

弹性版影响场

A. 普赫尔著

科学出版社

TU311
L2

弹性版影响场



5A1C99/01
科学出版社

1959

ADOLF PUCHER
EINFLUSSFELDER ELASTISCHER PLATTEN

1958

內 容 簡 介

在鋼筋混凝土結構中应用的版有基础版、樓面板、屋盖板，以及桥面板等。版的解是一个在应用上較麻煩的彈性理論問題。

本书介紹的彈性版影响場，在意义上与桿件承載結構的影响綫一样，仅是从單維发展到二維而已。书內共列举 81 种影响場，其中：在版的形式方面包括帶形版、矩形版（边比为 0.5, 0.667, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4）和圓版；在版边的支承条件方面包括嵌固、簡支和自由，以及它們的各种組合；在截面力种类方面包括版中央弯矩、支承弯矩、扭矩、切力和支承力。这些影响場基本上已足够給出所有可能遇到的版的数据；即使有时条件不尽相符，亦能通过參酌对照和用插入法等滿意地給出符合設計要求的近似值。

此外，使用本书的影响場时，不要求太高深的理論認識。所需計算工作量亦要比用一般的彈性理論計算法則小几倍。

彈 性 版 影 响 場

A. 普 赫 尔 著

朱 振 德 譯

*

科学出版社出版（北京朝陽門大街 117 号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第 051 号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1959 年 12 月 第 一 版

1959 年 12 月 第一次印刷

(京) 0001—8,000

书号：1963 字数：24,000

开本：787×1092 1/10

印张：2 插页：43

定价：3.70 元

目 录

§ 1. 引言.....	1
§ 2. 简述影响場基本原理.....	2
§ 3. 对影响場的識別.....	3
§ 4. 影响場計值工作.....	5
a) 力矩(弯矩、扭矩和支承弯矩)影响場.....	5
b) 切力和支承力影响場	5
c) 計算体积和面积的方法	6
§ 5. 应用举例.....	7
§ 6. 結果的准确度.....	10
§ 7. 影响場的扩大应用.....	12
参考文献.....	14

图 表 目 录

条 形 版

- 图表 1. 带有两个简支边的条形版在其版中央 m_x 影响场 (8 π 倍).
 图表 2. 带有两个简支边的条形版在其版中央 m_y 影响场 (8 π 倍).
 图表 3. 带有一个嵌固边和一个简支边的条形版在其版中央 m_x 影响场 (8 π 倍).
 图表 4. 带有一个嵌固边和一个简支边的条形版在其版中央 m_y 影响场 (8 π 倍).
 图表 5. 带有一个嵌固边和一个简支边的条形版在其嵌固边的支承弯矩 m_x 影响场 (8 π 倍).
 图表 6. 带有两个嵌固边的条形版在其版中央 m_x 影响场 (8 π 倍).
 图表 7. 带有两个嵌固边的条形版在其版中央 m_y 影响场 (8 π 倍).
 图表 8. 带有两个嵌固边的条形版在其嵌固边的支承弯矩 m_x 影响场 (8 π 倍).

半 条 形 版

- 图表 9. 带有两个简支纵边的半条形版在其嵌固横边中心的支承弯矩 m_y 影响场 (8 π 倍).
 图表 10. 带有两个简支纵边的半条形版在其自由横边中心的 m_x 影响场 (8 π 倍).
 图表 11. 带有两个简支纵边的半条形版在其自由横边角点的切力 q_x 影响场 (a 倍, a = 版条的支承宽度).
 图表 12. 带有一个简支纵边和一个嵌固纵边的半条形版在其嵌固横边中心的支承弯矩 m_y 影响场 (8 π 倍).
 图表 13. 带有两个嵌固纵边的半条形版在其嵌固横边中心的支承弯矩 m_y 影响场 (8 π 倍).

矩 形 版

- 图表 14. 带有四个简支边的矩形版在其版中央 m_x 影响场 ($a/b = 0.8$, 8 π 倍).
 图表 15. 带有四个简支边的矩形版在其版中央 m_y 影响场 ($a/b = 0.8$, 8 π 倍).
 图表 16. 带有四个简支边的矩形版在其版中央 m_x 影响场 ($a/b = 1.0$, 8 π 倍).

- 图表 17. 带有四个简支边的矩形版在其四分之一点 m_x 影响场 ($b/a = 1.0$, 8 π 倍).
 图表 18. 带有四个简支边的矩形版在其四分之一点 m_y 影响场 ($b/a = 1.0$, 8 π 倍).
 图表 19. 带有四个简支边的矩形版在其角点近处 m_u 影响场 ($b/a = 1.0$, 8 π 倍).
 图表 20. 带有一个嵌固边的矩形版在其版中央 m_x 影响场 ($b/a = 0.8$, 8 π 倍).
 图表 21. 带有一个嵌固边的矩形版在其版中央 m_y 影响场 ($b/a = 0.8$, 8 π 倍).
 图表 22. 带有一个嵌固边的矩形版在其嵌固边中心的支承弯矩 m_y 影响场 ($b/a = 0.8$, 8 π 倍).
 图表 23. 带有一个嵌固边的矩形版在其版中央 m_x 影响场 ($b/a = 1.0$, 8 π 倍).
 图表 24. 带有一个嵌固边的矩形版在其版中央 m_y 影响场 ($b/a = 1.0$, 8 π 倍).
 图表 25. 带有一个嵌固边的矩形版在其嵌固边中心的支承弯矩 m_y 影响场 ($b/a = 1.0$, 8 π 倍).
 图表 26. 带有一个嵌固边的矩形版在其版中央 m_x 影响场 ($b/a = 1.2$, 8 π 倍).
 图表 27. 带有一个嵌固边的矩形版在其版中央 m_y 影响场 ($b/a = 1.2$, 8 π 倍).
 图表 28. 带有一个嵌固边的矩形版在其嵌固边中心的支承弯矩 m_y 影响场 ($b/a = 1.2$, 8 π 倍).
 图表 29. 带有两个相邻嵌固边的矩形版在其版中央 m_x 影响场 ($a/b = 0.8$, 8 π 倍).
 图表 30. 带有两个相邻嵌固边的矩形版在其版中央 m_y 影响场 ($a/b = 0.8$, 8 π 倍).
 图表 31. 带有两个相邻嵌固边的矩形版在其嵌固边中心的支承弯矩 m_x 影响场 ($a/b = 0.8$, 8 π 倍).
 图表 32. 带有两个相邻嵌固边的矩形版在其嵌固边中心的支承弯矩 m_y 影响场 ($a/b = 0.8$, 8 π 倍).
 图表 33. 带有两个相邻嵌固边的矩形版在其版中央 m_y 影响场 ($b/a = 1.0$, 8 π 倍).
 图表 34. 带有两个相邻嵌固边的矩形版在其边中心的支承弯矩 m_y 影响场 ($b/a = 1.0$, 8 π 倍).
 图表 35. 带有两个对立嵌固边的矩形版在其版中央 m_x 影响场 ($b/a = 0.8$, 8 π 倍).
 图表 36. 带有两个对立嵌固边的矩形版在其版中央 m_y 影响场 ($b/a = 0.8$, 8 π 倍).
 图表 37. 带有两个对立嵌固边的矩形版在其嵌固边中心的支承弯矩 m_y 影响场 ($b/a =$

