:

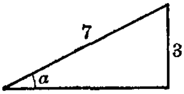

图 1-5

$$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{10}}{7},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{20},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{2\sqrt{10}}{3},$$

$$\sec\alpha=\frac{7\sqrt{10}}{20},\quad \csc\alpha=\frac{7}{3}.$$

[例 2] 已知 α 为锐角，求出以 $\operatorname{ctg}\alpha$ 来表示各三角比.

解 结合图 1-6，即可知

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}},$$

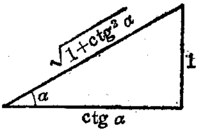

图 1-6

$$\cos\alpha=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}},$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha},\quad \sec\alpha=\frac{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}}{\mathrm{ctg}\,\alpha},$$

$$\csc\alpha=\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}.$$

运用同角三角比之间的关系式 (1)～(8)，可以把一个三角式化简.

[例 3] 化简:

(1) $(1+\mathrm{ctg}\alpha-\csc\alpha)(1+\mathrm{tg}\,\alpha+\sec\alpha)$;

(2) $\dfrac{1-\cos^6\beta-\sin^6\beta}{1-\cos^4\beta-\sin^4\beta}$.

解 (1) $(1+\mathrm{ctg}\,\alpha-\csc\alpha)(1+\mathrm{tg}\,\alpha+\sec\alpha)$

$$=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha-1}{\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha+\sin\alpha+1}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha-1}{\sin\alpha\cos\alpha}=2.$$

上述解法是一开始便把 α 的各三角比化成 α 的正弦、余弦来做的. 如果运用乘法公式加以展开，也可同样达到目的，解法如下:

$$\begin{aligned}&(1+\mathrm{ctg}\,\alpha-\csc\alpha)(1+\mathrm{tg}\,\alpha+\sec\alpha)\\&=1+\mathrm{ctg}\alpha-\csc\alpha+\mathrm{tg}\,\alpha+1-\sec\alpha+\sec\alpha\\&\quad+\csc\alpha-\sec\alpha\csc\alpha\\&=2+\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha-\sec\alpha\csc\alpha\\&=2+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\\&=2+\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}-\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=2.\end{aligned}$$

(2) 本题的分子、分母中，关于$(\cos^6\beta+\sin^6\beta)$和$(\cos^4\beta+\sin^4\beta)$项都可以通过分解因子以及配中项的方法，化成$(\cos^2\beta+\sin^2\beta)^2$ 减去一个式子，从而达到化简的目的，解法如下：

$$\frac{1-\cos^6\beta-\sin^6\beta}{1-\cos^4\beta-\sin^4\beta}$$
$$=\frac{1-(\cos^2\beta+\sin^2\beta)(\cos^4\beta-\cos^2\beta\sin^2\beta+\sin^4\beta)}{1-(\cos^4\beta+\sin^4\beta)}$$
$$=\frac{1-[(\cos^2\beta+\sin^2\beta)^2-3\cos^2\beta\sin^2\beta]}{1-[(\cos^2\beta+\sin^2\beta)^2-2\cos^2\beta\sin^2\beta]}$$
$$=\frac{3\cos^2\beta\sin^2\beta}{2\cos^2\beta\sin^2\beta}=\frac{3}{2}.$$

[例 4] 将下述三角比的分式形式化成整式形式：

(1) $\dfrac{1}{\sec\varphi-\operatorname{tg}\varphi}$; (2) $\dfrac{\operatorname{tg}A+\sec A-1}{\operatorname{tg}A-\sec A+1}$.

解 (1) 可以利用$(\sec\varphi-\operatorname{tg}\varphi)(\sec\varphi+\operatorname{tg}\varphi)=\sec^2\varphi-\operatorname{tg}^2\varphi=1$，把分母化为1，即：

$$\frac{1}{\sec\varphi-\operatorname{tg}\varphi}=\frac{\sec\varphi+\operatorname{tg}\varphi}{(\sec\varphi-\operatorname{tg}\varphi)(\sec\varphi+\operatorname{tg}\varphi)}$$
$$=\frac{\sec\varphi+\operatorname{tg}\varphi}{\sec^2\varphi-\operatorname{tg}^2\varphi}=\sec\varphi+\operatorname{tg}\varphi.$$

