2006年考研指导教材

考研数学题典

理工类

主　编 考研命题研究组

编　写 双博士考研数学课题组

支　持 双博士网校 www.bbdd.cc

总策划 胡东华

赠

3件礼品见本书夹页

科学技术文献出版社

2006年

考研数学题典

理工类

（购书送3件礼品）

主　　编　考研命题研究组
编　　写　双博士考研数学课题组
支　　持　双博士网校　www.bbdd.cc
总 策 划　胡东华

科学技术文献出版社
Scientific and Technical Documents Publishing House
北　京

Preface

前 言

急！急！急！偌大的图书市场竟然找不到一本专门针对考研数学习题集的辅导书，近来不少考生纷纷向双博士反映此问题，并热情的建议双博士能尽快出一本考研数学习题集满足他们的心愿，并希望双博士在考研征途上助他们一臂之力。

同时，双博士召集已考上北大、清华的研究生座谈，他们中很大一部分人认为，他们数学能得高分，也完全得益于考前做了大量的习题。有了平时的题海训练，在考场上碰到的题型在平时都已经见过，故解答起来就非常容易了。

双博士本着为考生负责的原则，急考生之急，特诚邀北大、清华的数位资深考研数学命题专家加盟，阵容庞大。

本题典的设计特点有：

试题题型：分为填空题、选择题、解答题三种形式，完全依照最新数学考纲规定设置。

试题广度：覆盖面广，知识点自成系统。重点强化＋普遍提高，名师思想考研新动向。

试题深度：深浅兼备，拓展性好。每道试题都有一定内张力，题题经典。

试题难度：难易适当，区分度高。按考研数学试题的难度进行设置，无偏题无怪题。

本题典可供考生在基础和提高阶段复习使用。

考研学生要克服的三个误区：

一、不提前复习，只想最后三至五个月再突击。

这样做的结果是，那么多课程，根本不可能过于细致地复习。因此，平时特别是考前半年，就要开始认真复习，从基础做起。

二、迷信辅导班，想一步登天。

校园内天天贴满了所谓名师辅导班广告，这些广告往往吹得很厉害，且收费往往数百元。但实际效果却很一般。从北京各大名校历年已录取的考生来看，很大一部分考生都未上过辅导班。他们的成功取决于平时基础扎实地复习，而不是依靠辅导班名师的辅导。我们和已考上研的高分同学座谈，他们中绝大部分也都未参加过辅导班。

当然辅导班不是完全没有用，它的用途关键体现在“信息”两个字上，“信息”在临考前获得最为有效。获得考前“信息”不单纯是通过辅导班渠道来解决，在临考前还可以从网上收集一些信息（双博士地处北大、清华、人大名校之间，汇集最强的信息资源，考前为您提供专门的免费的最直接的考研信息）。

三、过分迷信某一个权威或名师。

考研辅导书与中小学辅导书不同，中小学辅导书如数学或历史，一个老师完全能胜任全部编撰工作，但考研辅导书，一门课涉及到多个学科，绝对不可能由一位名师能够独立完成的。比如政治，涉及马哲、邓论等五部分，平时上课也是五位老师，不可能由一位名师把五个部分的课程全部承担下来。所谓名师，天天在外讲课，根本没有时间静下心来编书。在4～5年以前，我们培养了一位政治作者，成了响当当的名师，这位名师在外天天忙于讲课，根本没时间认真编书。我们请他编写的模拟试题，有90%的内容和往年一样，比如有一个材料题，关于孔繁森的事迹，在前2年的模拟试题里均出现过，而当年他又重复使用了这道题。鉴于他不负责的态度，我们当时就淘汰了这位作者，另启用了北大五位著名教授，重新编写。还有的名师依仗着“名气”大，在辅导班