$= 0.8, 8\pi$ 倍)。

图表 38. 带有两个对立嵌固边的矩形版在其版中央 m_x 影响场 ($b/a = 1.0, 8\pi$ 倍)。

图表 39. 带有两个对立嵌固边的矩形版在其版中央 m_y 影响场 ($b/a = 1.0, 8\pi$ 倍)。

图表 40. 带有两个对立嵌固边的矩形版在其嵌固边中心的支承弯矩 m_y 影响场 ($b/a = 1.0, 8\pi$ 倍)。

图表 41. 带有两个对立嵌固边的矩形版在其版中央 m_x 影响场 ($b/a = 1.2, 8\pi$ 倍)。

图表 42. 带有两个对立嵌固边的矩形版在其版中央 m_y 影响场 ($b/a = 1.2, 8\pi$ 倍)。

图表 43. 带有两个对立嵌固边的矩形版在其嵌固边中心的支承弯矩 m_y 影响场 ($b/a = 1.2, 8\pi$ 倍)。

图表 44. 带有两个对立嵌固边的矩形版在其版中央 m_x 影响场 ($b/a = 1.4, 8\pi$ 倍)。

图表 45. 带有两个对立嵌固边的矩形版在其版中央 m_y 影响场 ($b/a = 1.4, 8\pi$ 倍)。

图表 46. 带有两个对立嵌固边的矩形版在其嵌固边中心的支承弯矩 m_y 影响场 ($b/a = 1.4, 8\pi$ 倍)。

图表 47. 带有三个嵌固边的矩形版在其版中央 m_x 影响场 ($b/a = 0.8, 8\pi$ 倍)。

图表 48. 带有三个嵌固边的矩形版在其版中央 m_y 影响场 ($b/a = 0.8, 8\pi$ 倍)。

图表 49. 带有三个嵌固边的矩形版在其嵌固边中心的支承弯矩 m_x 影响场 ($b/a = 0.8, 8\pi$ 倍)。

图表 50. 带有三个嵌固边的矩形版在其嵌固边中心的支承弯矩 m_y 影响场 ($b/a = 0.8, 8\pi$ 倍)。

图表 51. 带有三个嵌固边的矩形版在其版中央 m_x 影响场 ($b/a = 1.0, 8\pi$ 倍)。

图表 52. 带有三个嵌固边的矩形版在其版中央 m_y 影响场 ($b/a = 1.0, 8\pi$ 倍)。

图表 53. 带有三个嵌固边的矩形版在其嵌固边中心的支承弯矩 m_x 影响场 ($b/a = 1.0, 8\pi$ 倍)。

图表 54. 带有三个嵌固边的矩形版在其嵌固边中心的支承弯矩 m_y 影响场 ($b/a = 1.0, 8\pi$ 倍)。

图表 55. 带有三个嵌固边的矩形版在其版中央 m_x 影响场 ($b/a = 1.2, 8\pi$ 倍)。

图表 56. 带有三个嵌固边的矩形版在其版中央 m_y 影响场 ($b/a = 1.2, 8\pi$ 倍)。

图表 57. 带有三个嵌固边的矩形版在其嵌固边中心的支承弯矩 m_x 影响场 ($b/a = 1.2, 8\pi$ 倍)。

图表 58. 带有三个嵌固边的矩形版在其嵌固边中心的支承弯矩 m_y 影响场 ($b/a = 1.2, 8\pi$ 倍)。

图表 59. 带有四个嵌固边的矩形版在其版中央 m_x 影响场 ($b/a = 0.8, 8\pi$ 倍)。

图表 60. 带有四个嵌固边的矩形版在其版中央 m_y 影响场 ($b/a = 0.8, 8\pi$ 倍)。

图表 61. 带有四个嵌固边的矩形版在其长嵌固边中心的支承弯矩 m_y 影响场 ($b/a = 0.8, 8\pi$ 倍)。

图表 62. 带有四个嵌固边的矩形版在其版中央 m_x 影响场 ($b/a = 1.0, 8\pi$ 倍)。

图表 63. 带有四个嵌固边的矩形版在其四分之一点 m_x 影响场 ($b/a = 1.0, 8\pi$ 倍)。

图表 64. 带有四个嵌固边的矩形版在其四分之一点 m_y 影响场 ($b/a = 1.0, 8\pi$ 倍)。

图表 65. 带有四个嵌固边的矩形版在其嵌固边中心的支承弯矩 m_y 影响场 ($b/a = 1.0, 8\pi$ 倍)。

图表 66. 带有四个嵌固边的矩形版在其版中央扭矩 m_{xy} 影响场 ($b/a = 1.0, 8\pi$ 倍)。

图表 67. 带有四个嵌固边的矩形版在其版中央切力 q_y 影响场 ($b/a = 1.0, 2\pi a$ 倍, $a = \text{边长}$)。

图表 68. 带有四个嵌固边的矩形版在其嵌固边中心的支承力 q_y 影响场 ($b/a = 1.0, \pi a$ 倍, $a = \text{边长}$)。

图表 69. 带有两个自由边和两个简支边的矩形版在其版中央 m_x 影响场 ($b/a = 0.5, 8\pi$ 倍)。

图表 70. 带有两个自由边和两个简支边的矩形版在其版中央 m_y 影响场 ($b/a = 0.5, 8\pi$ 倍)。

图表 71. 带有两个自由边和两个简支边的矩形版在其自由边中心 m_x 影响场 ($b/a = 0.5, 8\pi$ 倍)。

图表 72. 带有两个自由边和两个简支边的矩形版在其版中央 m_x 影响场 ($b/a = 0.667, 8\pi$ 倍)。

图表 73. 带有两个自由边和两个简支边的矩形版在其版中央 m_y 影响场 ($b/a = 0.667, 8\pi$ 倍)。

图表 74. 带有两个自由边和两个简支边的矩形版在其自由边中心 m_x 影响场 ($b/a = 0.667, 8\pi$ 倍)。

圆 版

图表 75. 沿周周简支的圆版在其圆心点 m_x 影响场 (8π 倍)。

图表 76. 沿周周简支的圆版在其四分之一点 m_x 影响场 (8π 倍)。

图表 77. 沿周周简支的圆版在其四分之一点 m_y 影响场 (8π 倍)。

图表 78. 沿周周嵌固的圆版在其圆心点 m_x 影响场 (8π 倍)。

图表 79. 沿周周嵌固的圆版在其四分之一点 m_x 影响场 (8π 倍)。

图表 80. 沿周周嵌固的圆版在其四分之一点 m_y 影响场 (8π 倍)。

图表 81. 沿周周嵌固的圆版在其一个边缘点支承弯矩 m_x 影响场 (8π 倍)。

§ 1. 引言

自从在杆件承载结构的静力学中有了“影响綫”以来,人們每喜利用“影响綫”来计算由活荷载或荷重組(交通荷载)引起的截面力,因为影响綫不仅毫无困难地給出預知布局的荷载所起的截面力,而且容易用以識別最不利的荷重位置。

