优选法介绍

（初　稿）

柯　　召

四 川 大 学 数 学 系

毛 主 席 语 录

路线是个纲，纲举目张。

鼓足干劲，力争上游，多快好省地建设社会主义。

自然科学是人们争取自由的一种武装。…………人们为着要在自然界里得到自由，就要用自然科学来了解自然，克服自然和改造自然，从自然里得到自由。

实践、认识、再实践、再认识，这种形式，循环往复以至无穷，而实践和认识之每一循环的内容，都比较地进到了高一级的程度。

我们不但要提出任务，而且要解决完成任务的方法问题。

目　　录

一、前　　言

在生产斗争和科学实验中，经常遇到这样的问题：

怎样选取合适的配方、合适的操作条件和制作过程，使产品质量最好，数量最多？

在质量的标准要求下，怎样使生产周期最短，成本最低？

已有的仪器怎样调试，使其性能最好？

也许有人说我们可以做大量的试验，把所有的可能性都做穷尽了，就能找到最好的方案和过程。但是大量的试验需要大量的时间、人力和物力，是少慢差费，而不是多快好省，而且有时还不一定是可能办得到的。比方说：炼某种合金钢，要用某种化学元素来加强其强度。这种元素少了不好，多了也不好。假定已经作出或从理论上算出加入量在1000克到2000克之间，要求确定最好的加入量是几克？如果从1001克，1002克，……逐一地做下去，一千个试验后才能发现最好的选择，或者说才能找到最好点。这种方法叫做“均分法”。这一方法显然是既浪费精力、时间，又浪费原材料，而且有时还不一定可能。譬如说，在炼钢中除去某元素的含量外，还有一个温度的因素影响。假设有十个选择可能，要用“均分法”找最好的含量和温度，就有

$$1000\times10=10000,$$

即一万个可能性。如果再加一个时间的因素，假设也有十个可能的选择，就有

$$1000\times10\times10=100000,$$

即十万个可能性了，要全部做完，是不大可能的。

虽然在实际工作中，一般都不是按照“均分法”来安排试验的，但是往往需要经过多次摸索，有较大的盲目性。从实践中总结提高出来的优选法，是在伟大领袖毛主席的哲学思想指导下，利用数学方法，指导我们尽量减少试验次数，达到迅速选择生产斗争和科学实验的最优方案的目的。例如在一个因素时，只要做19次就可以代替一万多次试验。对于上面所说的例子，用优选法就会变不大可能完成为可能完成。这是一个符合社会主义建设总路线的科学方法。

优选法在科学实验和生产中应用，已获得成效。北京电子管厂，在生产跃进形势中出现了钼丝严重缺少，当时电子管生产面临停工待料。他们开展了利用“废”钼丝的群众运动。这些钼丝，由于产地、批号、出厂日期不同，每盘钼丝退火温度差异很大，过去一点一点试验，难于找到合适的退火温度，即使终于找到了，但钼丝已在试验中消耗了大部分，收效很小。后来应用优选法做试验，只用几次试验，很快就可以确定每盘钼丝的合适退火温度，分别进行热处理，把过去大量积存的废钼丝复活了，已用废钼丝一百万米，节约资金十万元。上海炼油厂试验添加剂降低润滑油的凝固点。过去半年试验了一百三十七次，凝固点只降到零下40度。后来工人群众认真学习毛主席的光辉著作《矛盾论》和《实践论》，用优选法选择化学材料配比，改用国

内资源丰富的廉价材料，两个星期做了八次试验，使凝固点降到零下46度，大大超过以前半年的水平。这样的例子是很多的，在这里就不多说了。

优选法并不神秘，是劳动人民创造的，“**在某种意义上說，最聪明，最有才能的，是最有实践經驗的战士。**”有实践经验的劳动人民，一定会很好地掌握这一方法，并能有所发明创造，使这一方法得到进一步的发展。

