21世纪高等学校规划教材

高等数学

Advanced Mathematics

朱玉清　主编

国防工业出版社

http://www.ndip.cn

21 世纪高等学校规划教材

高等数学

主　编　朱玉清

编委（按姓氏笔画为序）

于育民　马　戈　杜跃鹏　宋苏罗

吴宏锷　连冬艳　郭学军　梁　瑛

国防工業出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/朱玉清主编 .—北京:国防工业出版社,2004.8

21世纪高等学校规划教材

ISBN 7-118-03520-3

Ⅰ.高… Ⅱ.朱… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第064701号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号)

(邮政编码 100044)

北京奥隆印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 22¾ 525千字

2004年8月第1版 2004年8月北京第1次印刷

印数:1—5000册 定价:31.00元

前　言

随着人们对高等院校面向 21 世纪课程体系和教育教学内容改革研究的不断深入，公共数学的基础课教学改革面临着很多新的课题。2000 年我院研究室全体成员申报了高等数学课程建设并于学院立项。教材建设作为课程建设的主要部分于 2000 年 9 月启动，经过近三年的教学实践，并借鉴和吸收国内外高等教育的新思想和新教研成果，对原有的讲义内容加以逐步完善。本教材在内容方面坚持以“够用为度”的基本原则，淡化其严密推导，侧重运算和应用性。在知识体系方面，打破传统的高等数学编排体系，保留其对于概念、定理的几何解释和物理原型的同时，把多元函数微积分学的内容穿插到一元函数的微积分学之中。这样，在给出一元函数微积分概念的同时，有意识地引导出多元函数的有关内容，便于学生理解和掌握，并能提高学生对所学知识的应用能力和应用水平。

本书内容包括：向量代数和空间解析几何、一元及多元函数的微分学及其应用、一元函数的积分学及其应用、二重积分及曲线积分、级数、常微分方程、行列式与矩阵、n 维向量与线性方程组等内容。

全书由朱玉清任主编，并对全书进行统稿，由许洪范教授主审。具体编写情况为：第一章：杜跃鹏；第二章：连冬艳；第三章：梁瑛；第四章：吴宏锷；第五章：宋苏罗；第六章：于育民；第七章：郭学军；第八章：马戈；第九章、第十章：朱玉清。

由于编者水平所限，书中疏漏和错误在所难免，欢迎读者及时质疑。

编　者

2004 年 2 月

目　录

第一章 向量代数与空间解析几何

在平面解析几何中，我们通过平面坐标系，建立了平面上的点与二元有序数组(平面点的坐标)之间的一一对应关系，从而可以利用代数的方法研究几何问题．这一章我们将用同样的方法，通过空间直角坐标系，建立空间中的点与三元有序数组(空间点的坐标)之间的一一对应关系，利用空间点的坐标来研究几何问题．空间解析几何是平面解析几何的推广，学习这部分内容时，应注意与平面解析几何进行比较．

向量在工程技术中有着广泛的应用，是一种重要的数学工具．在本章中，我们将空间向量放到空间直角坐标系中，建立了空间向量与三元有序数组(向量的坐标)之间的一一对应关系，进而利用向量的坐标研究向量．

1.1 向量的概念

1.1.1 空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

我们知道，在一个平面内，作两条互相垂直的数轴Ox和Oy，它们的原点交于一点O，Ox和Oy就构成了平面直角坐标系Oxy．该平面也称为xOy平面(见图 1-1)．现在，将xOy平面置于空间中，并过O点作一垂直于xOy平面的数轴Oz，Oz的原点也是O(见图 1-2)，这样，三条两两互相垂直相交的数轴Ox、Oy、Oz就构成一空间直角坐标系$Oxyz$．O称为坐标原点，Ox、Oy、Oz分别称为横轴(x轴)、纵轴(y轴)和竖轴(z轴)，统称为坐标轴．

在图 1-2 中，过O点作垂直于xOy平面的数轴Oz可以有两个方向，一个向上，一个向下．我们把Oz轴方向向上的空间直角坐标系$Oxyz$称为右手系(用右手握住z轴，右手的四个手指从x轴的正向转过$90°$后指向y轴正向，此时，竖起的大拇指所指的方向就是z轴的正向．若换用左手，按同样方法确定z轴正向，这样建立的坐标系称为左手系)．以后，无特别说明，均采用右手系．

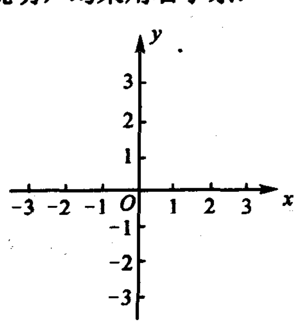

图 1-1

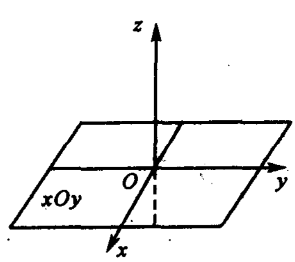

图 1-2

三条坐标轴中的每两条可以确定一个平面，称为坐标面. x 轴和 y 轴确定的平面称为 xOy 面，y 轴和 z 轴确定的平面称为 yOz 面，z 轴和 x 轴确定的平面称为 xOz 面.