因此在每个结构力学学者所从事的工作面前,又提出有关杆件系統影响綫理論和工作方法的廣闊范畴。此外,对于某些易于归类的杆件承载结构,尤其对一些等慣矩的或对一些变慣矩的直梁,已經出版过許多图表著作,給出无因次的基本数据,这些系数再乘以与杆件系統尺寸相关的数值,为許多“頂点”提供影响綫。这些图表著作,使结构力学学者在实际工作中节省了許多劳动,因此,是被人所乐用的。

从单維的杆件影响綫发展到二維的版而成为“影响場”,观念本来很相近的。随着人們懂得利用版的二維行为后——尤其在钢筋混凝土结构中——用版作为结构构件逐渐现实起来。

因此这个課題的理論处理与版理論的其他部分的发展比較起来要晚些。

关于挠度影响場的观念,首先是由亨斯基(Hencky)^[1],也可能已由更早一些的人提出。按照馬克思威尔定理,挠度影响場就是由点荷重所引起的挠曲面。对于規定的荷载可利用积分来求挠曲面的公式,这里毋須对挠曲影响場的意义詳細敘述。这个方法先后被很多学者采用,可是都沒有注意到影响場的意义。即如在納戴(Nadai)^[2]編著的比較詳細的关于弹性版理論的著作中也还見不到有关影响場方面的概念性的說明。

固然结构力学学者对版挠度影响場并不感兴趣,因为在設計中主要須要

知道的不是挠度,而是截面力。因此我們須要探求截面力——弯矩和切力——的影响場。

在这方面最早的理論应归源于奈門伊(Nemenyi)^[3]和韦司脫加德(Westergaard)^[4];可是他們都沒有能对自己的有价值的成果繼續进行深入研究,虽然这些为进一步理論发展确是意义重大的。

作者可能是第一个对截面力影响場作了比較完整的研究,这方面狄兴格(Dischinger)^[5]有过一篇敘述矩形版弯矩影响場的报告。此后不久作者^[6]发表了第一篇的指出基本要点的理論文章,闡述了所謂影响場的奇异点的閉合分析公式。显然与这篇文章无关系地出現了奧立克(Ohlig)^[7]和皮特奈(Bittner)^[8]的論文;他們对本問題的一些特例企图单纯地用級数分析来解;可是在頂点周围因級数分析收敛不好而失效,而且对于問題的中心,即每种截面力的典型性奇异点,无法解释。纵然如此,尤其是皮脫納所著的图表在实际工作中已可应用。

有关理論的进一步发展,例如对各种影响場的奇异点及对影响場本身的計算方法的分析闡述,作者^[9,10,11]、W. 柯波斯基(W. Koepcke)^[12-13]、W. 特伏尔柴克(W. Dworzak)^[14]、R. 斯尼大立克(R. Snidaric)^[15]介紹了一系列文章,至于最近的一些收获还未見发表。除上列陸續发表的一些文章外,如所知道的,还有奥尔逊(Olsen)、萊恩尼茲胡伯(Reinitzhuber)^[16]和 L. 波尔逊(L. Poersen)^[17]发表了关于这个課題的报告。

从此,这方面的理論已是相当丰富起来。作者拟把它写成一本專門的书籍来出版。这本书是为适应应用结构力学的需要而編写的,如要包括詳細的理論闡述,則其篇幅負担太重了。

对于这些有实用价值的有关截面力影响场的成果,不要求人们太高深的理论认识就可使用;正如人们对对数的理论没有详细认识而亦能计算一

样。结构力学者对于各种荷重情况进行计值的方法将在以下各章中叙述。这些方法已能用最少的计算工作量提供最准确的结果。

§ 2. 简述影响场基本原理

影响场理论与普通版理论一样,是从相同的假定出发的,例如:版的等厚度对比其它尺寸来说是微小的;材料是匀质的、各向同性的并且服从虎克定律;挠度对比厚度来说是微小的。

这些假定只是有条件地适用于我们的材料,尤其对于钢筋混凝土。但是多年来的实践告诉我们,根据这些假定来计算截面力,并完全按照这种方法来进行设计,在钢筋混凝土结构中同样获得具有足够安全度的构筑物。所以影响场亦可适用于计算钢筋混凝土版。

版的弯矩是与横胀系数 μ 有关的; μ 是一个材料常数,因此是不变的。欲得与 μ 值无关的结果,必须在弯矩影响场中代 $\mu = 0$ 。因此严格的说,弯矩影响场可用弯曲影响场来代替。所以对钢筋混凝土版来说,由于它的 μ 比钢料的要小得很多,这个假定很是近似适用的。可是,以后还将交待,人们有办法去处理每个 μ 值的。

因为,对于所有服从虎克定律的弹性体,亦能适用马克斯威尔位移互易定律和迭加定律,所以弹性版在点荷重作用下的弯曲面亦就是这个荷重作用点的挠度影响面或挠度影响场。

假定 $A(u, v)$ 是荷重 $Q = 1$ 的作用点, $P(x, y)$ 是任意一个点(图1),则弯曲面的公式可用符号写成:

$$K(u, v; x, y).$$

因此坐标 (u, v) 指明影响场的顶点。影响场是与四个变数 $(u, v; x, y)$ 相关的,因为对于所有影响场的全部来讲,顶点亦在版的整个范围内变动;可是顶点的坐标 (u, v)

对于每个单独的影响场作为参数来讲则是不变的。

计算在顶点上由任意一个荷重组 $P_i(x_i, y_i)$ 和任意一个连续分布的荷重 $p(x, y)$ 所引起的挠度 $w(u, v)$ 可用公式:

$$w(u, v) = \sum_i P_i K(u, v; x_i, y_i) + \iint p(x, y) K(u, v; x, y) dx dy. \quad (2, 1)$$

这个式子来自迭加定律,并且与桿件挠度 $y(u)$ 的影响线 $\eta(u; x)$ 的计值规则相对应的。

$$y(u) = \sum_i P_i \eta(u; x_i) + \int p(x) \eta(u; x) dx. \quad (2, 1a)$$

仅是由(2, 1a)的单维关系变为(2, 1)的二维关系。

对于版的设计工作来说,最主要的是弯矩和剪力;至于挠度则较少兴趣。因此我们要探求的是截面力的影响场。

根据弹性版理论将弯曲面经微分后而得弯矩和剪力。这些是:

$$m_u = -N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right), \quad (2, 2a)$$

$$m_v = -N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \right), \quad (2, 2b)$$

$$m_{uv} = -N \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}, \quad (2, 2c)$$

$$q_u = -N \frac{\partial \Delta w}{\partial u}, \quad (2, 2d)$$

$$q_v = -N \frac{\partial \Delta w}{\partial v}. \quad (2, 2e)$$

在公式(2, 2a)和(2, 2b)中,包含着与材料性质有关的横胀系数 μ 在内。

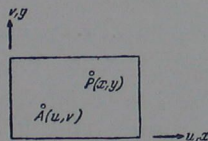


图1. 顶点A具有坐标 (u, v) 和荷重点P具有坐标 (x, y)

