

21 世纪高等学校规划教材

高等数学

Advanced Mathematics

朱玉清 主编

国防工业出版社

<http://www.ndip.cn>

21 世纪高等学校规划教材

高等数学

主 编 朱玉清

编委 (按姓氏笔画为序)

于育民 马 戈 杜跃鹏 宋苏罗
吴宏锬 连冬艳 郭学军 梁 瑛

国防工业出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/朱玉清主编. —北京:国防工业出版社,
2004.8

21 世纪高等学校规划教材

ISBN 7-118-03520-3

I. 高... II. 朱... III. 高等数学—高等学校—教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 064701 号

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

北京奥隆印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 22 1/4 525 千字

2004 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月北京第 1 次印刷

印数:1—5000 册 定价:31.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

前 言

随着人们对高等院校面向 21 世纪课程体系和教育教学内容改革研究的不断深入,公共数学的基础课教学改革面临着很多新的课题。2000 年我院研究室全体成员申报了高等数学课程建设并于学院立项。教材建设作为课程建设的主要部分于 2000 年 9 月启动,经过近三年的教学实践,并借鉴和吸收国内外高等教育的新思想和新教研成果,对原有的讲义内容加以逐步完善。本教材在内容方面坚持以“够用为度”的基本原则,淡化其严密推导,侧重运算和应用性。在知识体系方面,打破传统的高等数学编排体系,保留其对于概念、定理的几何解释和物理原型的同时,把多元函数微积分学的内容穿插到一元函数的微积分学之中。这样,在给出一元函数微积分概念的同时,有意识地引导出多元函数的有关内容,便于学生理解和掌握,并能提高学生对所学知识的应用能力和应用水平。

本书内容包括:向量代数和空间解析几何、一元及多元函数的微分学及其应用、一元函数的积分学及其应用、二重积分及曲线积分、级数、常微分方程、行列式与矩阵、 n 维向量与线性方程组等内容。

全书由朱玉清任主编,并对全书进行统稿,由许洪范教授主审。具体编写情况为:第一章:杜跃鹏;第二章:连冬艳;第三章:梁瑛;第四章:吴宏锬;第五章:宋苏罗;第六章:于育民;第七章:郭学军;第八章:马戈;第九章、第十章:朱玉清。

由于编者水平所限,书中疏漏和错误在所难免,欢迎读者及时质疑。

编 者

2004 年 2 月

目 录

第一章 向量代数与空间解析几何	1
1.1 向量的概念	1
1.1.1 空间直角坐标系	1
1.1.2 向量的概念	4
1.1.3 向量的坐标表示	6
习题 1-1	10
1.2 数量积 向量积	10
1.2.1 向量的数量积	10
2.2.2 向量的向量积	12
习题 1-2	14
1.3 平面与直线	15
1.3.1 平面及其方程	15
1.3.2 直线	18
习题 1-3	20
1.4 曲面	21
1.4.1 球面	21
1.4.2 柱面	22
1.4.3 旋转曲面	23
1.4.4 二次曲面	25
习题 1-4	26
1.5 空间曲线	27
1.5.1 空间曲线及其方程	27
1.5.2 空间曲线在坐标面上的投影	29
习题 1-5	30
复习题一	30
第二章 函数 极限 连续	32
2.1 函数的概念	32
2.1.1 集合、区间和邻域	32
2.1.2 函数的基本概念	34
2.1.3 函数的基本形态	36
2.1.4 分段函数与反函数	38
2.1.5 复合函数与初等函数	39

2.1.6 多元函数	39
习题 2-1	41
2.2 数列的极限	43
习题 2-2	45
2.3 函数的极限	45
2.3.1 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限	45
2.3.2 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限	46
2.3.3 单侧极限	47
2.3.4 极限的运算法则	48
2.3.5 两个重要极限	50
习题 2-3	53
2.4 无穷小量与无穷大量	54
2.4.1 无穷小量	54
2.4.2 无穷大量	56
2.4.3 无穷小量阶的比较	57
习题 2-4	57
2.5 函数的连续性	58
2.5.1 连续函数的概念	58
2.5.2 间断点及其分类	59
2.5.3 连续函数的运算法则	60
2.5.4 初等函数的连续性	60
2.5.5 闭区间上连续函数的性质	62
习题 2-5	63
2.6 多元函数的极限与连续	63
2.6.1 二元函数的极限	63
2.6.2 多元函数的连续性	64
复习题二	65
第三章 导数 微分 偏导数	68
3.1 导数的概念	68
3.1.1 两个实例	68
3.1.2 导数的定义	69
3.1.3 导数的几何意义	73
3.1.4 可导与连续的关系	73
习题 3-1	74
3.2 函数的求导法则和求导公式	74
3.2.1 导数的四则运算	75
3.2.2 反函数的求导法则	78
3.2.3 复合函数的导数	79
3.2.4 函数的基本求导公式	81

