工科课程解题题典丛书

# 概率论与数理统计

# 解题题典

胡晓敏 陈建兰 孙伟良 编

西北工業大學出版社

# 概率论与数理统计解题题典

胡晓敏　陈建兰　孙伟良　编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是根据原国家教育委员会颁布的“高等学校概率论与数理统计课程的教学基本要求”，配合国内通用的概率论与数理统计课程教材编写的教学辅导书。

全书共分为八章。每章的选题给出分析、解答，对典型题加以点评，总结规律及技巧。注重基本概念、基本理论、基本方法技巧的掌握和融会贯通。书末附综合性训练试题两套及其解答。

本书可作为高等学校各专业本科、专科学生学习概率论与数理统计的参考书，也可供报考硕士研究生的考生使用。

**图书在版编目(CIP)数据**

概率论与数理统计解题题典/胡晓敏等编．—西安：西北工业大学出版社，2004.6

(工科课程解题题典)

ISBN 7-5612-1748-X

Ⅰ．概… Ⅱ．胡… Ⅲ．①概率论—高等学校—解题②数理统计—高等学校—解题 Ⅳ．021-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 009504 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号　邮编：710072　电话：(029)88493844
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：兴平市印刷厂
开　　本：787 mm×960 mm　1/16
印　　张：13.375
字　　数：232 千字
版　　次：2004 年 6 月第 1 版　　2004 年 6 月第 1 次印刷
印　　数：1～4 000 册
定　　价：18.00 元

# 前　　言

概率论与数理统计课程是高等学校理工科各专业的一门重要基础课程，也是工科各专业硕士研究生人学考试科目。学好这门课程，做习题是一个必不可少的重要环节。本书收集了近400个概率论与数理统计的典型题目。所选的题目旨在启发读者学习概率统计的兴趣，提高解题的能力，对一些典型题给出分析及点评。题目中有的选自全国硕士研究生的入学考试试题，此类题在题文末加一括号说明试题使用的时间和科目。

希望本书能帮助读者加深对概率统计课程内容的理解，进而掌握解题的方法、技巧，以培养分析问题和解决问题的能力。读者在阅读本书时，一定要独立思考，积极尝试，参考解答而不依赖解答，最终掌握所学的内容。

本书由杭州电子工业学院理学院胡晓敏、陈建兰、孙伟良3人合作编写。陈建兰编写第1章至第3章；胡晓敏编写第4章至第5章以及综合训练题和解答；孙伟良编写第6章至第8章。全书由胡晓敏负责统稿。

由于编者的水平有限，书中难免有错误、疏漏及不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

2004年1月于杭州

# 目　　录

# 第1章 概率论的基本概念

## 第1节 随机试验、样本空间

**1.1** 写出下列随机试验的样本空间:

(1) 同时掷两个骰子,记录两个骰子可能出现的点数.

(2) 同时掷两个骰子,记录两个骰子点数之和.

(3) 将1尺之棰折成3段,观察各段的长度.

(4) 一袋里有4个球,它们分别标号1,2,3,4.从袋中任取1球后,不放回袋中,再从袋中任取1球,记录两次取球的结果.

(5) 将(4)的取球方式改为第一次取球后放回袋中再作第二次取球,记录两次取球的结果.

(6) 将(4)的取球方式改为一次从口袋里任取2个球,记录取球的结果.

(7) 将(4)的取球方式改为不放回袋中而是从袋中一个接一个地取球,直到取得1号球为止,记录取球的结果.

(8) 对某工厂出厂的产品进行检查,合格的记上"正品",不合格的记上"次品".如果连续查出2个次品就停止检查,或检查4个产品就停止检查,记录检查的结果.

(1) **分析** 由于一个骰子的点数有1,2,3,4,5,6种可能.同时掷两个骰子,可能的结果只要组合一下就可以了.

**解** 若用(1,2)表示两个骰子中出现了1点和2点,其余(2,3),… 作类似理解,则样本空间 $S_1$ 可表示为

$$\begin{aligned}S_1 = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\&(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,3),\\&(3,4),(3,5),(3,6),(4,4),(4,5),\\&(5,5),(5,6),(6,6)\}\end{aligned}$$

(2) **分析** 同(1)小题,只是试验的目的不同而异.

**解** $$S_2 = \{2,3,4,5,\cdots,12\}$$

(3) **分析** 事先只知道每段大于0,多长未知.