当然，本题也可把分子中的1写成$\sec^2\varphi-\operatorname{tg}^2\varphi$，然后经约分后化成整式形式：

$$\frac{1}{\sec\varphi-\operatorname{tg}\varphi}=\frac{\sec^2\varphi-\operatorname{tg}^2\varphi}{\sec\varphi-\operatorname{tg}\varphi}$$
$$=\frac{(\sec\varphi+\operatorname{tg}\varphi)(\sec\varphi-\operatorname{tg}\varphi)}{\sec\varphi-\operatorname{tg}\varphi}=\sec\varphi+\operatorname{tg}\varphi.$$

(2) 由于$\sec^2A-\operatorname{tg}^2A=1$，可以发现，取分子或分母中的一个“1”写成$\sec^2A-\operatorname{tg}^2A$后，是可望解决问题的.

$$\frac{\operatorname{tg} A+\sec A-1}{\operatorname{tg} A-\sec A+1}=\frac{\operatorname{tg} A+\sec A-(\sec^2 A-\operatorname{tg}^2 A)}{\operatorname{tg} A-\sec A+1}$$
$$=\frac{(\operatorname{tg} A+\sec A)(1-\sec A+\operatorname{tg} A)}{\operatorname{tg} A-\sec A+1}=\operatorname{tg} A+\sec A.$$

[例 5] 已知 θ、φ、A 为锐角，把下述三角式的根号化去：

(1) $\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}$； (2) $\sqrt{\sec^2\varphi+\csc^2\varphi}$；

(3) $\sqrt{\operatorname{ctg}^2 A-\cos^2 A}$.

解 (1) $\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}=\sqrt{\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}$

$$=\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}=|\sin\theta-\cos\theta|$$
$$=\begin{cases}\cos\theta-\sin\theta, & \text{当 } \sin\theta\leqslant\cos\theta,\text{ 即 } 0^\circ<\theta\leqslant 45^\circ \text{ 时；}\\ \sin\theta-\cos\theta, & \text{当 } \sin\theta>\cos\theta,\text{ 即 } 45^\circ<\theta<90^\circ \text{ 时.}\end{cases}$$

这里，由于涉及到算术根，解题中必须分两种情况来讨论.

(2) $\sqrt{\sec^2\varphi+\csc^2\varphi}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi}+\frac{1}{\sin^2\varphi}}$

$$=\sqrt{\frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}}=\sqrt{\frac{1}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}}=\frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi}.$$

进一步，还可化成整式形式：

$$\frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi}=\frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}=\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{ctg}\varphi.$$

另外，本题也可通过 $\sec^2\varphi+\csc^2\varphi$ 化成 $\operatorname{tg}^2\varphi+1+\operatorname{ctg}^2\varphi+1$ 而直接去根号：

$$\sqrt{\sec^2\varphi+\csc^2\varphi}=\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi+2+\operatorname{ctg}^2\varphi}$$
$$=\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi+2\operatorname{tg}\varphi\operatorname{ctg}\varphi+\operatorname{ctg}^2\varphi}=\sqrt{(\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{ctg}\varphi)^2}$$
$$=\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{ctg}\varphi.$$

(3) 本题可以利用 $\operatorname{ctg}^2 A=\csc^2 A-1$ 及 $\cos^2 A=1-\sin^2 A$ 而直接去根号：

$$\sqrt{\operatorname{ctg}^2 A-\cos^2 A}=\sqrt{(\csc^2 A-1)-(1-\sin^2 A)}$$
$$=\sqrt{\csc^2 A-2\csc A\sin A+\sin^2 A}=\sqrt{(\csc A-\sin A)^2}$$

$=|\csc A-\sin A|=\csc A-\sin A.$

运用同角三角比之间的关系式(1)～(8)，还可以证明一些三角恒等式.

[例 6] 证明:

(1) $(\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha)^2=\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$;

(2) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}=\csc\alpha+\operatorname{ctg}\alpha.$

证明 (1) 由于左端是二次整式形式，而右端是分式形式，证明过程可以采取把整式形式化到分式形式，并约分得到所需要的结果. 所以:

$$左边=\left(\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2=\frac{(1-\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}=\frac{(1-\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{(1-\sin\alpha)^2}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}=\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=右边.$$

对于本题，如果将左边直接展开，得 $\sec^2\alpha-2\sec\alpha\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha$，进一步证明就较麻烦.