上，竭力鼓吹自己。因为他们没有充足的时间来编书，辅导书每年内容变化极小，但书的定价要比其他同类辅导书贵30% ~50%；因此，千万不要过分迷信所谓某一位名师，而应该着重关注于一本书的内在质量和品牌。从这个意义上讲，真正好的辅导书，好的作者，应该是一个作者团队，是一批人，而非一个名师。真正好的名师，应该是全国最著名大学在一线教学的年富力强的一批中青年教授。双博士的各学科作者团队均由这些一线教授组成。

双博士奉献：

1. 本书均贴有数码防伪标识（由10位ID和6位PW组成），凭此ID和PW可登录双博士网校（www.bbdd.cc），免费获得30积分。

2. 购本书将免费赠送随堂笔记本1本。

3. 购双博士考研丛书110元可免费获赠一本价格在20元至50元左右的考研专业课辅导图书。购150元者，可免费获赠2本考研专业课辅导图书（考研专业课辅导书见本书中“考研专业课丛书书目”，从书目中可任选）。具体方法为：本书中有夹页：“购书领奖凭证及说明”，填写相关内容，购书累计达110元或150元后，附部分购书小票，邮至双博士邮购部。

4. 考前意外惊喜礼品：

购双博士图书达110元以上，还可在临考前一个月左右得到2套考研政治押题卷。此卷不对外销售，由北大、清华、人大及其他“内部渠道”的消息编写而成。在临考前20天或30天左右发到您的电子邮箱内。同时，还将收集到的其他各学科考研最新信息和动态，免费也发到您的电子邮箱内。（内部消息很权威，有的考生有时可能因1~2分而未上线，双博士能帮你改变命运）。

5. 全国有三分之一的大学生和考研考生正在使用双博士图书，本品牌图书已成为全国最大的大学教辅图书品牌及知名考研图书品牌。以上举措为双博士对全国大学生和考研学生的真情奉献！

编　者

2005年于北京大学

来自北京大学研究生会的感谢信

双博士：您好！

首先感谢您对北京大学“十佳教师”评选活动的热情支持和无私帮助！师恩难忘，北京大学“十佳教师”评选活动是北京大学研究生会的品牌活动之一，是北京大学所有在校研究生和本科生对恩师情谊的最朴素表达。双博士作为大学教学辅导及考研领域全国最大的图书品牌之一，不忘北大莘莘学子和传道授业的老师，其行为将永久的被北大师生感怀和铭记。

作为考研漫漫征途上的过来人，双博士曾陪伴我们度过无数个考研岁月的日日夜夜，曾带给我们无数个明示和启发，当然也带给我们今天的成功。

特致此信，向双博士表达我们内心长久以来的感激之情，并祝愿双博士事业蒸蒸日上。

北京大学研究生会

二零零二年十二月

目　　录

注：带 * 部分、章，数学二的考生不必看。

第一部分

高等数学

第一章　函数、极限、连续

Ⅰ 填空题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})\sqrt{n-1}=$ ________.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}=$ ________.

3. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^2+bn+5}{3n-2}=2$,则 $b=$ ________.

4. 若 $x\to0$ 时,$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小,则 $a=$ ________.

5. 如果$\lim\limits_{x\to0^+}(ax+b)^{1/x}=0$,则 b 应满足条件________.

6. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=$ ________.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(5x+1)^{50}}=$ ________.

8. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=$ ________.

9. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{3}{x^3-1}\right)=$ ________.

10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{x\sin x}=$ ________.

11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=$ ________.

12. 设 $0<a<b$,则$\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}=$ ________.

13. 若$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=4$,则 $c=$ ________.

14. $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{1+x^2}+x)=$ ________.

15. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=$ ________.

16. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=$ ________.

17. $\lim\limits_{x\to0}(1+x^2)^{\cot 2x}=$ ________.

18. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=$ ________.

19. 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$,则$f(x)$ 的间断点为 $x=$ ________.

20. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x=$ ________.

21. 若 $k=$ ________,当 $x\to0$ 时,$(\sin2x-2\sin x)$ 与 x^k 是同阶无穷小.