由于以下的推理中要代 $\mu = 0$, 所以获得如下的简化:

$$m_u = -N \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}, \quad (2, 2a')$$

$$m_v = -N \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}. \quad (2, 2b')$$

使(2,1)服从于公式(2,2)的微分规律, 显然就得, 例如:

$$m_u = -N \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = -N \left[\sum_i P_i \frac{\partial^2 K(u, v; x_i, y_i)}{\partial u^2} + \iint p(x, y) \frac{\partial^2 K(u, v; x, y)}{\partial u^2} dx, dy \right]; \quad (2, 3)$$

这是一个在构造形式上完全相同于(2, 1)的式子, 只是其中的 K 被 $\frac{\partial^2 K}{\partial u^2}$ 代替了.

由此显见, $-N \frac{\partial^2 K(u, v; x, y)}{\partial u^2}$ 就是弯矩影响场; 说得明确一些, 由于 $\mu = 0$, 所以亦就是弯曲影响场.

因为(2,1)可以按照(2,2)中的每个规则进行微分, 所以适用定理:

“由挠曲面经微分来求所有截面力的影响场是这样进行的: 将挠度影响

场, 即点荷重所引起的挠曲面, 对顶点的坐标适当地加以微分”.

在大多数情况下, 是不可能具体施行微分的, 因为当具有任意作用点的点荷重作用时, 包含顶点坐标 u, v 的弯曲面的分析式子, 除少数特例外, 是不知道的. 即当能够用级数公式(例如拿戴和亨思基的解法)表达的时候, 虽然详细的计算, 用这个方法也得不出满意的结果, 尤其在顶点周围.

为了探求影响场, 因而发展了另外一些需要计算工作较少而获得结果很准确的方法. 如同已在 §1 中曾经提到过, 企图将这方面的丰富内容写成一本专门的著作. 至于在这本书里, 只能把一些基本推理进行到一定程度来适应应用方面日益增长的需要. 最后, 关于进行影响场的计算工作一般不须要深入理解理论, 因为采用这个方法只须记住最简单的运算手续就够了.

如果知道了同一顶点的两个互相垂直的截面方向的弯矩影响场, 那末处理任一横胀系数都是可能的. 比较公式(2, 2a、b)与(2, 2a'、b'), 我们知道, 首先对同一荷重位置的两个方向的影响场进行计算, 然后只须用 μ 乘第二方向的结果, 再并入第一方向的结果. 因此采用现在讲的影响场是可以处理任意的 μ 值了.

§3. 对影响场的识别

用等高线表示的影响场的形状是由下列三个情况来决定的:

- 根据截面力的类别(弯矩、扭矩、切力等)和顶点的位置,
- 根据板边缘的轮廓形状,
- 根据版的支承类型.

关于 a), 人们从一根影响线上立即会看出顶点在那里; 以及根据影响线在顶点出现纵距跳跃还是角点, 立即知道它是切力或是弯矩. 同样对于弹性版亦可立刻知道影响场顶点的位置和影响场的类型.

每种影响场, 例如在其顶点的周围近处具有相同的形状, 常重复出现等

高线特征的图形.

尤其应加注意的: 孔弯矩影响场和切力影响场在其顶点得无限大的数值. 其余截面力(嵌固弯矩、扭矩)的影响场在顶点依然为有限值, 例如图2是一个弯矩影响场的透视图, 在其顶点处出现一个逐渐变细的无限长的管子, 图中在任意一处把它截断了.

对于各种截面力在顶点周围等高线形状如图3所表示, 同时附有文字解释. 人们如能熟记这些图形, 则对每个影响场的类别和其顶点可以立加鉴别.

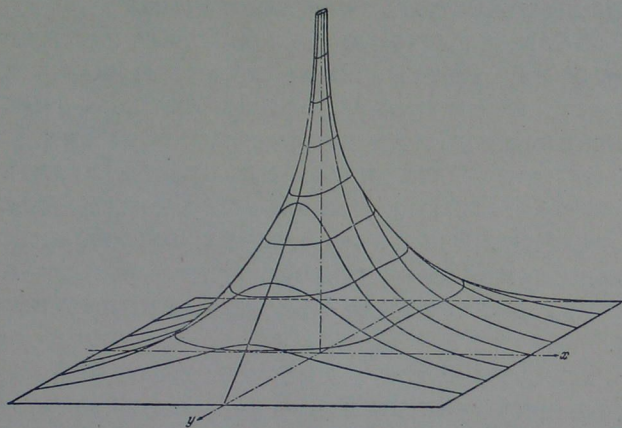


图2. 弯矩影响场的透视图,任意一处截断了其在顶点处无限长的、具有有限体积的细管。

关于 b). 影响场是用一个与版的边缘形状相似的边缘外形来围限的, 因此人们立即可以知道, 选用怎样一个影响场是适用的。尤其在矩形版上, 边的比值对影响场的适用性是很重要的。

关于 c). 版的边可以有許多种不同支承形式:

1. 无旋转和无位移(嵌固边),
2. 弹性旋转和无位移(弹性嵌固边),
3. 自由旋转和无位移(非嵌固支承边),
4. 自由旋转和弹性位移(弹性支承边),
5. 自由旋转和自由位移(自由边)。

当支承类别为 2 和 4 时, 整个影响场受到支座弹性刚度与版刚度的比的影响, 因为要考虑边缘刚度情况, 所以影响场仅用于一定的刚度比而失

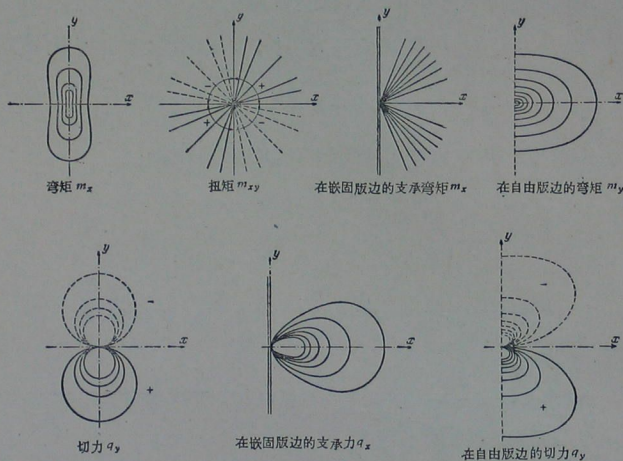


图3. 各种截面力影响场在顶点周围的等高线变化标志。

却其通用性。因此, 在我们所举的影响场图中只选用了 1、3 和 5 的支承情况, 它们既具有普遍适用性, 并且作为极限情况也是很重要的。

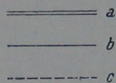


图4. 版边支承条件的标志: a 为无旋转嵌固和无位移的边; b 为自由旋转和无位移的边; c 为自由旋转和自由位移的边。

不同支承情况用不同符号来区别。双实线表示嵌固边, 单实线表示非嵌固支承, 虚线则为自由边(图 4)。

应当加以注意, 标志嵌固边的双实线中常以里线表示实际的版边。

因此, 每个影响场即使没有文字说明亦能立刻识别。这里仍然注有文字说明, 使初学者不致混淆错用。

§ 4. 影响場計值工作

a) 力矩(弯矩、扭矩和支承弯矩)影响場。

如果在一个影响場的等高綫图内用 $\kappa(u, v; x, y)$ 来表示纵距, 則适用下列公式来計值:

对于面荷载 $p(x, y)$

$$m(u, v) = \iint p(x, y) \cdot \kappa(u, v; x, y) dx dy,$$

对于綫荷载 $p(s)$

$$m(u, v) = \int p(s) \cdot \kappa(u, v; x, y) ds,$$

对于点荷重(集中荷重) $P_i(x_i, y_i)$

$$m(u, v) = \sum_i P_i(x_i, y_i) \cdot \kappa(u, v; x_i, y_i).$$

如果用下列无量綱坐标代替实际尺寸 x 和 y

$$\xi = x/l, \quad \eta = y/l \text{ 和 } \sigma = s/l \text{ 和 } \delta = u/l, \quad \varepsilon = v/l \quad (3,1)$$

其中暫取一个任意的 l , 則因

$$dx = l \cdot d\xi, \quad dy = l \cdot d\eta, \quad ds = l \cdot d\sigma;$$

$$m(u, v) = l^2 \iint p(\xi, \eta) \cdot \kappa(\delta, \varepsilon; \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (3,2)$$

$$m(u, v) = l \int p(\sigma) \cdot \kappa(\delta, \varepsilon; \xi, \eta) d\sigma, \quad (3,3)$$

$$m(u, v) = \sum_i P_i(\xi_i, \eta_i) \cdot \kappa(\delta, \varepsilon; \xi_i, \eta_i). \quad (3,4)$$

这些一般性的計值公式告訴我們, 影响場与版的绝对尺度无关, 而只与版的形状有关。

一般情况下, 面荷重和綫荷重不是变化的, 而是常数, 可是它們的分布則常只局限于部分范围 $\mathfrak{B}$ 或 $\mathfrak{C}$ 。此时可将 $p = \text{常数}$ 提在积分号的前面, 积

分可是只在范围 $\mathfrak{B}$ 和 $\mathfrak{C}$ 内进行。

因此当 $p = \text{常数}$ 时适用

$$m(u, v) = p l^2 \iint_{\mathfrak{B}} \kappa(\delta, \varepsilon; \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (3,2a)$$

$$m(u, v) = p l \int_{\mathfrak{C}} \kappa(\delta, \varepsilon; \xi, \eta) d\sigma. \quad (3,3a)$$

(3,2a) 和 (3,3a) 可用几何学来解释。积分 (3,2a) 就是在荷重范围 $\mathfrak{B}$ 以内影响場的体积; 积分 (3,3a) 表示在荷重綫 $\mathfrak{C}$ 范围以内存在的影响值的面积。

这个几何学的意义同时就是計值的解决方法。这是一項基本工作, 在已經有了影响場等高綫的情况下, 进行計算 $\mathfrak{B}$ 范围的体积和 $\mathfrak{C}$ 范围的面积。任何一种計算体积和面积的方法都可以用到这方面来。

还須指出, 弯矩影响值是无量綱的。所以 (3,2a) 和 (3,3a) 的积分亦是无量綱数值。由于在公式 (3,2a) 内: 例如 p 以吨/平方米計, l 以米計, 所以得 $m(u, v)$ 为力的量綱, 即以吨計。这是确实的, 盖因 $m(u, v)$ 是一个按长度单位而言的弯矩, 所以其量綱为吨/米 = 吨。

虽然可以用任意数值来代 (3,1) 的 l , 但是, 如果对于带形版(表 1 至 13)取用其跨距、对于矩形版(表 14 至 74)取用其較长的一边来代 l 还是頂适宜的。

b) 切力和支承力影响場。

在等高綫图内仍然用 κ 来表示影响值。这些数值又是无量綱的, 但是表达了实际影响值的 a 倍值。对切力影响場來說, a 不是任意值, 而是一个定值。在所举的影响場图表的文字說明中, 随时注明了应当代那个 a 。

这里亦引用了无量綱坐标来进行計值:

$$\xi = x/a, \quad \eta = y/a; \quad \delta = u/a, \quad \varepsilon = v/a; \quad \sigma = s/a; \quad (3,5)$$

这是有利的,取 a 来作为比较长度.

因此,当所有影响场的乘数均为 $\frac{1}{a}$ 时,得:

$$q(u, v) = a \iint p(\xi, \eta) \cdot \kappa(\delta, \varepsilon; \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (3,6)$$

$$q(u, v) = \int p(\sigma) \cdot \kappa(\delta, \varepsilon; \xi, \eta) d\sigma, \quad (3,7)$$

$$q(u, v) = \frac{1}{a} \sum_i P_i(\xi_i, \eta_i) \cdot \kappa(\delta, \varepsilon; \xi_i, \eta_i). \quad (3,8)$$

当面荷重或线荷重 $p = \text{常数}$ 时,又得:

$$q(u, v) = pa \iint \kappa(\delta, \varepsilon; \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (3,6a)$$

$$q(u, v) = p \int \kappa(\delta, \varepsilon; \xi, \eta) d\sigma. \quad (3,7a)$$

这些公式告诉我们,切力影响场的计算亦归结为体积和面积计算,并且如同弯矩影响场一样进行计算;只是其乘数不同而已.

c) 计算体积和面积的方法.

任何一种现有的计算体积的方法都可以用来计算在荷重范围内部分影响场的体积.一般通过影响场立体切取许多平行的剖切面,求出其面积,再由面积计算体积.这里可以采取多种方式来进行的.

竖向平行剖切. 这种剖切方法适用于小的荷重范围,尤当荷重范围内有顶点存在时.剖切面积一般根据其纵距按梯形定理或辛普森 Simpson 定理计算之.

横向剖切 适用于大的荷重范围,尤当版受满荷重时.求计横向剖切面面积时最好用面积仪.

用估计平均值计算时,对荷重范围部分先估出其平均值,再由部分范围的底面积 ΔF 与平均值 $\bar{\kappa}$ 相乘而得荷重部分影响场的体积 ΔV :

$$\Delta V = \bar{\kappa} \cdot \Delta F. \quad (3,9)$$

如图5所示,估计平均值是与部分范围的大小和在这范围内影响场的形状有关的.如影响场在该范围内仅是微曲——即接近平面——,则估计平均值要比强裂弯曲场面时容易得多.同样对小的部分范围估计平均值自然比大的部分范围容易得多.