(2) $$左边=\frac{1}{\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha}}=\frac{1}{\csc\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}$$

$$=\frac{\csc^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\csc\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}$$

$$=\frac{(\csc\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(\csc\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)}{\csc\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}$$

$$=\csc\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=右边.$$

[例 7] 证明:

$(2-\cos^2\alpha)(1+2\operatorname{ctg}^2\alpha)=(2+\operatorname{ctg}^2\alpha)(2-\sin^2\alpha).$

证明 左边$=(1+\sin^2\alpha)(\csc^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha)$

$$=\csc^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+1+\cos^2\alpha;$$

$$右边=(1+\csc^2\alpha)(1+\cos^2\alpha)$$

$$=1+\cos^2\alpha+\csc^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha,$$

$$\therefore\quad 左边=右边.$$

对于本题目，如果没有想到把 2 折成 1+1，通过乘法加以展开，运用因式分解的技巧，也可分别化简两边而得证：

$$左边=2+4\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha-2\cos^2\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha$$

$$=2+2\operatorname{ctg}^2\alpha+2\operatorname{ctg}^2\alpha-2\cos^2\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha$$

$$=2(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)+2\operatorname{ctg}^2\alpha(1-\cos^2\alpha)-\cos^2\alpha$$

$$=2\csc^2\alpha+2\cos^2\alpha-\cos^2\alpha$$

$$=2\csc^2\alpha+\cos^2\alpha;$$

$$右边=4-2\sin^2\alpha+2\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha$$

$$=2-2\sin^2\alpha+2+2\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha$$

$$=2(1-\sin^2\alpha)+2(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)-\cos^2\alpha$$

$$=2\cos^2\alpha+2\csc^2\alpha-\cos^2\alpha$$

$$=2\csc^2\alpha+\cos^2\alpha,$$

$$\therefore\quad 左边=右边.$$

在例 7 的证明过程中，要从待证式子的一端直接证到另一端是有困难的，只得通过把待证的式子的等号两端一起化到同一个式子，从而推知欲证明的结果.

[例 8] 证明：

(1) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

(2) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\sec\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha-\sec\alpha+1}=\dfrac{\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha+1}{\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha+1}$.

证明 (1) 分析待证的式子，如交叉相乘，则得一个恒等式：$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$. 这就启发我们，可以从上一恒等式出

发来证明，证明过程如下：

因为 $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$，所以

$$\sin^2\alpha=(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha).$$

等式两边同除以$\sin\alpha(1-\cos\alpha)$，得

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}=\frac{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}.$$

即证得了：

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

(2) 分析待证的式子，如两边分别合分比，则得到：

$$\frac{(\operatorname{tg}\alpha+\sec\alpha-1)+(\operatorname{tg}\alpha-\sec\alpha+1)}{(\operatorname{tg}\alpha+\sec\alpha-1)-(\operatorname{tg}\alpha-\sec\alpha+1)}$$

$$=\frac{(\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha+1)+(\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha+1)}{(\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha+1)-(\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha+1)},$$

即：

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha-1}=\frac{\sec\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha},$$

由于 $\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha-1$，故而上列等式是明显的．所以，本题可用下述方法去证：因为 $\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha-1$，所以

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha-1}=\frac{\sec\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

上式经合分比，即得待证的等式：

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\sec\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha-\sec\alpha+1}=\frac{\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha+1}{\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha+1}.$$

本题还可采用下述证法：

$$\text{左边}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\sec\alpha-(\sec^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha-\sec\alpha+1}$$

$$=\frac{(\operatorname{tg}\alpha+\sec\alpha)(1-\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha-\sec\alpha+1}=\operatorname{tg}\alpha+\sec\alpha;$$

$$右边=\frac{\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha+(\sec^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha)}{\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha+1}$$

$$=\frac{(\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha)(1+\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha)}{\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha+1}=\operatorname{tg}\alpha+\sec\alpha,$$

$\therefore$ 左边=右边.