三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫做一个卦限. 用Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、…、Ⅷ表示这八个卦限(见图 1-3).

设 M 是空间一点，过 M 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面，与 x 轴、y 轴和 z 轴分别交于 P、Q 和 R 三点. P、Q 和 R 分别叫做点 M 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影. P、Q 和 R 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标分别为 x、y 和 z，如图 1-4 所示. 这样，空间中的任何一点，都惟一地确定了一个三元有序数组 (x,y,z). 反之，对于任意三元有序数组 (x,y,z)，过 x 轴上坐标为 x 的点 P，作 x 轴的垂面，过 y 轴上坐标为 y 的点 Q，作 y 轴的垂面，过 z 轴上坐标为 z 的点 R，作 z 轴的垂面，这三个平面相交于惟一一点 M，即三元有序数组 (x,y,z) 也惟一地确定了空间一个点 M. 这样，就建立了空间中的点与三元有序数组之间的一一对应关系. 三元有序数组 (x,y,z) 称为点 M 的坐标，其中，x、y 和 z 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标. 点 M 记为 $M(x,y,z)$. 显然，原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$.

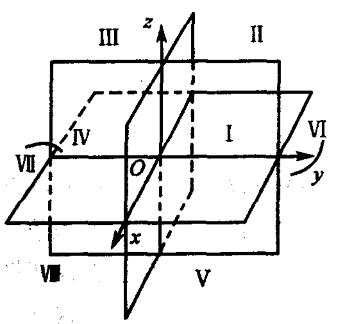

图 1-3

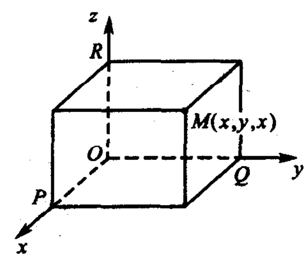

图 1-4

画空间直角坐标系中的点 $M(x,y,z)$ 也可以这样做：在 xOy 平面上过 x 轴上坐标为 x 的点 P 作 y 轴的平行线，过 y 轴上坐标为 y 的点 Q 作 x 轴的平行线，这两条直线交于点 M_1. 连接 OM_1，过 M_1 作 z 轴的平行线，过 z 轴上坐标为 z 的点 R 作 OM_1 的平行线，这两条直线交于点 M，M 点的坐标就是 (x,y,z) (见图 1-5).

在图 1-6 和图 1-7 中画出了点 $M_1(2,3,-3)$ 和点 $M_2(3,-4,2)$.

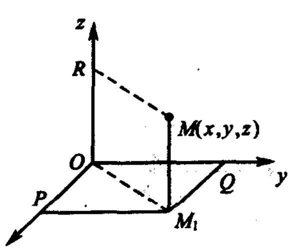

图 1-5

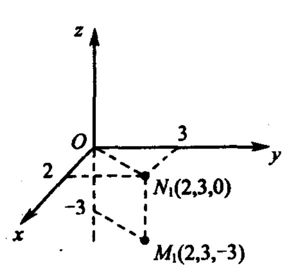

图 1-6

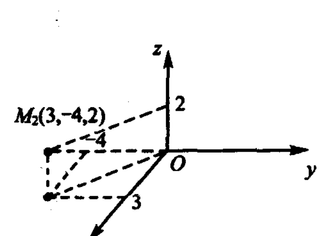

图 1-7

各坐标轴上点的坐标有如下特点：

坐标轴	x 轴	y 轴	z 轴
坐标	$(x,0,0)$	$(0,y,0)$	$(0,0,z)$

各坐标面上点的坐标有如下特点：

坐标面	xOy 面	yOz 面	xOz 面
坐标	$(x,y,0)$	$(0,y,z)$	$(x,0,z)$

二、空间两点的距离公式

定理 1 设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$、$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间两点，则 P_1、P_2 两点间的距离为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