22. 设$f(x)=\begin{cases}ax+b & x\geqslant0\\(a+b)x^2+x & x<0\end{cases}$ 且 $a+b\neq0$,则$f(x)$ 在定义域内连续的充要条件是 $b=$ ________.

23. 已知$f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ ________.

24. 设$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x+1}$的极限值存在,则这个极限值等于________.

25. 已知$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$,则 $a=$ ________.

26. 设$f(x)=\sin x, g(x)=\begin{cases}x-\pi & x\leqslant 0\\ x+\pi & x>0\end{cases}$,则$f[g(x)]$的连续区间为________.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$ ________.

28. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$ ________.

29. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=$ ________.

30. 设函数$f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln[f(1)\cdot f(2)\cdot\cdots\cdot f(n)]=$ ________.

31. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$ ________.

32. $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{3}\sqrt[4]{3}\sqrt[8]{3}\cdots\sqrt[2^n]{3})=$ ______.

33. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$ __________.

34. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$ ________.

35. $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$ ________.

Ⅱ 选择题

1. 如果函数$f(x)$的定义域$[1,2]$,则函数$f(1-\ln x)$的定义域为 (　　)

A. $[1,1-\ln 2]$　　B. $(0,1]$　　C. $[1,e]$　　D. $[e^{-1},1]$

2. 当$x\to 1$时,函数$\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$的极限 (　　)

A. 等于2　　B. 等于0　　C. 为∞　　D. 不存在但不为∞

3. 设$f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$,则$f\{f[f(x)]\}$等于 (　　)

A. 0　　B. 1　　C. $\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$　　D. $\begin{cases}0 & |x|\leqslant 1\\ 1 & |x|>1\end{cases}$

4. 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$,其中$a^2+c^2\neq 0$,则必有 (　　)

A. $b=4d$　　B. $b=-4d$　　C. $a=4c$　　D. $a=-4c$

5. 设$\lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha x+\sqrt{x^2-x+1}-\beta)=0$,则 (　　)

A. $\alpha=1,\beta=-\dfrac{1}{2}$　　B. $\alpha=-1,\beta=\dfrac{1}{2}$　　C. $\alpha=-1,\beta=-\dfrac{1}{2}$　　D. $\alpha=\beta=0$

6. 设$f(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{1-\sqrt[3]{1-x}}$在$x=0$处连续,则应补充定义$f(0)$等于 (　　)

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 3　　D. 1

7. 如果$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$存在,则 (　　)

A. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在　　B. $f(x)$ 在 x_0 处连续

C. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 一定不存在　　D. 以上结论都不正确

8. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$，则　　(　　)

A. 对于任意函数 $g(x)$，均有 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$ 成立

B. 当且仅当 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ 时，才有 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$ 成立

C. 当 $g(x)$ 为有界函数时，有 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$ 成立

D. 当 $\lim\limits_{x \to x_0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} g(x)$ 时，有 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$ 成立

9. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，则下列极限一定存在的是　　(　　)

A. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^a$（$a$ 为实数）　　B. $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)|$

C. $\lim\limits_{x \to x_0} \arcsin|f(x)|$　　D. $\lim\limits_{x \to x_0} \ln f(x)$

10. $x = 1$ 是函数 $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ 3 - x & x > 1 \end{cases}$ 的　　(　　)

A. 连续点　　B. 第一类间断点　　C. 第二类间断点　　D. 没有被定义的点

11. 把 $x \to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t$，$\beta = \int_0^{x^2} \tan\sqrt{t} \mathrm{d}t$，$\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 \mathrm{d}t$ 排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是　　(　　)

A. α, β, γ　　B. α, γ, β　　C. β, α, γ　　D. β, γ, α

12. 设 $f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ a + x & x \geqslant 0 \end{cases}$，要使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，则 a 等于　　(　　)