[例 9] 证明

$$\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

证明 本题较难，可以这样进行考虑：

$$右边=\frac{\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin\alpha-\sin^2\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(1+\sin\alpha+\cos\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}.$$

把它与左边比较，发现必须

$$2(1+\sin\alpha+\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha)=(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2,$$

而上式是易于证得的：

$$(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2(\sin\alpha+\cos\alpha)+(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$$

$$=1+2\sin\alpha+2\cos\alpha+1+2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$=2(1+\sin\alpha+\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha).$$

因而，如在原式左边的分子、分母同乘以$(1+\sin\alpha+\cos\alpha)$，是有可能完成证明的. 具体证明过程如下：

$$左边=\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)(1+\sin\alpha+\cos\alpha)}{(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$$

$$=\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{2(1+\sin\alpha+\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha)}$$

$$=\frac{\cos\alpha(1+\cos\alpha)-\sin\alpha(1+\sin\alpha)}{(1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)}$$

$$=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=右边.$$

2. 任意角的三角比

一个角$\angle AOB$，可看做是由射线OA绕着顶点O旋转到OB而形成的．OA叫做始边，OB叫做终边．OA按逆时针方向旋转所形成的角是正角；按顺时针方向旋转所形成的角是负角(图 1-7)．

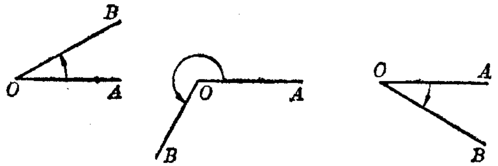

图 1-7

对任意一个角，把角的顶点放在坐标原点，始边放在x轴的正方向上，它的终边落在哪一个象限，就把它叫做这一象限的角．如果角的终边恰巧落在坐标轴上，就称不属任一象限的角．

采用度分秒制作为角的度量单位，与角α始边、终边相同的角(连同α在内)，可表成一般形式：$n\cdot 360°+\alpha$ (其中n为整数)．

怎样来定义任意角的三角比呢？当一个角不属锐角时，它就不可能存在于一个直角三角形中，从而也就不可能找到这个角的对边、邻边和斜边，当然，它的对边、邻边、斜边的比值关系就找不到了．于是，原来的锐角三角比的定义就不能照搬过来．

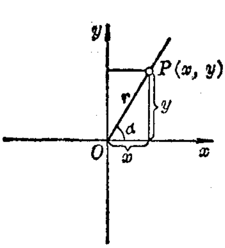

图 1-8

为了建立对任意角都适用的三角

比的定义，我们还是从锐角三角比出发．如果把锐角的顶点作为原点，它的始边作为 x 轴的正方向，建立一个直角坐标系(图 1-8)．这时，这个锐角的对边、邻边、斜边的比值，就是这个角终边上任一点 $P(x, y)$ 的 y、x、r 的比值(其中 $r=|OP|=\sqrt{x^2+y^2}$)．即：

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\quad \cos\alpha=\frac{x}{r},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y},\quad \sec\alpha=\frac{r}{x},\quad \csc\alpha=\frac{r}{y}.$$

这些比的大小完全是与角 α 的大小有关，而和点 P 在终边上的位置无关(由相似三角形的对应边成比例的性质来保证)．

上面六个式子，可看成是锐角三角比的坐标定义，这与前述直角三角形的边与边之比值的定义方法是等价的．我们把这里的锐角三角比的定义方法延拓到任意角的情形来，也就是说，对于任意角 α，我们把角的顶点放在坐标原点，始边放在 x 轴的正方向，在终边上任取一点 $P(x, y)$，按上述六个比值来定义任意角的三角比．

显然，这样的定义，是和锐角三角比的定义统一的．

根据点在各象限里的坐标的符号，立即可以推知，对于每个象限里的角，它的各个三角比的符号，如图 1-9 所示．

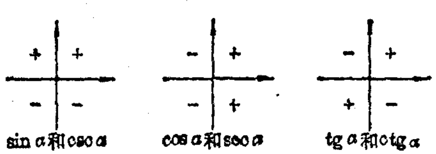

图 1-9

注意：在上面的定义中，如角的终边恰落在坐标轴上，即不属任一象限的角，这时，终边上的点的纵、横坐标中必然有