在应用优选法时，我们一定要遵循毛主席的教导：“**坚持政治掛帅，加强党的領导，大搞羣众运动，实行两参一改三結合，大搞技术革新和技术革命。**”

在毛泽东思想的指导下，“优选法”可以作为广大工农兵在生产斗争和科学实验中的一个辅助工具。无论是具体分析问题、抓主要矛盾、确定实验范围的时候，或在实验过程中，还是总结提高时，都离不开战无不胜的毛泽东思想和直接从事生产实践的工人同志们。

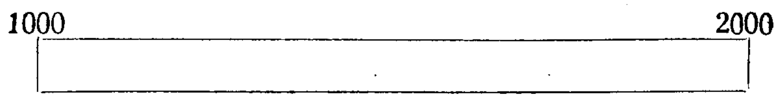
优选法必须通过群众运动的方式才能收效。而群众运动能夠搞得好，能夠持久深入，全靠党的领导。只有在党的领导下，大搞群众运动，才能使优选法在生产斗争和科学实验中起到应有的作用，更好地为社会主义建设服务。

二、单 因 素

§1 0.618 法

0.618 法又叫折纸法。我们还是从前面所提到的炼钢中加入某一元素的含量出发，来说明这个方法。

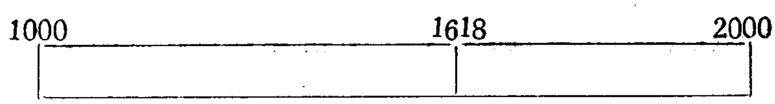
首先，請记住一个数 0.618（这个数是怎么来的，在 §4中将予以说明），并用一个有刻度的纸条来表达试验范围 1000 克～2000 克，如图所示：



在这张纸条长度的 0.618 倍的地方划上一条线，在这条线所标出的刻度处做一试验，即在

$$1000+(2000-1000)\times 0.618=1618 \text{ 克}$$

处做一试验，如下图所示：

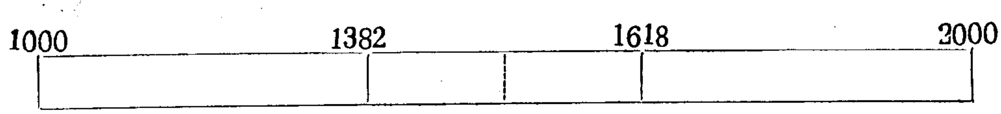


一般的，是在

$$\boxed{\text{头}}+\left(\boxed{\text{尾}}-\boxed{\text{头}}\right)\times 0.618$$

处做第一个试验。

然后把纸条对折，在刻线所对到的地方，再划一条线，这条线在 1382 克处，有如下图所示：



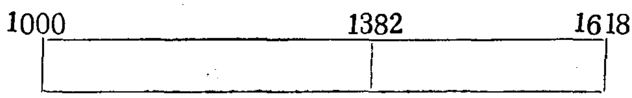
它也可以由对称性得到，即

$$1000+2000-1618=1382 \text{ 克}$$

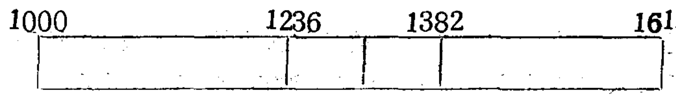
上面的计算启发我们得到一个公式：

$$\boxed{\text{头}}+\boxed{\text{尾}}-\boxed{\text{前一点}}=\boxed{\text{后一点}}$$

再按 1382 克做一次试验。对两次试验进行比较，“**有比較才能鉴别。有鉴别，有斗爭，才能发展。**”如果 1382 克的试验结果较好，我们在 1618 克处，把纸条的右边一段剪去，如下图所示（如果 1618 克试验较好，则在 1382 克处剪去左边一段）：