A. 2　　B. 1　　C. 0　　D. -1

13. 如果 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3\sin mx}{2x} = \dfrac{2}{3}$，则 m 等于　　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. $\dfrac{4}{9}$　　D. $\dfrac{9}{4}$

14. 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义，$f(x)$ 为连续函数，且 $f(x) \neq 0$，$\varphi(x)$ 有间断点，则　　(　　)

A. $\varphi[f(x)]$ 必有间断点　　B. $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点

C. $f[\varphi(x)]$ 必有间断点　　D. $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

15. 设函数 $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 + x}{1 + x^{2n}}$，讨论 $f(x)$ 的间断点，其结论为　　(　　)

A. 不存在间断点　　B. $x = 1$ 为其间断点

C. $x = 0$ 为其间断点　　D. $x = -1$ 为其间断点

16. 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$，$\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 1$，$\lim\limits_{n \to \infty} c_n = \infty$，则必有　　(　　)

A. $a_n < b_n$ 对任意 n 成立　　B. $b_n < c_n$ 对任意 n 成立

C. 极限 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n c_n$ 不存在　　D. 极限 $\lim\limits_{n \to \infty} b_n c_n$ 不存在

17. 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{\sqrt{x}} & x > 0 \\ x^2 g(x) & x \leqslant 0 \end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处　　(　　)

A. 极限不存在　　B. 极限存在，但不连续

C. 连续，但不可导　　D. 可导

18. 设当 $x \to 0$ 时，$(1 - \cos x)\ln(1 + x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2} - 1)$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于　　(　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　　　　　D. 4

19. 对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$,总存在正整数 N,当 $n \geqslant N$ 时,恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$ 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的　　(　　)

A. 充分但非必要条件　　　　B. 必要但非充分条件

C. 充分必要条件　　　　D. 既非充分又非必要条件

20. 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$,则下列正确的是　　(　　)

A. 若 x_n 发散,则 y_n 必发散　　　　B. 若 x_n 无界,则 y_n 必有界

C. 若 x_n 有界,则 y_n 必为无穷小　　　　D. 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小,则 y_n 必为无穷小

Ⅲ 解答题

1. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内具有一阶连续导数,且 $f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0$,若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小,试确定 a,b 的值.

2. 计算:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2e^{2x}+\ln(1-x^2)}{x\cos x-\sin x}$.

3. 求函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内的间断点,并指出其类型.

4. 确定常数 a,b,c 的值,使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c \quad (c\neq 0)$.

5. 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数,它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式:$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x)$,其中 $o(x)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x 高阶的无穷小,且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程.

6. 已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arcsin x} e^{-t^2}dt$ 在点 $(0,0)$ 处的切线相同,写出切线方程,并求出极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\dfrac{2}{n}\right)$.

7. 计算:$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right]$.

8. 已知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导,$f(x)>0$,$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$,且满足 $\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}}$,求 $f(x)$.

9. 计算:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)dt\right]du}{x(1-\cos x)}$.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 有二阶导数,且 $g(0)=1, g'(0)=-1$.

(1) 求 $f'(x)$

(2) 讨论 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性.

11. 设函数 $f(x)$ 可导,且 $f(0)=0$,$F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)dt$,求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^{2n}}$.

12. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x} & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}$

(1) 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否连续.

(2) 若不连续,修改函数在 $x=1$ 处定义使之连续.

13. 计算:$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$.

14. 已知:$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,且 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=e$,$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$,求 c 的值.

15. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x} & x<0,\\ 6 & x=0,\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}} & x>0,\end{cases}$

问 a 为何值时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续;a 为何值时,$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点?

16. 计算:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

17. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数,且 $f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0, f''(0)\neq 0$. 证明:存在惟一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,使得当 $h\to 0$ 时,$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小.

18. 计算:$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{n}}{n+\dfrac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\dfrac{1}{n}}\right)$

19. 设 $x_1=10, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\ (n=1,2,\cdots)$,试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在,并求此极限.