**解** $S_3 = \{(x,y,z) \mid x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z = 1\}$

$x,y,z$ 表示第一、二、三段长度.

(4) **分析** 由于第一次取球后不放回,接着第二次取球,因此两次取得的标号不能重复.显然第一次取球时,袋中的 4 个球中的任何 1 个都可能被取到;第二次取球时,袋中剩下的 3 个球中的任何 1 个都可能被取到;并要考虑取到的 2 个球的先后顺序.

**解** 若用(1,2) 表示第一次取得 1 号球,第 2 次取得 2 号球,其余如(2,3),… 可作类似理解,则样本空间为

$$S_4 = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}$$

(5) **分析** (5) 与(4) 小题的区别在于第二次取球时 ,4 个球中的任何一个仍可能被取到,这样,两次取得的球的标号可以相同.

**解** 样本空间为

$$S_5 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$$

(6) **分析** (6) 与 (4) 小题的区别在于取得的两个球没有先后顺序.

**解** 若用 (1,2) 表示取得 1 号球和 2 号球,其余 (2,3),… 可作类似理解,则样本空间为

$$S_6 = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$$

(7) **分析** 此试验的特点有二:一是连续取得的球的标号不可能重复,每次取球,袋中的每一个球都可能被取到;二是只要取到 1 号球试验就结束,即每次试验,最后取到的必是 1 号球.

**解** 若用(3,2,1) 表示依次取得的球的标号为 3,2,1,其余(2,1),… 可类似理解,则样本空间 $S_7$ 为

$$S_7 = \{(1),(2,1),(3,1),(4,1),(2,3,1),(2,4,1),(3,2,1),(3,4,1),(4,2,1),(4,3,1),(2,3,4,1),(2,4,3,1),(3,2,4,1),(3,4,2,1),(4,2,3,1),(4,3,2,1)\}$$

(8) **分析** 类似于(7) 小题,试验的特点是:最后 2 个是次品或产品个数为 4.

**解** 用0表示次品,1表示正品.若用100表示依次查到的产品为正品,次品,次品,其余 1010,… 可类似理解,则样本空间为

$$S_8 = \{00,100,0100,1100,1010,0110,1110,0101,1101,1011,0111,1111\}$$

**点评** 解此类题的关键在于弄清试验的方式(特点)及试验的目的.目的不同,样本空间一般也不同,如(1),(2) 两小题.

# 第 2 节　随机事件

**1.2**　设 $A,B,C$ 为 3 个事件，用 $A,B,C$ 的运算关系表示下列各事件：

(1) $A$ 发生，$B$ 与 $C$ 不发生；

(2) $A$ 与 $B$ 都发生，而 $C$ 不发生；

(3) $A,B,C$ 中至少有一个发生；

(4) $A,B,C$ 都发生；

(5) $A,B,C$ 都不发生；

(6) $A,B,C$ 中不多于一个发生；

(7) $A,B,C$ 中不多于两个发生；

(8) $A,B,C$ 中至少有两个发生.

**分析**　简单的事件由事件运算的定义直接写出，例如(1) ～ (5) 小题；复杂的事件可考虑用作图或逆事件等来分析，例如(6) ～ (8) 小题.

**解**　(1) $A\overline{B}\,\overline{C}$；

(2) $AB\overline{C}$；

(3) $A\cup B\cup C$；

(4) $ABC$；

(5) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

(6) 方法一：如图 1.1 所示. $A,B,C$ 中不多于一个发生，应包括四块，因此该事件可表示为

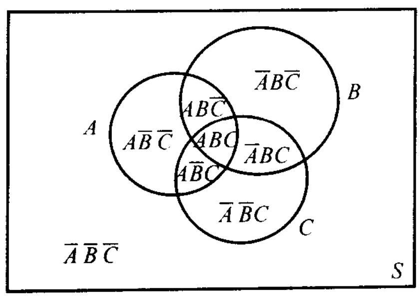


图　1.1

$$\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}B\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$$