3.2.5 高阶导数	82
习题 3-2	84
3.3 隐函数与参数方程确定函数的导数	85
3.3.1 隐函数的导数	85
3.3.2 参数方程所确定函数的导数	87
习题 3-3	88
3.4 函数的微分	89
3.4.1 微分的概念	89
3.4.2 微分公式与运算法则	91
习题 3-4	93
3.5 偏导数	93
3.5.1 偏导数的概念	93
3.5.2 高阶偏导数	95
3.5.3 全微分	97
3.5.4 多元复合函数的偏导数	99
3.5.5 隐函数的求导法则	101
习题 3-5	103
复习题三	104
第四章 导数与偏导数的应用	106
4.1 微分中值定理	106
4.1.1 罗尔中值定理	106
4.1.2 拉格朗日中值定理	107
4.1.3* 柯西中值定理	108
习题 4-1	108
4.2 罗必达法则	109
4.2.1 $\frac{0}{0}$ ($\frac{\infty}{\infty}$) 型不定式	109
4.2.2* 其它形式的不定式	112
习题 4-2	113
4.3 导数在函数研究中的应用	114
4.3.1 函数单调性的判定	114
4.3.2 函数的极值	116
4.3.3 函数的最大值和最小值	119
4.3.4 曲线的凹凸性及拐点	120
4.3.5 曲线的渐近线	121
4.3.6 函数图形的描绘	122
习题 4-3	124
4.4 二元函数的极值	125
习题 4-4	128

复习题四	128
第五章 不定积分	131
5.1 原函数与不定积分的概念	131
5.1.1 原函数与不定积分的定义	131
5.1.2 不定积分的性质及基本公式	133
习题 5-1	135
5.2 换元积分法	136
5.2.1 第一换元积分法(凑微分法)	136
5.2.2 第二换元积分法	140
习题 5-2	143
5.3 分部积分法	144
习题 5-3	147
5.4 简单有理函数积分举例	148
习题 5-4	150
复习题五	151
第六章 定积分 二重积分 曲线积分	153
6.1 定积分的概念	153
6.1.1 定积分的定义	153
6.1.2 定积分的几何意义	155
6.1.3 定积分的性质	156
习题 6-1	159
6.2 微积分基本定理	159
6.2.1 变上限定积分函数	160
6.2.2 微积分基本公式	161
习题 6-2	163
6.3 定积分的换元积分法与分部积分法	163
6.3.1 定积分的换元积分法	163
6.3.2 定积分的分部积分法	166
习题 6-3	167
6.4 广义积分	168
6.4.1 无穷积分	168
6.4.2* 瑕积分	170
习题 6-4	171
6.5 定积分的几何应用	172
6.5.1 平面图形的面积	172
6.5.2 立体体积	175
习题 6-5	177
6.6 二重积分	178