证明 过 P_1、P_2 分别作 xOy 面的垂线 P_1Q_1、P_2Q_2，与 xOy 面分别交于点 Q_1、Q_2（Q_1、Q_2 称为点 P_1、P_2 在 xOy 面上的投影）. 显然，在平面直角坐标系 Oxy 中，点 Q_1、Q_2 的坐标分别为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)，由平面上两点距离公式得

$$|Q_1Q_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

连接 P_1 和 P_2、Q_1 和 Q_2，过点 P_1 作 Q_1Q_2 的平行线，与 P_2Q_2 交于点 M(见图 1-8)，在直角三角形 ΔP_1MP_2 中，

$$|P_1P_2|^2=|P_1M|^2+|P_2M|^2,$$

$$|P_1M|=|Q_1Q_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

$$|P_2M|=|z_2-z_1|,$$

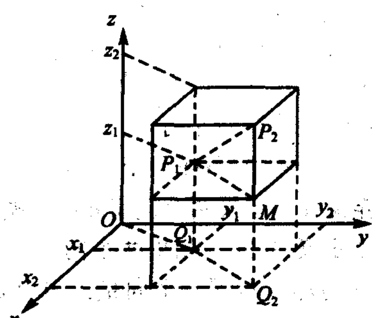

图 1-8

所以

$$|P_1P_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2.$$

于是得空间两点 P_1、P_2 的距离公式为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

显然，点 $M(x,y,z)$ 到原点 O 的距离为

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 1 设 x 轴、y 轴和 z 轴上的点 $A(a,0,0)$、$B(0,a,0)$ 和 $C(0,0,a)$ $(a\neq 0)$，如图 1-9 所示. 证明：ΔABC 是等边三角形.

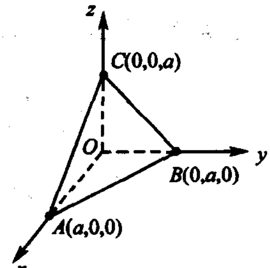

图 1-9

证 因为

$$|AB|=\sqrt{(0-a)^2+(a-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{2}|a|,$$

$$|BC|=\sqrt{(0-0)^2+(0-a)^2+(a-0)^2}=\sqrt{2}|a|,$$

$$|CA|=\sqrt{(a-0)^2+(0-0)^2+(0-a)^2}=\sqrt{2}|a|,$$

所以
$$|AB|=|BC|=|CA|,$$
即$\triangle ABC$是等边三角形.

1.1.2 向量的概念

一、向量及其几何表示

在自然科学和社会科学中，人们经常使用的量有两类，一类完全可以用一个实数来表示，例如距离、质量、温度等，通常把这些量称为标量(或数量)．另一类量，例如力、速度、加速度等，不能只用一个实数来表示，因为它们都有方向．我们把这种既有大小又有方向的量称为向量(或矢量)．

我们用有向线段来表示向量，有向线段的长度表示该向量的大小，有向线段的方向表示该向量的方向．通常用黑体字母表示向量，如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{s}$ 等，也可以用上方加有箭头的字母表示，如 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{s}$ 等．以 M_1 为始点 M_2 为终点的向量记为 $\overrightarrow{M_1M_2}$ (见图 1-10)．

向量的大小称为向量的模．向量 $\boldsymbol{a}$、$\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模分别记作 $|\boldsymbol{a}|$、$|\overrightarrow{M_1M_2}|$．模等于 1 的向量称为单位向量．模等于 0 的向量称为零向量，记作 $\boldsymbol{0}$，零向量没有确定的方向．

由于在几何中，我们把向量看成是一条有向线段，因此像对待线段一样，当向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 所在的直线平行时，我们就说向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$．类似地我们可以说一个向量与一条直线(或一个平面)平行或垂直．

定义 1 **如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 模相等且方向相同，就称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$．**

由定义 1 知，如果两个向量的大小与方向是相同的，则不论它们的始点位置是否相同，它们都表示同一个向量．也就是说，向量可以平行移动，这样理解的向量叫做自由向量．本书涉及的向量都与始点位置无关，因此都是自由向量．

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，将它们的始点移动到同一点后(见图 1-11)，它们所在的射线之间的夹角 θ ($0\leqslant\theta\leqslant\pi$) 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$．显然，对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是这两个向量的夹角为 0 或 π．

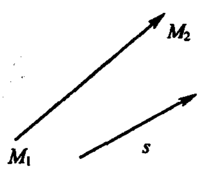

图 1-10

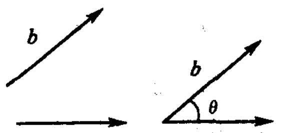

图 1-11

二、向量的加法

在物理学中我们知道，两个力或两个速度合成时，都是按照平行四边形法则进行的．因此，我们可以如下定义两个向量的加法．

定义 2 设向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$，以空间任意一点A为始点，作向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以$AB$、$AD$为边做平行四边形$ABCD$，称向量$\overrightarrow{AC}$为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和，记为$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(见图 1-12(*a*))．

求向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和的运算称为向量加法．定义 2 中求两个向量和的方法称为平行四边形法则．该法则对于两个平行向量的加法没有做说明．