方法二：若将“$A,B,C$ 中不多于一个发生”翻译成“$A,B,C$ 中至少有两个同时不发生”，则该事件可表示为

$$\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{C}$$

方法三：先写出它的逆事件，逆的逆就是它本身. 本题的逆事件为“$A,B,C$ 中至少有两个同时发生”，所以，答案可表示为

$$\overline{AB\cup BC\cup AC}$$

**点评**　对于类似于该题的复杂事件，尽量采用后两种方法.

**说明**　三种表达式是相同的. 例如：

$$\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}B\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=$$
$$[\overline{A}\,\overline{B}(C\cup\overline{C})]\cup[\overline{A}\,\overline{C}(B\cup\overline{B})]\cup[\overline{B}\,\overline{C}(A\cup\overline{A})]=$$
$$\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{C}$$

(7) 该事件可表示为

$$\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \quad \text{(至少有一个不发生)}$$

或

$$\overline{ABC} \quad \text{(三个同时发生的逆事件)}$$

(8) 由事件的运算可知,“$A,B,C$ 中至少有二个发生”可表示为

$$AB \cup BC \cup AC$$

**1.3** 设有随机事件 $A,B,C$,满足 $C \supset AB$,$\overline{C} \supset \overline{A}\overline{B}$. 证明:

$$AC = C\overline{B} \cup AB$$

**分析** 由作图法(见图 1.2)可知,$AC$ 的阴影部分由 $C\overline{B}$ 左侧阴影部分和 $AB$ 右侧阴影部分组成.

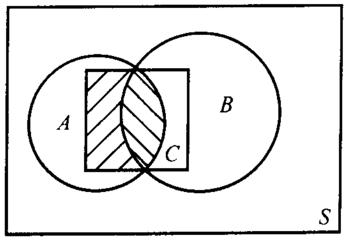


图 1.2

**证明** 因为

$$AC = AC(\overline{B} \cup B) = AC\overline{B} \cup ACB$$

由已知条件知 $\overline{C} \supset \overline{A}\,\overline{B}$,所以

$$C \subset A \cup B$$

$$C\overline{B} \subset (A \cup B)\overline{B} = A\overline{B}$$

所以

$$AC\overline{B} = C\overline{B} \cap A\overline{B} = C\overline{B}$$

又因为 $C \supset AB$,所以

$$ACB = AB$$

所以

$$AC = C\overline{B} \cup AB$$

**1.4** 射击运动员射击的目标是 3 个半径分别为 0.1 m,0.2 m,0.3 m 的同心圆环域,标为 $r_1,r_2,r_3$,以 $A_i (i = 1,2,3)$ 记击中半径为 $r_i$ 的圆环域内事件. 试以事件的集合表示下列情况:

(1) 击中 0.3 m 半径的圆环域外;

(2) 击中任一圆环域内;

(3) 击中 0.1 m 半径的圆环域内;

(4) 击中 0.1 m 半径的圆环域外,0.2 m 半径的圆环域内.

**分析** 本题要理解事件发生的含义. 某一事件发生即表示在每次试验中当且仅当有事件的一个样本点出现.

**解** (1) $\overline{A}_3$($A_3$ 的逆事件);

(2) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$;

(3) $A_1$ 或 $A_1A_2A_3$;

(4) $\overline{A}_1A_2$.

**1.5** 说明如何认识互逆事件与互不相容(互斥)事件之间的联系与区别.

**分析** 应从互逆事件与互不相容事件的定义去考虑.

**解** 若 $A$ 与 $B$ 互逆,则 $A \cup B = S$ 且 $A \cap B = \varnothing$,即 $B = S - A$. 指的

是对于每次试验，事件 $A,B$ 中必有一个发生，且仅有一个发生.

若 $A$ 与 $B$ 互不相容，则 $AB=\varnothing$，指的是 $A$ 与 $B$ 不能同时发生，但 $A,B$ 可以同时不发生．因此，互逆必定互不相容，互不相容不一定互逆.

区别互逆与互不相容的关键是：互逆是在样本空间只有两个（或两类）事件时存在，而互不相容是在样本空间还可有多个（或多类）事件时存在. 互不相容事件的特征是，在一次试验中，两个互不相容事件可以同时不发生．例如，在一次考试中，及格与不及格总有一个发生，它们互逆又互不相容；但考试成绩为 60 分或 90 分是互不相容的，却不互逆，因为它们可以同时不发生.