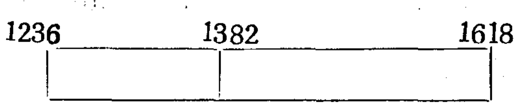
再把这个留下来的纸条对折，又可划出一条线在 1236 克处，如下图：



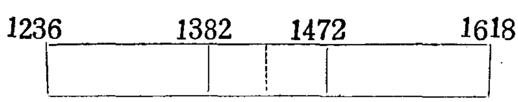
它也可以用前一公式得到：

$$1000+1618-1382=1236\text{ 克}$$

依 1236 克做试验，再和 1382 克的试验结果比较，如果仍然是 1382 克的试验结果较好，则在 1236 处剪去左边一段，如下图所示：



再对折，再做试验，再比较，再剪去一段，如下图：



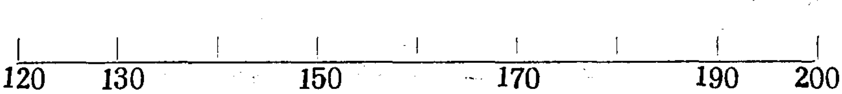
依此类推，继续做下去，每次留下好点所在的那一段。这样，不要几次，纸条便剪得差不多了，最优点也就找到了。这个方法叫做 0.618 法。

单因素优选法的整个过程就是先找出试验范围长度的 0.618 倍的地方，在这点做试验，依中对折，找出下一点，在此点做试验，比较后剪去一段，保留好点所在的那一段，循环往复地进行，一次比一次更接近所要求的好点，一直达到预定的精确度。

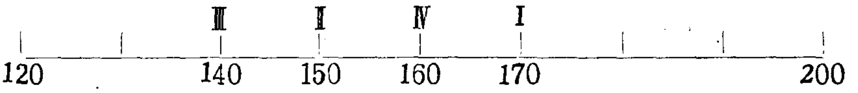
§2　分数法

有时由于各种原因，（例如进行一次试验费用较高或时间较长等等）只允许做一定个数的试验时，在试验范围内怎样选取试点最优？我们先举一个具体例子：

某单位要找一个化学反应的较好温度，已知在 120°c 时不起反应，而在 200°c 碳化。按具体条件，希望做 4 次试验得出结论。开始想按下图：



在 130°c，150°c，170°c，190°c 做 4 个试验，精度为 ±20°c。后来改为如图的安排：



先在Ⅰ处做试验，对折在Ⅱ处做试验。得出Ⅱ比Ⅰ好，去掉 170°c～200°c 这一段，又对折在Ⅲ处做试验，还是Ⅱ较好。又去掉 120°c～140°c 这一段。再在Ⅳ处做试验，仍是Ⅱ好。于是得出温度在 150° 时较好，精度达到 ±10°c。同样做 4 个试验，安排不同，精度提高一倍。

这后一种安排是把试验范围分为 8 等分，第一试验点选取在全长 $\frac{5}{8}$ 的地方，用 $\frac{5}{8}$ 代替上节的 0.618，同上节做法一样，对折找出一试点做试验，要求 4 次找到最优点所在的区间其长度 $=\frac{2}{8}\times$ 全长。

同样，分试验范围为 13 等分，从全长的 $\frac{8}{13}$ 处出发，5 次试验便找到最优点所在的区间，其长度 $=\frac{2}{13}\times$ 全长；分试验范围为 21 等分，从全长 $\frac{13}{21}$ 出发，6 次试验便找到最优点所在的区间，其长度 $=\frac{2}{21}\times$ 全长等等。这是一种比较实用的分数法。

这些分数是这样构成的：我们叫

$$F_0=1,\quad F_1=1,\quad F_2=F_0+F_1=1+1=2,$$
$$F_3=F_2+F_1=2+1=3,\quad F_4=F_3+F_2=3+2=5,$$
$$F_5=F_4+F_3=5+3=8,\quad F_6=F_5+F_4=8+5=13,$$
$$F_7=F_6+F_5=13+8=21,\quad F_8=F_7+F_6=21+13=34,\cdots\cdots.$$