6.6.1 二重积分的概念与性质	178
6.6.2 二重积分在直角坐标系下的计算	181
6.6.3 二重积分在极坐标系下的计算	185
习题 6-6	186
6.7 曲线积分	187
6.7.1* 第一类曲线积分(对弧长的曲线积分)	188
6.7.2 第二类曲线积分(对坐标的曲线积分)	191
6.7.3 格林公式 曲线积分与路径无关的条件	195
习题 6-7	196
复习题六	197
第七章 常微分方程	202
7.1 常微分方程的基本概念	202
7.1.1 微分方程的定义	202
7.1.2 常微分方程的解	203
习题 7-1	203
7.2 可分离变量的微分方程	204
习题 7-2	207
7.3 一阶线性常微分方程	207
7.3.1 一阶线性齐次常微分方程的解法	207
7.3.2 一阶线性非齐次常微分方程的解法	208
习题 7-3	210
7.4 可降阶的高阶常微分方程	210
7.4.1 形如 $y^{(n)} = f(x)$ 的常微分方程	210
7.4.2 形如 $y^{(n)} = f(x, y')$ 的常微分方程	210
习题 7-4	211
7.5 二阶常系数线性常微分方程	211
7.5.1 线性常微分方程解的结构	212
7.5.2 二阶线性常系数齐次常微分方程的通解	213
7.5.3* 二阶线性常系数非齐次微分方程的通解	215
习题 7-5	218
复习题七	219
第八章 无穷级数	220
8.1 数项级数	220
8.1.1 数项级数的概念及性质	220
8.1.2 正项级数及其收敛性	224
8.1.3 任意项级数	229
习题 8-1	231
8.2 幂级数	232

8.2.1 函数项级数的一般概念	232
8.2.2 幂级数的收敛半径与收敛区间	233
8.2.3 函数展开成幂级数	236
8.2.4 幂级数的性质	238
习题 8-2	240
复习题八	240
第九章 行列式与矩阵	243
9.1 行列式的定义 性质	243
9.1.1 低阶行列式与克莱姆法则	243
9.1.2 n 阶行列式的定义	246
9.1.3 行列式的性质	248
9.1.4 行列式的计算	250
习题 9-1	252
9.2 克莱姆法则	253
习题 9-2	255
9.3 矩阵的概念与运算	256
9.3.1 矩阵的概念	256
9.3.2 矩阵的运算	258
习题 9-3	263
9.4 方阵的行列式与矩阵的逆	264
9.4.1 方阵的行列式	264
9.4.2 方阵的逆矩阵	265
习题 9-4	268
9.5 矩阵的初等变换 初等矩阵	268
9.5.1 矩阵的初等变换	268
9.5.2 初等矩阵	272
习题 9-5	273
9.6 矩阵的秩	274
习题 9-6	277
复习题九	277
第十章 n 维向量与线性方程组	281
10.1 n 维向量及其线性相关性	281
10.1.1 n 维向量的概念	281
10.1.2 向量组的线性相关性	282
习题 10-1	287
10.2 最大线性无关组与向量组的秩	288
习题 10-2	291
10.3 线性方程组解的存在性	291

10.3.1 线性方程组解的判定	292
10.3.2 线性方程组解的个数	294
习题 10-3	296
10.4 线性方程组解的结构	296
10.4.1 齐次线性方程组	296
10.4.2 非齐次线性方程组	302
习题 10-4	304
10.5 方阵的特征值与特征向量	305
习题 10-5	311
10.6* 二次型的定义及化简	311
10.6.1 二次型的定义及化简	311
10.6.2 用配方法化二次型为标准形	313
10.6.3 用正交线性变换化二次型为标准形	314
10.6.4 正交二次型	317
习题 10-6	318
复习题十	319
附录积分表	322
习题参考答案	331

第一章 向量代数与空间解析几何

在平面解析几何中, 我们通过平面坐标系, 建立了平面上的点与二元有序数组(平面点的坐标)之间的一一对应关系, 从而可以利用代数方法研究几何问题. 这一章我们将用同样的方法, 通过空间直角坐标系, 建立空间中的点与三元有序数组(空间点的坐标)之间的一一对应关系, 利用空间点的坐标来研究几何问题. 空间解析几何是平面解析几何的推广, 学习这部分内容时, 应注意与平面解析几何进行比较.

向量在工程技术中有着广泛的应用, 是一种重要的数学工具. 在本章中, 我们将空间向量放到空间直角坐标系中, 建立了空间向量与三元有序数组(向量的坐标)之间的一一对应关系, 进而利用向量的坐标研究向量.