**1.6**　对于任意二事件 $A$ 和 $B$，与 $A\cup B$ 不等价的是（　　）.

A. $A\subset B$　　B. $\bar{B}\subset\bar{A}$　　C. $A\bar{B}=\varnothing$　　D. $\bar{A}B=\varnothing$

（2001 年考研，数学四）

**分析**　用作图法，把 4 个选择答案与 $A\cup B$ 去比较.

**解**　选 D.

**1.7**　若事件 $A,B,C$ 满足 $A\cup B=B\cup C$，问 $A=B$ 是否成立？

（1988 年考研，数学四）

**分析**　可以用举反例来求解．

**解**　不一定.

如果　$A=\{1,2,3,4,5\},B=\{1,2,3\},C=\{4,5\}$

则 $A\cup B=B\cup C$ 但 $A\neq B$.

**1.8**　在电炉上安装了 4 个温控器，其显示温度的误差是随机的. 在使用过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 $t_0$，电炉就断电. 以 $E$ 表示事件“电炉断电”. 设 $T_{(1)}\leqslant T_{(2)}\leqslant T_{(3)}\leqslant T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的温度值按递增顺序排列，则事件 $E$ 等于事件（　　）.　（2000 年考研，数学三、四）

A. $\{T_{(1)}\geqslant t_0\}$　B. $\{T_{(2)}\geqslant t_0\}$　C. $\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$　D. $\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$

**分析**　不低于即为大于等于. 有两个温控器显示的温度不低于临界温度 $t_0$，等价于 $\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$.

**解**　选 C.

## 第 3 节　频率与概率

**1.9**　设 $A,B$ 是两事件且 $P(A)=0.6,P(B)=0.7$. 试问：

（1）在什么条件下 $P(AB)$ 取到最大值？最大值是多少？

（2）在什么条件下 $P(AB)$ 取到最小值？最小值是多少？

**分析**　为了求 $P(AB)$，即要找到事件 $A,B$ 与 $AB$ 之间的概率有什么关系，用加法公式：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

**解** (1) 因为 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

所以 $$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

显然,要使 $P(AB)$ 最大,只能 $P(A\cup B)$ 最小.

由已知条件知 $P(A\cup B)$ 不可能为 0,而

$$P(A\cup B)\geqslant P(A),\quad P(A\cup B)\geqslant P(B)$$

又 $$P(A)=0.6,\quad P(B)=0.7$$

所以 当 $A\subset B$ 时,$P(A\cup B)$ 取到最小值,此时

$$P(A\cup B)=P(B)=0.7$$

即当 $A\subset B$ 时,$P(AB)$ 取到最大值,最大值是 0.6。

(2) 由(1)可知,要使 $P(AB)$ 最小,则 $P(A\cup B)$ 要最大,即 $P(A\cup B)=1$ 为最大值,此时 $A\cup B=S$.

所以,当 $A\cup B=S$ 时,$P(A\cup B)$ 取最大值,$P(AB)$ 取得最小值,最小值为 0.3.

**1.10** 设 $A,B,C$ 是 3 个事件,且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,$P(AB)=P(BC)=0$,$P(AC)=\frac{1}{8}$,求在 $A,B,C$ 中至少有一个发生的概率.

**分析** 由事件的运算定义可知,$A,B,C$ 至少有一个发生可表示为

$$A\cup B\cup C$$

而求 $P(A\cup B\cup C)$ 可用加法公式,即

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$$

及概率的性质.

**解** 因为 $$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$$

又因 $$ABC\subset AB$$

所以 $$0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$$

即 $$P(ABC)=0$$

所以 $$P(A\cup B\cup C)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-0-\frac{1}{8}+0=\frac{5}{8}$$

**1.11** 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,$P(AB)=0$,$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{6}$,则事件 $A,B,C$ 全不发生的概率是________.

(1992 年考研,数学一)

**分析** 由事件的运算关系可知“事件 $A,B,C$ 全不发生”的逆事件为:

"事件 $A,B,C$ 至少有一个发生"，即

$$\overline{A}\,\overline{B}\overline{C}=\overline{A\cup B\cup C}$$

则由逆事件公式和加法公式即可求解.

**解**　因为　$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

已知　$P(AB)=0$

所以　$P(ABC)=0$

$$P(A\cup B\cup C)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}+0=\frac{5}{12}$$

可得　$P(\overline{A}\,\overline{B}\overline{C})=1-P(A\cup B\cup C)=\dfrac{7}{12}$

**点评**　解此类题时，要会熟练运用加法公式，逆事件公式，即 $P(\overline{A})=1-P(A)$，以及当事件 $A\subset B$ 时有 $P(A)\leqslant P(B)$ 等性质.

**1.12**　对任意事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，证明：

(1) $P(A_1A_2)\geqslant P(A_1)+P(A_2)-1$；

(2) $P(A_1A_2\cdots A_n)\geqslant P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)-(n-1)$.