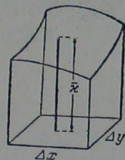


图5. 从影响场上切出范围为 $\Delta x \cdot \Delta y$ 的小块,平均纵距值为 $\bar{\kappa}$

如果影响场的顶点存在于部分范围之内时,这个方法就会不可靠,因为在那里遇到奇异点,对估计适当的平均值带来了困难.

所有影响场的弯曲度是随其与顶点的距离增大而减小.所以离开顶点到了一定距离,有时可将荷重作为点荷重来处理,即如不考虑轮压分配宽度,而按公式(3,4)来计算.这个方法的使用许可程度是不难加以证明的.如果在 (ξ_i, η_i) 处的周围,在 ΔF_i 面的范围内传递总荷重 P_i ,则如假定在 ΔF_i 上的荷载是均匀分布,即 $p = P_i / \Delta F_i$,根据(3,2a)得:

$$m(u, v) = \frac{\Delta P_i}{\Delta F_i} \iint_{\Delta F_i} \kappa(\delta, \varepsilon; \xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (3,10)$$

因为,由于平均值定理

$$\iint_{\Delta F_i} \kappa(\delta, \varepsilon; \xi, \eta) d\xi d\eta = \bar{\kappa} \cdot \Delta F_i;$$

和

$$\lim_{\Delta F_i \rightarrow 0} \bar{\kappa} = \kappa(\delta, \varepsilon; \xi_i, \eta_i),$$

所以对于顶点以外的部分范围,公式(3,10)可化为

$$m(u, v) = P_i \bar{\kappa}_i, \quad (3,11)$$

并对于顶点以外的真正点荷重或非常小的部分范围化为

$$m(u, v) = P_i \kappa(\delta, \varepsilon; \xi_i, \eta_i),$$

上式是与(3,4)一致的.

显然(3,11)只适用于小部分范围,因为只有在这种情况下估计平均值 $\bar{\kappa}$ 才具有一定的准确度.

亦可利用(3,11)来进行较大荷重范围的计算,只须把它分为许多较小

的部分范围 ΔF_i , 并且用部分荷重 ΔP_i 来計值:

$$m(u, v) = \sum_i \Delta P_i \cdot \bar{k}_i.$$

可是这个方法不如用豎向剖切或橫向剖切准确, 并且在計算过程中亦无优点可举.

对于离顶点較远的較小部分范围常可将荷重簡化为点荷重, 再按公式(3,4)来計值. 这确实在計算桥面板时采用了(見 § 5 举例 3).

弯矩影响場在顶点的纵距为无限大, 自然应当在某一处将等高綫图形截断, 應該注意到, 影响值 κ 固然无限增长, 但是这个逐渐变細的管子的体

积确是有限的, 并且可以計算的. 在所有影响場上表示了这样多的等高綫, 其不再示出部分的体积則已小得可以略計. 作者作过这方面的証明^[9].

在計值时按照公式(3,2 至 4)和(3,6 至 8)利用无因次的长度. 这是合适的, 根据公式(3,1)选用矩形版的較长的一边, 以及带形版或半带形版的跨距作为长度单位 l . 由于所有影响場是按照矩形版用較长的一边为 20 厘米、带形版用跨距为 10 厘米来表示的, 所以人們可以用比例尺 1:5 或 1:10 来繪制或量計所有以这个长度单位为准的无因次的尺寸.

茲于下节利用一些举例来说明計值工作的实际进行情况.

§ 5. 应 用 舉 例

例 1. 对于一个相当小的荷重范围用豎向剖切来进行計值.

在一块四边嵌固的正方版的中部 $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$ 范围上, 作用荷重 $p = \text{常数}$, 計算其版中央的弯矩 m_x .

利用图表 62 的影响場, 画出荷重范围和豎向剖切. 本例由于对称关系取五个截面已足够(图 6).

为了进行計值, 画出各剖切面的形状(图 7). 計算面积系根据辛泼森定理和矩形、抛物綫切面和梯形的面积公式, 例如图 7 直接注在各截面图的旁边. 由于截面呈对称性关系, 只須求出一半数的截面面积 $F_I, F_{II}, F_{III}, F_{IV}$ 和 F_V .

这些截面的长度应按一个以影响場的边长为长度单位的比例尺来測量. 因为这个边长为 20 厘米, 用一个比例尺 1:5 正确測計; 如果应用一个尚可讀得清的比例尺 1:50 时, 則得 10 倍数値. 影响場的纵距同样是无因次的, 所以亦得面积为无因次的数值.

面积計算在图 7 内按实际工作步骤的需要予以列出. 其結果 $F_I = 0.389, F_{II} = 0.396, F_{III} = 0.372, F_{IV} = 0.315, F_V = 0.307$.

根据这些面积再利用辛泼森定理計算无因次的体积

$$\mathfrak{B} = \iint_{\mathfrak{B}} \kappa(\delta, \varepsilon; \xi, \eta) d\xi d\eta.$$

无因次地代入各截面間的距离; 它是 $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{32} = 0.0313$. 由于双重对称性和乘数为 8π 的緣故, 得:

$$8\pi\mathfrak{B} = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0.0313 (0.389 + 4 \cdot 0.396 + 2 \cdot 0.372 + 4 \cdot 0.315 + 0.307) = 0.1786$$

待求的場中心弯矩 m_x 根据公式(3,2a)为:

$$m_x = pl^2 \mathfrak{B} = \frac{1}{8\pi} \cdot 0.1786 pl^2 = 0.00708 pl^2.$$

由于这里的影响場和荷载均系对称, 故适用 $m_x = m_y$. 上面算得的数值是假定 $\mu = 0$. 如果 $\mu \neq 0$, 例如 $= \frac{1}{6}$, 則根据 § 2 的末节所叙, 以及因 $m_x = m_y$, 得

$$m_x = \left(1 + \frac{1}{6}\right) 0.00708 pl^2 = 0.00825 pl^2.$$

当对影响場計值計算有了一定熟練程度后, 可以不必画出截面 I 至 V,

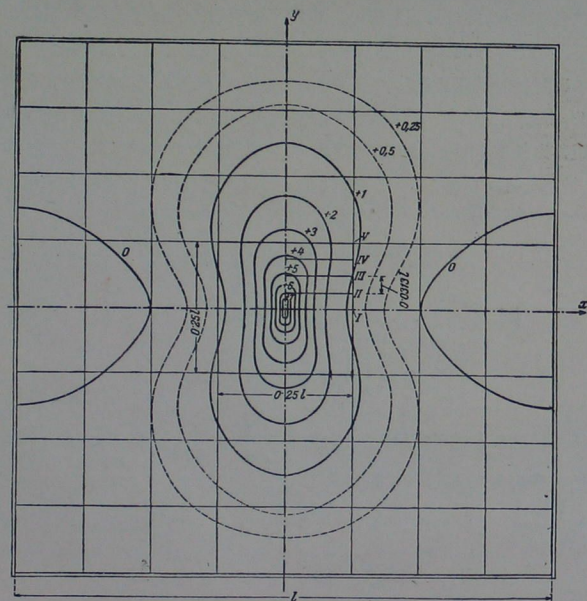


图6. 举例1, 当荷重范围在版的中部, 为了影响场计值而布置截面 I 至 V.