1.1 向量的概念

1.1.1 空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

我们知道, 在一个平面内, 作两条互相垂直的数轴 Ox 和 Oy , 它们的原点交于一点 O , Ox 和 Oy 就构成了平面直角坐标系 Oxy . 该平面也称为 xOy 平面(见图 1-1). 现在, 将 xOy 平面置于空间中, 并过 O 点作一垂直于 xOy 平面的数轴 Oz , Oz 的原点也是 O (见图 1-2), 这样, 三条两两互相垂直相交的数轴 Ox 、 Oy 、 Oz 就构成一空间直角坐标系 $Oxyz$. O 称为坐标原点, Ox 、 Oy 、 Oz 分别称为横轴(x 轴)、纵轴(y 轴)和竖轴(z 轴), 统称为坐标轴.

在图 1-2 中, 过 O 点作垂直于 xOy 平面的数轴 Oz 可以有两个方向, 一个向上, 一个向下. 我们把 Oz 轴方向向上的空间直角坐标系 $Oxyz$ 称为右手系(用右手握住 z 轴, 右手的四个手指从 x 轴的正向转过 90° 后指向 y 轴正向, 此时, 竖起的大拇指所指的方向就是 z 轴的正向. 若换用左手, 按同样方法确定 z 轴正向, 这样建立的坐标系称为左手系). 以后, 无特别说明, 均采用右手系.

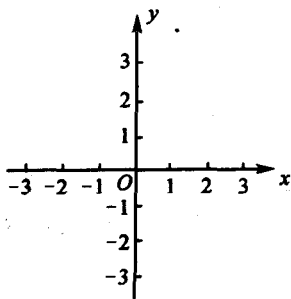


图 1-1

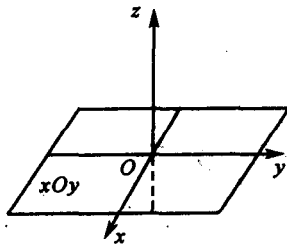


图 1-2

三条坐标轴中的每两条可以确定一个平面,称为坐标面. x 轴和 y 轴确定的平面称为 xOy 面, y 轴和 z 轴确定的平面称为 yOz 面, z 轴和 x 轴确定的平面称为 xOz 面.

三个坐标面把空间分成八个部分,每一部分叫做一个卦限.用 I、II、III、…、VIII 表示这八个卦限(见图 1-3).

设 M 是空间一点,过 M 分别作垂直于 x 轴、 y 轴和 z 轴的平面,与 x 轴、 y 轴和 z 轴分别交于 P 、 Q 和 R 三点. P 、 Q 和 R 分别叫做点 M 在 x 轴、 y 轴和 z 轴上的投影. P 、 Q 和 R 在 x 轴、 y 轴和 z 轴上的坐标分别为 x 、 y 和 z ,如图 1-4 所示.这样,空间中的任何一点,都惟一地确定了一个三元有序数组 (x,y,z) .反之,对于任意三元有序数组 (x,y,z) ,过 x 轴上坐标为 x 的点 P ,作 x 轴的垂面,过 y 轴上坐标为 y 的点 Q ,作 y 轴的垂面,过 z 轴上坐标为 z 的点 R ,作 z 轴的垂面,这三个平面相交于惟一点 M ,即三元有序数组 (x,y,z) 也惟一地确定了空间一个点 M .这样,就建立了空间中的点与三元有序数组之间的一一对应关系.三元有序数组 (x,y,z) 称为点 M 的坐标,其中, x 、 y 和 z 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标.点 M 记为 $M(x,y,z)$.显然,原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$.

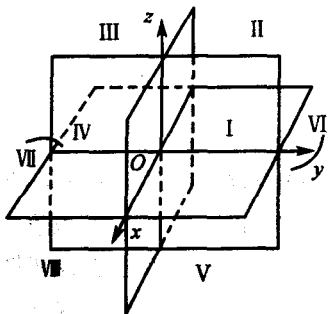


图 1-3

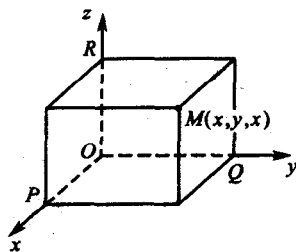


图 1-4

画空间直角坐标系中的点 $M(x,y,z)$ 也可以这样做:在 xOy 平面上过 x 轴上坐标为 x 的点 P 作 y 轴的平行线,过 y 轴上坐标为 y 的点 Q 作 x 轴的平行线,这两条直线交于点 M_1 .连接 OM_1 ,过 M_1 作 z 轴的平行线,过 z 轴上坐标为 z 的点 R 作 OM_1 的平行线,这两条直线交于点 M , M 点的坐标就是 (x,y,z) (见图 1-5).