**分析**　(1) 要证的虽然是不等式，但仍可用加法公式及概率性质. 因为对任一事件来说，其概率必大于等于 0，小于等于 1，即 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

(2) 用归纳法可证.

**解**　(1) 由加法公式　$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)$

可得　$P(A_1A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cup A_2)$

因为　$0\leqslant P(A_1\cup A_2)\leqslant 1$

所以　$P(A_1A_2)\geqslant P(A_1)+P(A_2)-1$

(2) 用数学归纳法，当 $n=2$ 时即(1)式成立.

假设 $k=n-1$ 时不等式成立，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})\geqslant P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_{n-1})-(n-2)$$

而

$$\begin{aligned}P(A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n)&=P[(A_1A_2\cdots A_{n-1})A_n]\geqslant\\&P(A_1A_2\cdots A_{n-1})+P(A_n)-1\geqslant\\&P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_{n-1})-\\&(n-2)+P(A_n)-1=\\&P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)-(n-1)\end{aligned}$$

证毕.

**1.13**　当事件 $A,B$ 同时发生时，事件 $C$ 必发生，则(　　).

A. $P(C)=P(AB)$　　B. $P(C)=P(A+B)$

C. $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$　　D. $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

(1992 年考研，数学四、五)

**分析**　由题意知，当 $A,B$ 同时发生时，事件 $C$ 必发生，即 $AB \subset C$. 因此 A，B 不成立.

由概率的性质及加法公式可知

$$P(C) \geqslant P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geqslant P(A) + P(B) - 1$$

**解**　选 D.

**1.14**　设 $A$ 与 $B$ 是两个概率不为零的不相容事件，则下列结论肯定正确的是(　　).

A. $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 不相容　　B. $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容

C. $P(AB) = P(A)P(B)$　　D. $P(A-B) = P(A)$

(1991 年考研，数学四、五)

**分析**　$A,B$ 不相容，说明 $AB = \varnothing$，所以 A 不成立.

又因 $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$，所以 C 不成立.

又若 $A \cup B = S$，则当 $A$ 与 $B$ 不相容时，$\overline{A}, \overline{B}$ 也不相容，所以 B 不成立.

由于 $AB = \varnothing, A - B = A\overline{B} = A$，所以 $P(A-B) = P(A)$.

**解**　选 D.

**1.15**　以 $A$ 表示"甲种产品畅销，乙种产品滞销"，则其对立事件 $\overline{A}$ 为(　　).

A. 甲种产品滞销，乙种产品畅销　　B. 甲、乙两种产品均畅销

C. 甲种产品畅销　　D. 甲种产品滞销或乙种产品畅销

(1989 年考研，数学四)

**分析**　用 $B$ 表示甲种产品畅销，$C$ 表示乙种产品畅销，再用事件的运算来表示 $\overline{A}$，即

$$\overline{A} = \overline{B\overline{C}} = \overline{B} \cup \overline{\overline{C}} = \overline{B} \cup C$$

最后再转换成文字形式的表达.

**解**　选 D.

**1.16**　设随机事件 $A,B$ 及其事件 $A \cup B$ 的概率分别为 0.4，0.3 和 0.6. 若 $\overline{B}$ 表示 $B$ 的对立事件，那么积事件 $A\overline{B}$ 的概率 $P(A\overline{B}) =$ ________.

(1990 年考研，数学一)

**分析**　由图 1.3 可知，

$$A\overline{B} = A - AB$$

且

$$AB \subset A$$

则　$P(A\overline{B}) = P(A - AB) = P(A) - P(AB)$

求 $P(AB)$ 须用加法公式

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

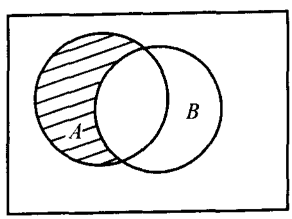


图　1.3

得
$$P(A\bar{B}) = P(A) - [P(A) + P(B) - P(A \cup B)] = 0.4 - (0.4 + 0.3 - 0.6) = 0.3$$

**解**　填 $P(A\bar{B}) = 0.3$

**点评**　要熟练运用概率性质：

(1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

(2) 若 $A \subset B$，则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$，且 $P(B) \geqslant P(A)$；

(3) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$；

(4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

(5) 若 $A$ 与 $B$ 互不相容(互斥)，则有 $AB = \varnothing$.