一般的，有

$$F_{n+1}=F_n+F_{n-1},\qquad n=1,2,3,4,\cdots\cdots.$$

这些 F_n 是怎样得出来的，将在 §5 中给以说明。我们叫这些数为 F 一数。

用 $\frac{F_n}{F_{n+1}}$ 组成分数，即得上面提到的那些分数：

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \frac{13}{21},\ \frac{21}{34},\ \cdots\cdots.$$

用数串

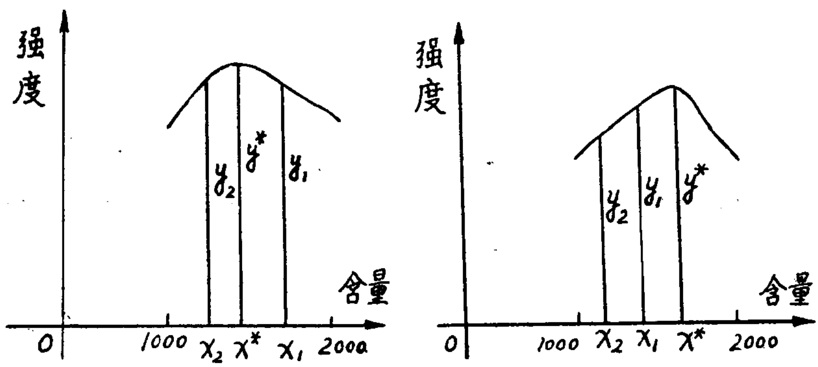
$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\cdots\cdots.$$

中相隣两个数，用小的 F_n 做分子，大的 F_{n+1} 做分母得到的分数 $\frac{F_n}{F_{n+1}}$ 来代替上节中所说的 0.618 这个数，用对折的方法去做，就可以在做 n 次试验后使得最后的留下区间长等于 $\frac{2}{F_{n+1}}\times$ 试验范围的长度。而且在这个留下区间的中点做过一次试验。故精度为 $\pm\frac{1}{F_{n+1}}\times$ 试验范围的长度。例如，取分数 $\frac{89}{144}$ 来确定第一个试点，则在

做 10 次试验后达到最后留下区间长等于 $\frac{2}{144}$ ×试验范围的长度，而且在这个留下区间的中点做过一次试验。如果用均分法就要做 143 次。

§3 单峯和对称点

(1) 有人可能要问，在优选过程中，最优试验点为什么不会丢掉？让我们仍旧拿炼鋼做例子。通常加进某元素后，随着含量的增加，强度会慢慢好起来，到一定程度后，又慢慢坏下去，它可以如图用曲线表示出来：



我们的任务是找最高强度 y^* 所对应的含量最优点 x^*. 很明显，在 x^* 的左边，随着含量增加，强度也增加；在 x^* 的右边，随着含量的增加，强度却减少，这样的现象，我们叫做单峯；图中的曲线，只是一个示意。对于这个曲线的具体形象我们是不知道的，如果已经画出了这条曲线，那末最优点就已经知道，不必进行优选了。

任取两个含量 x_1 和 x_2 並假定 x_2 在 x_1 的左边。如果 x^* 在 x_1 和 x_2 之间，则无论去掉 [1000, x_2] 这一段还是 [x_1, 2000] 这一段，x^* 都在留下的线段内。如果 x_1 x_2 都在 x^* 的左边，那末试验结果必然是 x_1 比 x_2 好，因此去掉的是 [1000, x_2] 这一段，x^* 也不会去掉。同样的可以讨论 x_1 和 x_2 都在 x^* 的右边时的情况。总之，最优点是不会丢掉的。