在图 1-6 和图 1-7 中画出了点 $M_1(2,3,-3)$ 和点 $M_2(3,-4,2)$.

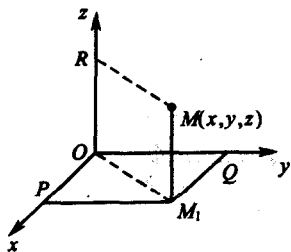


图 1-5

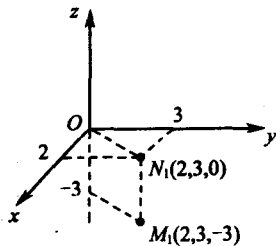


图 1-6

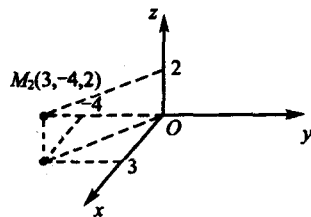


图 1-7

各坐标轴上点的坐标有如下特点:

坐标轴	x 轴	y 轴	z 轴
坐标	$(x,0,0)$	$(0,y,0)$	$(0,0,z)$

各坐标面上点的坐标有如下特点:

坐标面	xOy 面	yOz 面	xOz 面
坐标	$(x,y,0)$	$(0,y,z)$	$(x,0,z)$

二、空间两点的距离公式

定理 1 设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间两点, 则 P_1 、 P_2 两点间的距离为

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

证明 过 P_1 、 P_2 分别作 xOy 面的垂线 P_1Q_1 、 P_2Q_2 , 与 xOy 面分别交于点 Q_1 、 Q_2 (Q_1 、 Q_2 称为点 P_1 、 P_2 在 xOy 面上的投影). 显然, 在平面直角坐标系 Oxy 中, 点 Q_1 、 Q_2 的坐标分别为 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) , 由平面上两点距离公式得

$$|Q_1Q_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

连接 P_1 和 P_2 、 Q_1 和 Q_2 , 过点 P_1 作 Q_1Q_2 的平行线, 与 P_2Q_2 交于点 M (见图 1-8), 在直角三角形 ΔP_1MP_2 中,

$$|P_1P_2|^2 = |P_1M|^2 + |P_2M|^2,$$

$$|P_1M| = |Q_1Q_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$|P_2M| = |z_2 - z_1|,$$

所以

$$|P_1P_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

于是得空间两点 P_1 、 P_2 的距离公式为

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

显然, 点 $M(x, y, z)$ 到原点 O 的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 1 设 x 轴、 y 轴和 z 轴上的点 $A(a, 0, 0)$ 、 $B(0, a, 0)$ 和 $C(0, 0, a)$ ($a \neq 0$), 如图 1-9 所示. 证明: ΔABC 是等边三角形.

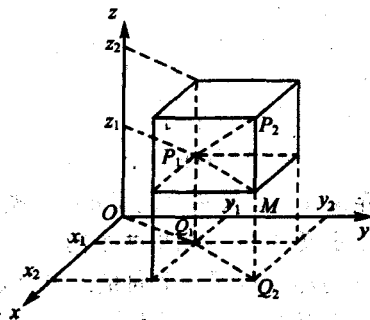


图 1-8

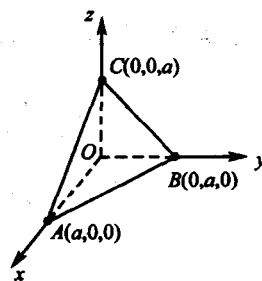


图 1-9

证 因为

$$|AB| = \sqrt{(0-a)^2 + (a-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{2}|a|,$$

$$|BC| = \sqrt{(0-0)^2 + (0-a)^2 + (a-0)^2} = \sqrt{2}|a|,$$

$$|CA| = \sqrt{(a-0)^2 + (0-0)^2 + (0-a)^2} = \sqrt{2}|a|,$$

所以

$$|AB| = |BC| = |CA|,$$

即 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

1.1.2 向量的概念

一、向量及其几何表示

在自然科学和社会科学中,人们经常使用的量有两类,一类完全可以用一个实数来表示,例如距离、质量、温度等,通常把这些量称为标量(或数量).另一类量,例如力、速度、加速度等,不能只用一个实数来表示,因为它们都有方向.我们把这种既有大小又有方向的量称为向量(或矢量).