20. 设 $f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$,且 $f[\varphi(x)]=\ln x$,求 $\int\varphi(x)\,dx$.

21. 计算:$\lim\limits_{x\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)$.

第一章　答案与解析

Ⅰ 填空题

1. $\underline{\frac{3}{2}}$

解析：$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})\sqrt{n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{1+\sqrt{1+\frac{3}{n}}}=3/2.$

2. $\underline{\frac{4}{3}}$

解析：分子$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

分母$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^n}}=\frac{2}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}.$

3. $\underline{6}$

解析：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^2+bn+5}{3n-2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b+\frac{a^2+5}{n}}{3-\frac{2}{n}}=\frac{b}{3}=2$，$\therefore\ b=6.$

4. $\underline{-4}$

解析：$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则有：

$$\lim_{x\to0}\frac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{4}(1-ax^2)^{-\frac{3}{4}}\cdot(-2ax)}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{4}(1-ax^2)^{-\frac{3}{4}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{-2a}{\frac{\sin x}{x}+\cos x}=1$$

即：$\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{2a}{2}\right)=1\Rightarrow a=-4$

或者：$\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{a}{4}x^2}{x\cdot x}=-\frac{a}{4}=1$，即 $a=-4.$

5. $\underline{|b|<1}$

解析：$\lim\limits_{x\to0^+}(ax+b)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}(ax+b-1)}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\left(a+\frac{b-1}{x}\right)}$

$\because\ \lim\limits_{x\to0^+}(ax+b)^{\frac{1}{x}}=0$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to0^+}\frac{b-1}{x}$趋近于$-\infty$

$\therefore\ |b|<1.$

6. $\underline{-1}$

解析：当$x\to0^+$时，$\frac{1}{x}\to+\infty$，$e^{\frac{1}{x}}\to+\infty$，$e^{-\frac{1}{x}}\to0.$

于是

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{xe^{-\frac{1}{x}}+1}=\frac{-1}{1}=-1.$$

7. $\underline{\dfrac{2^{20}3^{30}}{5^{50}}}$

解析：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(5x+1)^{50}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(2-\dfrac{3}{x}\right)^{20}\left(3+\dfrac{2}{x}\right)^{30}}{\left(5+\dfrac{1}{x}\right)^{50}}=\dfrac{2^{20}3^{30}}{5^{50}}.$

8. $\underline{2x}$

解析：$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2hx+h^2}{h}=2x.$

（注意此题答案不要写为0）

9. $\underline{-1}$

解析：$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{3}{x^3-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+x+x^2-3}{(1-x)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}-\dfrac{(1-x)(x+2)}{(1-x)(x^2+x+1)}$

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=-1.$$

10. $\underline{2}$

解析：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{(2x)^2}{2}}{x^2}=2.$

11. $\underline{-\dfrac{1}{6}}$

解析：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}\xlongequal{\ln(1+x)\sim x(x\to 0)}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{2x^3}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}-1}{6x^2}$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{6(1+x^2)}=-\frac{1}{6}.$$

12. $\underline{b}$

解析：$\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}=b\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\left(\dfrac{a}{b}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}=b.$

13. $\underline{\ln 2}$

解析：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2c}{x-c}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2cx}{x-c}}=e^{2c}=4.\quad\therefore c=\ln 2.$

14. $\underline{-\dfrac{1}{2}}$

解析：$\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{1+x^2}+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1}=-\dfrac{1}{2}.$

15. $\underline{\dfrac{4}{3}}$

解析：$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)}$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{4}{3}.$$

16. $\underline{\dfrac{1}{\sqrt{2a}}}$

解析：$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}+\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\sqrt{x+a}}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-a^2}}}+\dfrac{1}{\sqrt{2a}}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\sqrt{x^2-a^2}}{4x\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{2a}}=\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$.

17. e

解析：$\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\cot^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}=e^1=e$.