(2) 有人还会问，用折纸法进行优选，为什么一定要如图所示选对中点对称的两个试验点进行试验呢？

我们在优选法中是在 [a, b] 线段中选取一点 x_1 做试验后，再取一点 x_2 做试验，再进行比较，那一点较好。现在的问题是：x_1, x_2 取在那里最好？在还没有做试验前，那个点好是不知道的。当只做过 x_1 处的试验，x_1 和 x_2 的试验结果那个好还是不知道的，也即是 x_1 的比 x_2 的好和 x_2 的比 x_1 的好的可能性是相同的。因此，去掉 [a, x_2] 段和去掉 [x_1, b] 段的可能性是相同的。这便要求这两个线段一样长，即 x_1 和 x_2 两点对 a b 的中点是对称的，叫做对称点，如果 [a, x_2] 段和 [x_1, b] 段不一样

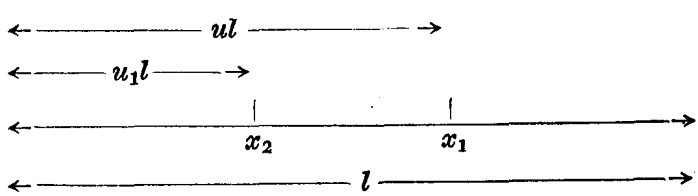
长。设 $[a, x_2]$ 比 $[x_1, b]$ 段短，试验结果可能去掉 $[a, x_2]$ 这一段，而留下 $[x_2, b]$ 这一段。如图所示，当初就应该把第二个试验点选在 x_1 的对称点 x_2' 那个地方，

那末不管试验结果去掉 $[x_1, b]$ 段或者是 $[a, x_2']$ 段，留下的那一段都比 $[x_2, b]$ 短。

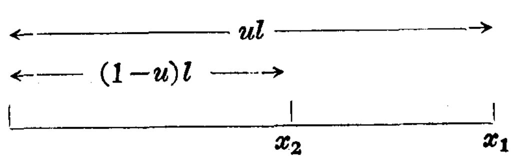
§4　0.618 是那里来的?

为什么要选取试验范围长度的 0.618 倍那一点作为第一个试验点？0.618 是那里来的？现在我们来回答这个问题。

(1)　如图，如果我们选取第一、第二个试验点 x_1, x_2 分别在试验范围长度 l 的 u 倍和 u_1 倍的地方。并假定数 u 是最好的选择。



那末由 §3 的道理，知道 u_1l 是 ul 的对称点。ul 的右端的长是 $(1-u)l$，所以 $u_1=1-u$ 假设在这两点 x_1, x_2 做两个试验后，比较效果的好坏，切去右端，即得下面的图形



现在 x_2 是全长 ul 的第一试验点，也应该在全长 ul 的 u 倍那个地方为最好，所以得出方程：

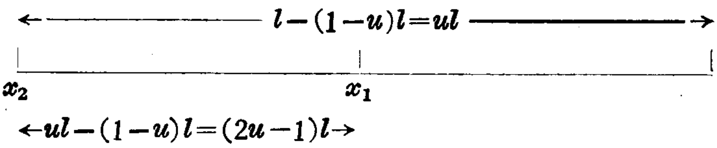
$$u^2=1-u.$$

解出它的正根

$$u=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618033989\cdots\cdots$$

用 u 来选取试点的方法叫做黄金分割法。因为 u 是平面几何学上黄金分割法的比值。取定的四位小数近似值，就是 0.618.

(2)　有人也许要问下面的问题：如果比较 x_1, x_2 两点的试验，在点 x_1 处的试验效果较好，切去左端，得出下图：



如果令 x_2, x_1 两点间的长度为留下全长的 u 倍，就得

$$u^2=2u-1,$$

得出 $u=1$，而不是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，这又该怎样解释呢？

这个问题很容易回答。刚才是说 x_1 位于 l 的 u 倍处，所以切掉右端后，x_2 也应位于新的长度 ul 的 u 倍地方。现在 x_2 是位于长 l 的 $1-u$ 倍处，所以切掉左端后，x_1 也应位于新的长度 ul 的 $1-u$ 倍处，由于 x_2, x_1 间的长度为 $2u-1$，所以