我们用有向线段来表示向量,有向线段的长度表示该向量的大小,有向线段的方向表示该向量的方向.通常用黑体字母表示向量,如 a 、 b 、 s 等,也可以用上方加有箭头的字母表示,如 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{s}$ 等.以 M_1 为始点 M_2 为终点的向量记为 $\overrightarrow{M_1M_2}$ (见图1-10).

向量的大小称为向量的模.向量 a 、 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模分别记作 $|a|$ 、 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$.模等于1的向量称为单位向量.模等于0的向量称为零向量,记作 0 ,零向量没有确定的方向.

由于在几何中,我们把向量看成是一条有向线段,因此像对待线段一样,当向量 a 与向量 b 所在的直线平行时,我们就说向量 a 与 b 平行,记为 $a \parallel b$.类似地我们可以说一个向量与一条直线(或一个平面)平行或垂直.

定义1 如果两个向量 a 和 b 模相等且方向相同,就称 a 与 b 相等,记作 $a = b$.

由定义1知,如果两个向量的大小与方向是相同的,则不论它们的始点位置是否相同,它们都表示同一个向量.也就是说,向量可以平行移动,这样理解的向量叫做自由向量.本书涉及的向量都与始点位置无关,因此都是自由向量.

设有两个向量 a 和 b ,将它们的始点移动到同一点后(见图1-11),它们所在的射线之间的夹角 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)称为 a 与 b 的夹角,记作 (a, b) .显然,对于两个非零向量 a 和 b , $a \parallel b$ 的充分必要条件是这两个向量的夹角为0或 π .

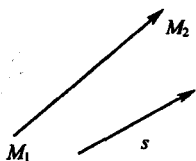


图 1-10

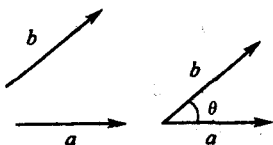


图 1-11

二、向量的加法

在物理学中我们知道，两个力或两个速度合成时，都是按照平行四边形法则进行的。因此，我们可以如下定义两个向量的加法。

定义 2 设向量 a 与 b ，以空间任意一点 A 为始点，作向量 $\overrightarrow{AB} = a$ ， $\overrightarrow{AD} = b$ ，以 AB 、 AD 为边做平行四边形 $ABCD$ ，称向量 $\overrightarrow{AC}$ 为向量 a 与 b 的和，记为 $a+b$ (见图 1-12(a))。

求向量 a 与 b 的和的运算称为向量加法。定义 2 中求两个向量和的方法称为平行四边形法则。该法则对于两个平行向量的加法没有做说明。

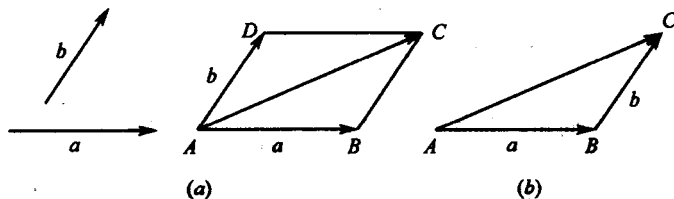


图 1-12

由于向量可以平行移动，因此又可用下述定义来定义两向量的和。

定义 3 设向量 a 与 b ，以空间任意一点 A 为始点，作向量 $\overrightarrow{AB} = a$ ，以 B 为始点，作向量 $\overrightarrow{BC} = b$ ，连结 AC ，称向量 $\overrightarrow{AC}$ 为向量 a 与 b 的和，记为 $a+b$ (见图 1-12(b))。

定义 3 中求两个向量和的方法称为三角形法则。这个法则可以推广到任意有限个向量相加的情形。有限个向量相加时，把第二个向量的始点移动到第一个向量的终点，把第三个向量的始点移动到第二个向量的终点，依次下去，直到最后一个向量为止，以第一个向量的始点为始点，以最后一个向量的终点为终点的向量就是它们的和。这种方法称为折线法。