18. $\dfrac{1}{2}$

解析：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\dfrac{x^2}{2}}{x^3\cos x}=\dfrac{1}{2}$

19. 0

解析：$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}=\dfrac{1}{x}$，故间断点为 $x=0$.

20. e

解析：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}-1\right)\right]^x$

又∵ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}-1}{\dfrac{1}{x}}\xlongequal{\text{令 } x=\frac{1}{t}}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t+\cos t-1}{t}=1$ ∴ 原式 $=e$.

21. 3

解析：解法 1：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x(\cos x-1)}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2}{x^{k-1}}$

$\therefore k-1=2\quad\therefore k=3$.

解法 2：利用级数展开.

$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad x\in(-\infty,+\infty)$

$\therefore \sin 2x=2x-\dfrac{(2x)^3}{3!}+o(x^3)$

$\therefore \sin 2x-2\sin x=-x^3+o(x^3)$，由此可以判断，当 $k=3$ 时，$\sin 2x-2\sin x$ 是与 x^3 同阶无穷小.

22. 0

解析：$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=b$，$f(0)=b$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$，

$\therefore b=0$ 时，$f(x)$ 在定义域内连续.

23. $e^{-\frac{1}{2}}$

解析：由连续函数定义可知 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$

从而有 $a=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{x^{-2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}-\frac{\tan x}{2x}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

24. 10

解析：∵ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x+1}$ 存在，

$\therefore \lim\limits_{x\to -1}(x^3-ax^2-x+4)=4-a=0,\ a=4$

$\therefore \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-4x^2-x+4}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}(x^2-5x+4)=10$.

25. 2

解析：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2}(x^2+ax+b)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+a}{2x-1}=2$

$\therefore \dfrac{2\times 2+a}{2\times 2-1}=2$

$\therefore a=2.$

26. $\underline{(-\infty,+\infty)}$

解析：$f[g(x)]=\sin[g(x)]=\begin{cases}\sin(x-\pi) & x\leqslant 0\\ \sin(x+\pi) & x>0\end{cases}=\begin{cases}-\sin x & x\leqslant 0\\ -\sin x & x>0\end{cases}$

$\therefore f[g(x)]=-\sin x$，对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$，$f[g(x)]$ 均连续.

27. $\underline{\dfrac{3}{2}}$

解析：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{2x}=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}x\cos\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2}.$

28. $\underline{\dfrac{1}{2}}$

解析：利用夹逼定理，设 $I=\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}$

$\because \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}<I<\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}n(n+1)}{n^2+2n}=\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}I=\dfrac{1}{2}.$

29. $\underline{2}$

解析：利用和差化积公式：

$\lim\limits_{x\to\infty}x[\sin\ln(1+\dfrac{3}{x})-\sin\ln(1+\dfrac{1}{x})]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}2x\sin\left[\dfrac{\ln(1+\dfrac{3}{x})-\ln(1+\dfrac{1}{x})}{2}\right]\cos\left[\dfrac{\ln(1+\dfrac{3}{x})+\ln(1+\dfrac{1}{x})}{2}\right]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}2x\cdot\sin\dfrac{\ln\dfrac{1+\dfrac{3}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\cos\dfrac{\ln(1+\dfrac{3}{x})(1+\dfrac{1}{x})}{2}=\lim\limits_{x\to\infty}2x\sin\left[\dfrac{\ln(1+\dfrac{2}{1+x})}{2}\right]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}2x\sin\dfrac{1}{1+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{1}{2x}}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}}=2.$

30. $\underline{\dfrac{\ln a}{2}}$

解析：$\because \ln[f(1)\cdot f(2)\cdot\cdots\cdot f(n)]=\ln[a^1\cdot a^2\cdot\cdots\cdot a^n]=(1+2+\cdots+n)\ln a=\dfrac{n(n+1)}{2}\ln a$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln[f(1)\cdot f(2)\cdot\cdots\cdot f(n)]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n}{2n^2}\ln a=\dfrac{\ln a}{2}.$