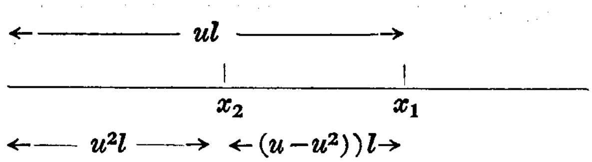
$$2u-1=(1-u)u,$$

简化这个方程，仍然得出

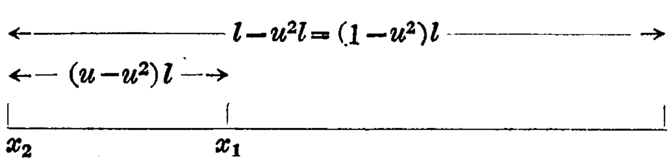
$$u^2=1-u.$$

因为你令 $(2u-1)l$ 等于全长 ul 的 u 倍是错误的，所以得出错误的结果。

(3) 如果我们不用对称点这个关系，也可以得出 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 这个数。如图，切去右



端时，x_2 位于留下的长度 ul 的 u 倍，即在 u^2l 的地方。那末 x_2, x_1 间的长度应为 $ul-u^2l=(u-u^2)l$. 如果比较 x_1, x_2 两点的试验结果时，在 x_1 点的试验结果较好，切去左端，因为我们的方法是对任意的情况来说的，所以对某一种情形，会切去右端，对另一种情形，会切去左端。我们的方法，要对这两情形都能适合。得出下面的图形



因为原来 x_2 在全长 l 的 u^2 倍地方，所以 x_1, x_2 间的长度也应为留下长度 $(1-u^2)l$ 的 u^2 倍，但 x_1, x_2 间的长度为 $(u-u^2)l$ 所以得出

$$u-u^2=u^2(1-u^2).$$

即
$$u(1-u)=u^2(1-u)(1+u),$$

因 u 不能等于 0 或 1，两即约去 $u(1-u)$，得出

$$1=u(1+u),$$

仍然是上面说过的正根为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的方程：

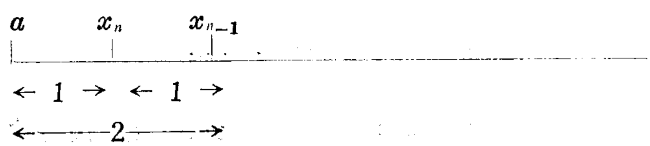
$$u^2=1-u.$$

(4) 我们取 0.618 是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的四位小数近似值。根据实际需要，也可以取 0.6，0.62 或比 0.618 更精确的近似值 0.61803，0.618034，等等。但是位数取多了，计算起来不方便，取小了，准确度又差一些，所以一般以取四位小数近似值 0.618 较好。这就是 0.618 的由来。

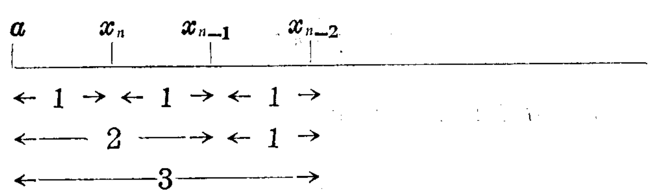
§5 F_n 是怎样得来的？

在分数法中，我们用到数 F_n. 现在要问这些数是怎样得来的？

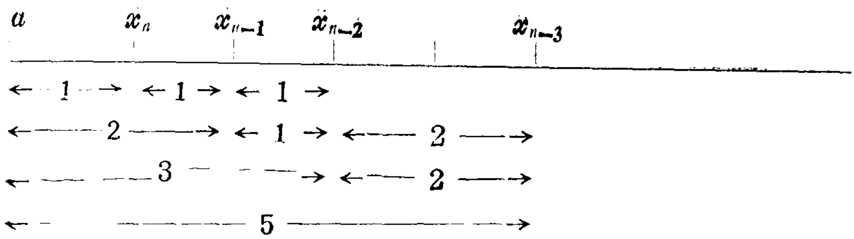
(1) 为说明起来方便一些，设想每次切去的部份都在试点右端。做了 n 个试验。把第 n 次试点 x_n 放在离 a 点长为 1 所在的地方，第 $n-1$ 次试点 x_{n-1} 放在离 a 点长为 2 所在的地方把试点的次序倒转过来进行分析。如图：