从图 1-13 及图 1-14 可以看出，向量的加法满足交换律和结合律。即

$$a+b=b+a;$$

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

根据向量加法的三角形法则，若向量 b 加向量 c 等于向量 a ，则称向量 c 为 a 与 b 的差，记为 $a-b$ 。向量 $a-b$ 是以 a 、 b 为邻边的平行四边形的另外一条对角线 (见图 1-15)，它的始点是 b 的终点，它的终点是 a 的终点。

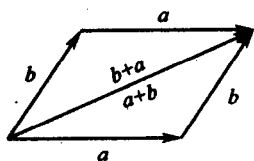


图 1-13

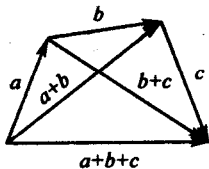


图 1-14

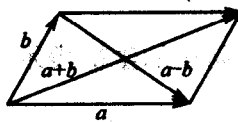


图 1-15

三、向量与数的乘法

定义 4 设 a 是任意向量， λ 是任意实数，我们定义 λ 与 a 的乘积 (简称数乘) 是一个向量，记为 λa ，它的模与方向规定如下：

(1) $|\lambda a| = |\lambda| \cdot |a|$;

(2) 当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 同方向; 当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 反方向.

$\lambda = 0$ 或 $a = 0$ 时, $|\lambda a| = |\lambda| \cdot |a| = 0$, 即 λa 为零向量, 它的方向可以是任意的.

容易验证, 数与向量的乘法满足结合律与分配律. 设 λ, μ 是任意实数, a, b 是任意向量, 有

(1) $\mu(\lambda a) = \lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$;

(2) $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$;

(3) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$.

设 a 是非零向量, 由数乘的定义可知 $\left| \frac{a}{|a|} \right| = \frac{1}{|a|} \cdot |a| = 1$, 且 $\frac{a}{|a|}$ 与 a 同向, 所以, 向量

$\frac{a}{|a|}$ 是与 a 同方向的单位向量, 记为 a^0 , 即 $a^0 = \frac{a}{|a|}$, $a = |a|a^0$.

定理 2 两个非零向量 a 与 b 平行的充分必要条件是, 存在数 λ , 使得 $a = \lambda b$ (或 $b = \lambda a$).

证明 设两个非零向量 a 与 b , 若存在一常数 λ , 使 $a = \lambda b$, 由数乘的定义知, a 与 b 或者同向或者反向, 从而 $a \parallel b$; 反之, 若 $a \parallel b$, 当 a 与 b 同向时, 取 $\lambda = \frac{|a|}{|b|}$, 则

$|\lambda b| = \lambda |b| = \frac{|a|}{|b|} \cdot |b| = |a|$, 所以, $a = \lambda b$; 当 a 与 b 反向时, 取 $\lambda = -\frac{|a|}{|b|}$, 也可得 $a = \lambda b$.

例 2 利用向量证明, 三角形的中位线平行于第三边且等于第三边的一半.

证 设 $\triangle ABC$ 的两条边 AB 、 AC 的中点分别为 D 、 E (见图 1-16). 则

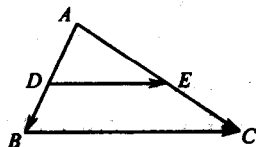


图 1-16

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}.$$

所以 $DE \parallel BC$, 而且 $DE = \frac{1}{2} BC$.

即三角形的中位线平行于第三边且等于第三边的一半.

1.1.3 向量的坐标表示

一、向量在轴上的投影

定义 5 设向量 $\overrightarrow{AB}$ 及一轴 u , 过始点 A 及终点 B 分别作垂直于轴 u 的平面, 与轴 u 交于点 A' 、 B' (A' 、 B' 为点 A 、 B 在轴 u 上的投影) (见图 1-17), 称轴 u 上有向线段 $A'B'$ 的数量 (有向线段 $A'B'$ 与轴 u 同向时取正值, 反向时取负值) 为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影, 记作 $\text{Prj}_u \overrightarrow{AB}$ (或 $(\overrightarrow{AB})_u$). 它是一个标量.