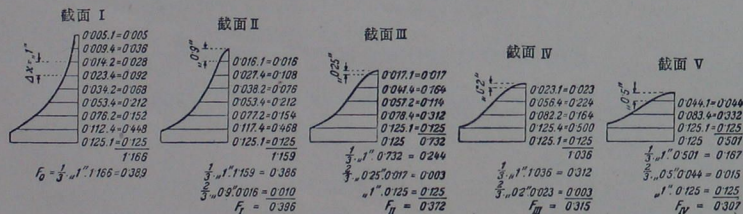


图7. 举例1的截面 I 至 V 和计值.

因为计算时可以直接从影响场读出准确尺度, 这里划出截面仅使有助于理解; 并非必须要按比例尺划出.

例2. 对一个比较大的荷重范围用横向剖切法来进行计值.

在一块四边简支、边比 $l_x/l_y = 0.8$ 的矩形版上, 求由满荷载引起于版中央弯矩 m_x .

κ	cm ²	cm ² /400	n	$n \cdot F$
0	320.0	0.800	1	0.800
1	132.0	0.330	4	1.320
2	59.2	0.148	2	0.296
3	23.6	0.059	4	0.236
4	9.6	0.024	2	0.048
5	3.6	0.009	4	0.036
6	1.4	0.003	2	0.006
7	0.6	0.001	4	0.004
8	0.2	0.000	1	0
				2.746

$$\Delta \kappa = "1"$$

$$8\pi\vartheta = \frac{1}{3} \cdot "1" \cdot 2.746 = 0.915.$$

取用图表 14 的影响场, 荷重范围满延整个版面, 这里首先须要算出由高线围起来的横向截面 $\kappa = 0, 1, 2, \dots, 7, 8$ 的面积. 应该注意, 这里取用较长的一边 l_y ——在图表 14 中是 20 厘米长——来作为无因次的长度比例尺. 因此将这些按平方厘米求得的面积用 400 来除, 借以得到真正的“无因次的面积”, 求计面积可采用毫米纸计方格数的方法或利用面积仪来测量.

利用面积仪所求出的面积, 以及用辛普森定理计算无因次的体积 $8\pi\vartheta$ 彙列于下表. 再按较长边 l_y 计算:

$$m_y = pl_y^2 \vartheta = \frac{1}{8\pi} 0.915 pl_y^2 = 0.0364 pl_y^2.$$

如果计算 m_x , 则以 l_x 为准. 因 $l_y = l_x/0.80$

$$m_x = \frac{0.0364}{0.80^2} pl_x^2 = 0.0568 pl_x^2.$$

例 3. 計算一块钢筋混凝土桥面板的版中央弯矩。

茲須待計算一級公路桥的桥面板版中央的弯矩 m_y 。板沿 $l_x = 7.50\text{m}$ 的边是嵌固的,沿 $l_y = 9.00\text{m}$ 的边是简支的。

采用图表 42 的影响場。作为設計依据的最不利的荷重位置如图 8——一台 24 吨的压路机、二輛 14 吨的运貨車和 500 公斤/平方米的人羣重。

荷重位置应按准确比例尺“ $l_y = 1$ ”画入,应为:

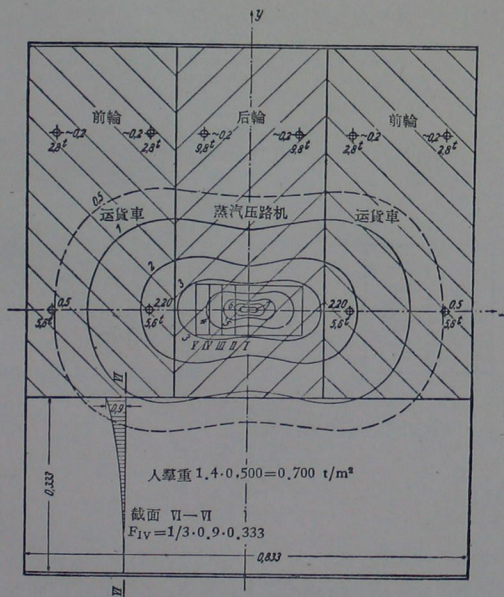


图 8. 例 3 的荷重位置和剖切布置。

$$\text{前后轴距 } 3.00\text{m 或 } \frac{3.00}{9.00} = "0.333",$$

$$\text{同轴距距 } 1.60\text{m 或 } \frac{1.60}{9.00} = "0.178".$$

除放在頂点上的压路机前輪的荷重是按照面分布荷重处理外,所有其他輪压均可作为集中力来計值。

作为輪压的分布面可假定为輪胎和桥面板頂层間的接触面、再在每个方向均按照桥面板頂层至受拉鋼筋的双倍距离增大。这个假定就是相当于一个 45° 的传布角引至受拉鋼筋。設桥面板上的路面厚 16 厘米,板的有效高度估計为 25 厘米,則压路机前輪下的荷重面的宽度为:

$$\text{在行駛方向內 } b_1^* = 10 + 2(16 + 25) = 92\text{cm}$$

$$\text{垂直于行駛方向 } b_2^{**} = 100 + 2(16 + 25) = 182\text{cm}$$

按照比例尺“ $l_y = 1$ ”:

$$\beta_1 = b_1/l_y = \frac{0.92}{9.00} = "0.102",$$

$$\beta_2 = b_2/l_y = \frac{1.82}{9.00} = "0.202".$$

在这个荷重范围内分布于单位面积上的荷载,包括冲击系数 $\varphi = 1.4$ 后,为:

$$p = \frac{1.4 \cdot 10.00}{0.92 \cdot 1.82} = 8.35 \text{ t/m}^2.$$

为了計值,在图 8 內划入压路机前輪的荷重范围,并切取了五个豎向剖切面。

計值工作分为由压路机前輪所起部分,由作为集中力計算的其他各輪荷重所起部分和由人羣重所起部分三步进行。

* 在行駛方向內压路机前輪与路面接触面的长为 10cm,

** 压路机前輪寬为 100cm。——譯註。

在压路机前輪荷重范围的体积,亦如例 1 詳細演算过的一样,是用豎向剖切法来計算的。这些为:

$$F_I = 0.244, F_{II} = 0.237, F_{III} = 0.215, F_{IV} = 0.192, F_V = 0.180.$$

并由于各剖切面間的間距为: $\Delta\xi = \beta_2/8 = 0.0253$, 得

$$8\pi\mathfrak{B} = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0.0253(0.244 + 4 \cdot 0.237 + 2 \cdot 0.215 + 4 \cdot 0.192 + 0.180) = 0.0937.$$