31. $\underline{e^{-\frac{1}{2}}}$

解析：$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x}\cdot\frac{(1+x^2)}{2x}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

32. $\underline{\ \ 3\ \ }$

解析：$\sqrt{3}\sqrt[4]{3}\sqrt[8]{3}\cdots\sqrt[2^n]{3}=3^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{4}}\cdots3^{\frac{1}{2^n}}$

$$=3^{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}}=3^{\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}}=\frac{3}{3^{\frac{1}{2^n}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{3}\sqrt[4]{3}\sqrt[8]{3}\cdots\sqrt[2^n]{3})=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{3^{\frac{1}{2^n}}}=3.$$

33. $\underline{-\frac{\sqrt{2}}{6}}$

解析：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)}{(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})(x^2+x-2)}$

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x-1}{(x-1)(x+2)}=-\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

34. $\underline{-\frac{1}{4}}$

解析：原式$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{4x\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}=-\frac{1}{4}.$$

35. $\underline{\frac{1}{6}}$

解析：

$$\lim_{x\to 0}\cot x\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{x-\sin x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\frac{x-\sin x}{x\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

Ⅱ 选择题

1. $\underline{D}$

解析：$1\leqslant 1-\ln x\leqslant 2\ \Rightarrow\ x\in[e^{-1},1]$.

2. $\underline{D}$

解析：$\because\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$，而

$$\lim_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,\ \lim_{x\to 1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$$

故

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,\ \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=0$$

所以$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$不存在但不为$\infty$.

3. B

解析:由$|f(x)|\leqslant1$,从而$f[f(x)]=1$,于是$f\{f[f(x)]\}=1$.

4. D

解析:由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=\lim\limits_{x\to0}\frac{a\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}+b\cdot\frac{1-\cos x}{x}}{c\cdot\frac{\ln(1-2x)}{x}+d\cdot\frac{1-e^{-x^2}}{x}}=\frac{a}{-2c}=2$

即 $a=-4c$.

5. C

解析:$\lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha x+\sqrt{x^2-x+1}-\beta)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\alpha+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\frac{\beta}{x})=0$

$\therefore\lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\frac{\beta}{x})=0\quad\therefore\alpha+1=0\quad\alpha=-1$

把$\alpha=-1$代入:$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x-\beta)=0$

$\therefore\beta=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=-\frac{1}{2}$.

6. A

解析:$\because f(x)$在$x=0$处连续

$$\therefore f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{1-\sqrt[3]{1-x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})(1+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}{(1-\sqrt[3]{1-x})(1+\sqrt{1-x})(1+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{1+\sqrt{1-x}}=\frac{3}{2}.$$

7. D

解析:$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$存在并不意味着$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$.

8. C

解析:A 设$f(x)=\frac{1}{x}$,$g(x)=x^2$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,而$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)g(x)=0$不成立.

B 如上例,设$g(x)=c$(c为常数).

D 如例 A.

9. B

解析:对于 A 当$a<0$时$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,此时$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^a$趋近于无穷大

对于 C,当$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\frac{\pi}{2}$时,$\lim\limits_{x\to x_0}\arcsin|f(x)|$趋近于无穷大.

对于 D,$\ln f(x)$中当$f(x)<0$本身就不存在,所以也排除,所以选 B.

10. B

解析:$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(3x-1)=2$,$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(3-x)=2$,$f(1)=1$

11. B

解析:$\alpha=\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t=\int_0^{x^2}\cos u\,\mathrm{d}\sqrt{u}=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{\cos u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{\mathrm{d}\sin u}{\sqrt{u}}\sim\frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}}=\sqrt{u}\Big|_0^{x^2}=x$

$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,\mathrm{d}t\sim\int_0^{x^2}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{x^2}=\frac{2}{3}x^3$