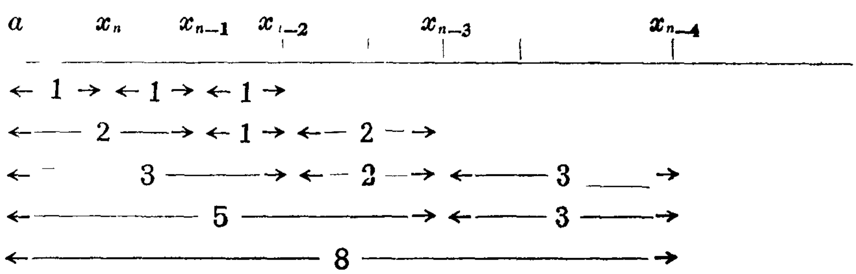
因为在做完第 n 次和第 $n-1$ 次试验后，切去的是 x_{n-1} 的右端，应用对称点的道理，在 x_{n-1} 右端切去的长等于 ax_n 的长，即等于 1. 所以第 $n-2$ 次试点一定在离 a 点长为 3 的地方，如图：



在做完第 $n-1$ 次和第 $n-2$ 次试验后，切去的 x_{n-2} 右端部份的长度要等于 ax_{n-1} 的长 2，所以第 $n-3$ 次试点一定在离 a 点长为 5 的地方，得出下图：



在做完第 $n-2$ 次和第 $n-3$ 次试验后，切去的 x_{n-3} 右端部分长度要等于 ax_{n-2} 的长度 3，所以第 $n-4$ 次试点是在离 a 点长为 8 的地方，有如下图所示：



照这样子，继续做下去，就得出一串数

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\cdots$$

从上图可以看得很清楚， 由第三个数开始它们每一个数都是前面两个数的和。 如叫 $F_0=F_1=1$，就会有：

$$F_{n+1}=F_n+F_{n-1},\quad n=1,2,3,4\cdots$$

(2)* [註] 我们从 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，也可以得出这些数 F_n 来。因为 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 满足方程

$$u^2=1-u,$$

即得

$$u=\frac{1}{1+u}. \tag{1}$$

把 u 的式子代入上式右节分母中的 u，得出：

$$u=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+u}}. \tag{2}$$

[註] 以后凡是遇到如有 * 号的章节段落，可以略去不看，这对于阅读其他章节，並无妨碍。

再把（1）式代入（2）式右节中的 u，得出：

$$u=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+u}}},$$

如此继续做下去，我们得出 u 的一个连分数展开式：

$$u=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}}.$$

如果切去分母中第一个加号的后面部分，就得出 1；如果切去分母中第二个加号的后面部分，就得出 $\frac{1}{2}$；切去第三个加号的后面部分，得出 $\frac{2}{3}$；切去第四个加号的后面部分，得出 $\frac{3}{5}$；依此类推，我们得出一串分数：

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \frac{13}{21},\ \frac{21}{34},\ \cdots$$

它们正好就是 $\frac{F_n}{F_{n+1}}$，$n=0, 1, 2, 3, \cdots$，都是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的渐近分数。

(3)* 我们还可以用归纳法证明：

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}. \tag{3}$$

因为 $n=0$ 时

$$F_0=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}=1,$$

在 $n=1$ 时，

$$F_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}-\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right\}=1,$$