由此得压路机前輪部分所起的弯矩为:

$$\Delta m_1 = p l_y^2 \mathfrak{B} = \frac{1}{8\pi} \cdot 0.0937 \cdot 8.35 \cdot 9.00^2 = 2.52 \text{ tm/m}.$$

其他各輪荷重所起的数值是按点荷重根据公式 (3,4) 計算。图 8 所示的輪压已經包括冲击值在内; 因此得

$$\Delta m_2 = \sum_i P_{iK_i} = \frac{1}{8\pi} 2[5.6^t \cdot 2.20 + 5.6^t \cdot 0.50 + (9.8^t + 2.8^t + 2.8^t)0.20] = 1.45 \text{ tm/m}.$$

入羣重部分 $1.4 \cdot 0.500 = 0.700 \text{ t/m}^2$ 又利用体积 $\mathfrak{B}$ 来計算。計算时, 当作剖面 VI 沿整个宽度相等, 一般尚能达到要求准确度。因此如果:

$$F_{VI} = \frac{1}{3} \cdot 0.9 \cdot 0.333 = 0.100$$

和宽度 $7.50 = 0.833 l_y$, 則得:

$$8\pi\mathfrak{B} = 0.833 \cdot 0.100 = 0.083;$$

因此第三部分的弯矩

$$\Delta m_3 = \frac{1}{8\pi} \cdot 0.700 \cdot 0.083 \cdot 9.00^2 = 0.185 \text{ tm/m}.$$

最后, 得由交通荷重所起的总弯矩:

$$m_y = 2.52 + 1.45 + 0.19 = 4.16 \text{ tm/m}.$$

例 4. 切力影响場按綫荷重进行計值。

按照图 9 所示的綫荷重 $p \text{ t/m}$ 計算一块四边嵌固的版在其場中心的切力 q_y 。

利用图表 67 的影响場。对应于綫荷重的一半面积 F 及其面积計算示于图 10。因此由于乘数为 2π , 得:

$$2\pi \int_{\mathfrak{B}} \kappa(\delta, \epsilon; \xi, \eta) d\sigma = 2 \cdot 0.159,$$

所求的切力按 (3,7a)

$$q_y = 2 \frac{1}{2\pi} 0.159 \cdot p = 0.0506p.$$

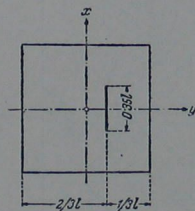


图 9. 例 4 的綫荷重的位置和长度。

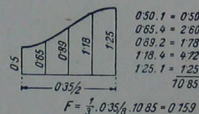


图 10. 例 4 的綫荷重的影响場面积及其計值。

§ 6. 結果的准确度

計算弹性版截面力有两条途径可循; 即由經微分挠曲面或积分影响場而求其結果。即当給出的挠曲面和影响場的精度完全相等, 亦因影响場求得的截面力, 系由积分得来, 結果要比由挠曲面經微分得来的准确得多。在

为計算影响場所发展的方法中, 对奇异部分用完善的分析公式計算, 只对有关規則部分用級数計算, 故能得出很准确的结果, 因为引用了“修正奇异点”后, 使有关規則部分的級数收敛得特别好, 一般只須計算一項已經足够, 絕少

須要考虑四項以上。

用影响場来計算版由部分荷載所引起的截面力是很优越的；如果荷重愈集中到小部分范围，則这个方法比其他任一計算方法愈加优越，給出的結果愈加准确。

將滿荷載的計值結果經与已知数值作比較后，使我們对所示出的影响場的准确度有个輪廓的概念。为了比較矩形版的数值用 F. 賽尔尼 (F. Cerny)^[13]的結果；圓板用 K. 葛尔克曼 (K. Girkmann)^[10]的公式。在下表中給出了由滿荷載时 $p =$ 常数所起的弯矩值。

弯矩影响場

滿荷載 $p =$ 常数时的計值

矩形版 ($l =$ 长边)

图表编号	弯矩	图表编号	弯矩	图表编号	弯矩
14	$0.0360 \cdot pl^2$	34	$0.0700 \cdot pl^2$	53	$0.0615 \cdot pl^2$
15	0.0222 "	35	0.0103 "	54	0.0542 "
16	0.0364 "	36	0.0230 "	55	0.0298 "
17	0.0272 "	37	0.0495 "	56	0.0093 "
18	0.0324 "	38	0.0158 "	57	0.0470 "
20	0.0116 "	39	0.0286 "	58	0.0394 "
21	0.0274 "	40	0.0696 "	59	0.0095 "
22	0.0639 "	41	0.0200 "	60	0.0179 "
23	0.0253 "	42	0.0216 "	61	0.0422 "
24	0.0316 "	43	0.0595 "	62	0.0178 "
25	0.0837 "	44	0.0220 "	63	0.0102 "
26	0.0272 "	45	0.0166 "	64	0.0084 "
27	0.0228 "	46	0.0504 "	65	0.0515 "
28	0.0677 "	47	0.0137 "	69	0.1250 "
29	0.0226 "	48	0.0193 "	70	—
30	0.0135 "	49	0.0434 "	71	0.1250 "
31	0.0560 "	50	0.0495 "	72	0.1250 "
32	0.0460 "	51	0.0226 "	73	—
33	0.0232 "	52	0.0168 "	74	0.1250 "

圓版 ($a =$ 半径)

图表编号	弯矩	图表编号	弯矩
75	$0.1890 \cdot pa^2$	78	$0.0640 \cdot pa^2$
76	0.1403 "	79	0.0159 "
77	0.1702 "	80	0.0473 "
		81	0.1250 "

滿荷載計值自然只可在閉合范围(矩形和圓)的影响場上进行；对于帶形版和半帶形版，按滿荷重計值，至少从核算目的来讲是没有充分意义的。

下表給出关于滿荷載影响場的計值与比較值对照时出現的誤差概況；从 65 个曾进行过的矩形版和圓版影响場的 4 位小数的計值計算中得下列誤差：

$\Delta = 0$	9 个影响場
$0 < \Delta < 1\%$	25 个影响場
$1\% < \Delta < 2\%$	14 个影响場
$2\% < \Delta < 3\%$	8 个影响場
$3\% < \Delta < 4\%$	8 个影响場
$\max. \Delta = 4.3\%$	1 个影响場 (图表 18)
$\sum \Delta = 90.6\%$	65 个影响場
所以平均誤差： $\bar{\Delta} = \frac{90.6}{65} = \pm 1.4\%$	

因为影响場是准确計算截面力的依据，所以結果的准确度只与計值准确度有关了。計值时各視最終成果的要求准确度，可以采用从粗略面积估計至精細面积計算的一切方法。

§ 5 举例中所采用的方法已可視為很精細的了。再要提高准确度，只有增多剖切面数量才有可能。这尤其对于具有嵌固边的版在滿荷載情况下按橫向剖切法計算时为显著。总之，对于这种版在 $\kappa = 0$ (边) 和 $\kappa = \pm 1$ 之間，应将等高綫再分細，因为根据例 2 的粗略計算，觉得在边緣附近影响場的形状取得欠准确。