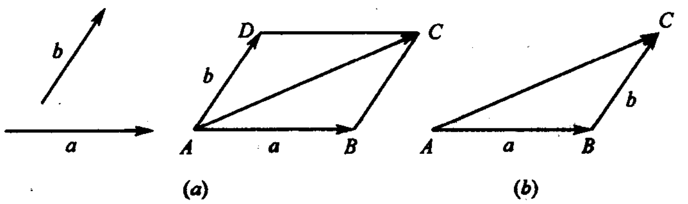

图 1-12

由于向量可以平行移动，因此又可用下述定义来定义两向量的和．

定义3 设向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$，以空间任意一点A为始点，作向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，以$B$为始点，作向量$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连结$AC$，称向量$\overrightarrow{AC}$为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和，记为$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(见图 1-12(*b*))．

定义 3 中求两个向量和的方法称为三角形法则．这个法则可以推广到任意有限个向量相加的情形．有限个向量相加时，把第二个向量的始点移动到第一个向量的终点，把第三个向量的始点移动到第二个向量的终点，依次下去，直到最后一个向量为止，以第一个向量的始点为始点，以最后一个向量的终点为终点的向量就是它们的和．这种方法称为折线法．

从图 1-13 及图 1-14 可以看出，向量的加法满足交换律和结合律．即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\,;$$
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\,.$$

根据向量加法的三角形法则，若向量$\boldsymbol{b}$加向量$\boldsymbol{c}$等于向量$\boldsymbol{a}$，则称向量$\boldsymbol{c}$为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的差，记为$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$．向量$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$是以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形的另外一条对角线(见图 1-15)，它的始点是$\boldsymbol{b}$的终点，它的终点是$\boldsymbol{a}$的终点．

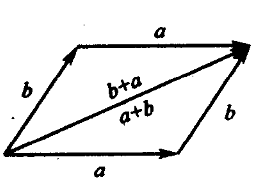

图 1-13

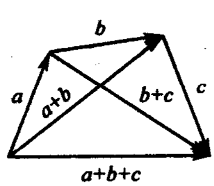

图 1-14

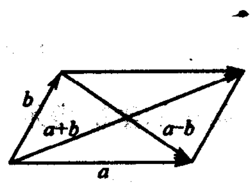

图 1-15

三、向量与数的乘法

定义 4 设$\boldsymbol{a}$是任意向量，λ是任意实数，我们定义λ与$\boldsymbol{a}$的乘积(简称数乘)是一个向量，记为$\lambda\boldsymbol{a}$，它的模与方向规定如下：

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$；

(2) 当$\lambda>0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$同方向；当$\lambda<0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$反方向.

$\lambda=0$或$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|=0$，即$\lambda\boldsymbol{a}$为零向量，它的方向可以是任意的.

容易验证，数与向量的乘法满足结合律与分配律．设λ、μ是任意实数，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$是任意向量，有

(1) $\mu(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$；

(3) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

设$\boldsymbol{a}$是非零向量，由数乘的定义可知$\left|\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\cdot|\boldsymbol{a}|=1$，且$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$与$\boldsymbol{a}$同向，所以，向量$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$是与$\boldsymbol{a}$同方向的单位向量，记为$\boldsymbol{a}^0$，即$\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$.

定理2 两个非零向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行的充分必要条件是，存在数λ，使得$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$（或$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$）.

证明 设两个非零向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$，若存在一常数λ，使$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，由数乘的定义知，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$或者同向或者反向，从而$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；反之，若$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同向时，取$\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$，则$|\lambda\boldsymbol{b}|=|\lambda||\boldsymbol{b}|=\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\cdot|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|$，所以，$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$；当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$反向时，取$\lambda=-\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$，也可得$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

例2 利用向量证明，三角形的中位线平行于第三边且等于第三边的一半.

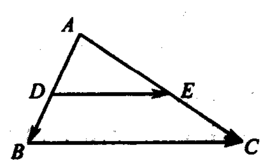

图 1-16

证 设$\triangle ABC$的两条边AB、AC的中点分别为D、E（见图 1-16）．则

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

所以 $DE/\!/BC$，而且$DE=\dfrac{1}{2}BC$.

即三角形的中位线平行于第三边且等于第三边的一半.

1.1.3 向量的坐标表示

一、向量在轴上的投影

定义5 设向量$\overrightarrow{AB}$及一轴$\boldsymbol{u}$，过始点A及终点B分别作垂直于轴$\boldsymbol{u}$的平面，与轴$\boldsymbol{u}$交于点A'、B'（A'、B'为点A、B在轴$\boldsymbol{u}$上的投影）（见图 1-17），称轴$\boldsymbol{u}$上有向线段$A'B'$的数量（有向线段$A'B'$与轴$\boldsymbol{u}$同向时取正值，反向时取负值）为向量$\overrightarrow{AB}$在轴$\boldsymbol{u}$上的投影，记作$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}$（或$(\overrightarrow{AB})_u$）．它是一个标量.