所以（1）式对于 $n=0$ 和 1 是成立的。假设（3）式对于 $n=k-1$ 和 $k-2$ 是成立的。

现在来证明 (3) 式对 $n=k$ 能够成立，因而 (3) 式对于任意 n 都是成立的。因为已知

$$F_k=F_{k-1}+F_{k-2},$$

故知：

$$\begin{aligned}
F_k&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right\}+\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right\}\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right\}\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right\}\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right\}.
\end{aligned}$$

这就证明了 (3) 式，它是 F_n 的一般表示式。

同时我们也很容易得出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=u=\frac{\sqrt{5}-1}{2}. \tag{4}$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_n+F_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{F_{n-1}}{F_n}}.$$

但

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n-1}}{F_n}.$$

叫它做 u，就得出

$$u=\frac{1}{1+u},$$

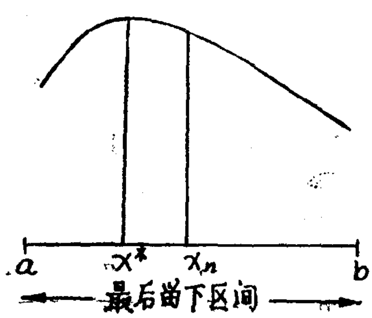
这就是 (1) 式，所以 (4) 式是成立的。

§6* 最优的单因素优选法

在单峰的情形下，我们已经介绍了两个优选方法，一个是分数法，一个是黄金分割法。现在我们来证明，在事先给定试验次数时对任意函数来说，用分数法来优选最好。

先来说明一下“最好”的意义。

如图，在最后留下的区间中包含着所求的最优点 x^* 和已做过试验的最优试点 x_n. 我们用符号 d 表示最优点和最优试点间的最大可能距离，即



$$d = x^* \text{和} x_n \text{的最大可能距离。}$$

因为 x_n 是知道的，x^* 是不知道的。在图上，x^* 可以落在 ab 中的任何一点，所以 d 是 ax_n 和 x_nb 这两段中较长一段的长度。

设开始的试验范围的长度为 l，叫

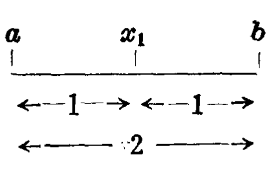
$$\text{精确度} = \frac{d}{l}.$$

在给定的试验次数为 n 时，我们说优选法 A 比优选法 B 好，是指对于同一个长为 l 试验范围，对于任意单峯函数来说，用 A 去优选经过 n 次试验后所得出的精确度 R_A 比用 B 去优选在试验次数不超过 n 时所得出的精确度 R_B 要好一些，亦即 $R_A<R_B$. 如果我们固定 d 的数值，假设用优选法 A 去优选，经过 n 次试验后，可以使最大的试验范围达到 l_A，而用优选法 B 去优选，在试验次数不超过 n 时可以使最大的试验范围达到 l_B，那末在 $l_A>l_B$ 时，我们说优选法 A 比 B 好，因为在此时，$\frac{d}{l_A}<\frac{d}{l_B}$. 这是一个问题的两种说法，实质上是完全一样的。现在用后一种说法来证明本节开头所提出的结论，就是说要证明用分数法做 n 次试验来优选，比用任何其他方法来优选而试验次数不超过 n 时，所达到的最大试验范围都要大一些。

为简便计，固定 $d=1$. 用归纳法来证明：

由 §2 知，分数法作 n 次试验后的精度 $d=\frac{1}{F_{n+1}}\times$试验范围长度，若固定 $d=1$，则试验范围 $l_n=F_{n+1}$.

在 $n=1$ 时，$l_1=F_2=2$，试点在中点，如下图：



反之，当 $l_1=2$ 时，试点除在中点处外，偏左偏右都将有 $d>1$. 如果 $l_1>2$，那末把 x_1 放在 ab 线段的任何一点，显然都会使 $\frac{d}{l_1}>\frac{1}{2}$.

在 $n=2$ 时，$l_2=F_3=3$，试点位置如图：