## 第 4 节　等可能概型(古典概型)

**1.17**　将 $n$ 个球随机地放入 $n$ 个盒子中去(即每一个球放入哪一个盒子是任意的). 试求：

(1) 每个盒子都有一个球的概率；

(2) 至少有一个盒子空着的概率.

**分析**　为了求基本事件的总数，可以假设将 $n$ 个球编号为 $1,2,\cdots,n$；$n$ 个盒子编号为 $1,2,\cdots,n$. 然后给每个球分配一个盒子的编号，一种分配方式就是一个基本事件，一个球可分配 $n$ 个盒子. 显然，$n$ 个球可分配的可能性为 $n^n$，即为基本事件的总数.

(1) 每个盒子都有一个球，说明一个球只能放一个盒子编号，为 $n$ 个编号的一个全排列 $n!$.

(2)“至少有一个盒子空着”正好为“每个盒子都有一个球”的逆事件，用逆事件公式.

**解**　(1) 设 $A$ 表示“每个盒子都有一个球”，则
$$P(A) = \frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{S\text{ 的基本事件的总数}} = \frac{n!}{n^n}$$

(2) 设 $B$ 表示“至少有一个盒子空着”，则
$$\bar{B} = A$$

所以
$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{n!}{n^n}$$

**1.18** 从一副扑克的52张(王牌已除外)牌中,任意抽出两张,求它们都是黑桃的概率.

**分析** 抽出的两张牌构成一个基本事件,不考虑两张牌的顺序,故一个基本事件是两张牌构成的组合,或两张牌的一种抽取方式.因此,所有可能的抽取方式构成了所有的基本事件.又52张牌中有13张牌为黑桃.

**解** 设$A$表示"抽到的两张牌都是黑桃",两张牌的一个抽取方式为一个基本事件,故基本事件的总数为$C_{52}^2$,$A$包含的基本事件数为$C_{13}^2$.所以可得

$$P(A)=\frac{C_{13}^2}{C_{52}^2}=\frac{3}{51}$$

**1.19** 在一标准英语字典中有55个由两个不相同的字母所组成的单词.若从26个英文字母中任取两个字母予以排列,求能排成上述单词的概率.

**分析** 很明显两个字母组成的单词有顺序关系,因此基本事件的总数为排列$P_{26}^2=26\times 25$.

**解** 所求概率 $$P=\frac{55}{26\times 25}=\frac{11}{130}$$

**1.20** 一个盒中装有10只晶体管,其中有4只次品,6只正品,随机地抽取1只(即从盒中任取1只)测试,直到4只次品晶体管都找到.求最后1只次品晶体管在下列情况发现的概率:

(1) 在第5次测试发现.

(2) 在第10次测试发现.

**分析** (1) 题目的要求使我们感兴趣的是在第5次测试时是否找到最后1只次品管子.为此我们只需要观察前5次的测试结果,因此一个基本事件是由5只不同管子组成的一个排列.基本事件的总数为$P_{10}^5=10\times 9\times 8\times 7\times 6$(与顺序有关).前4次测试中必须有3只次品管子和一个正品管子,第5次一定是次品管子.

(2) 类似(1)的分析.

**解** (1) 设$A$表示"在第5次测试时找到最后1只次品".由分析可知基本事件的总数为

$$P_{10}^5=10\times 9\times 8\times 7\times 6$$

$A$包含的基本事件数为 $C_4^3 4!C_6^1$

$C_4^3$考虑的是在前4次测试中3只次品管子可以在不同的位置取到,3只次品管子所在位置确定后,由于4只管子的顺序不同,故有4!种排列方式;在剩下的一个位置上是正品管子,可以是6只中的任1只,有$C_6^1$种取法.

所以 $$P(A)=\frac{C_4^3 4!C_6^1}{10\times 9\times 8\times 7\times 6}=\frac{2}{105}$$

（2）设 $B$ 表示"在第 10 次测试时发现最后 1 只次品管子"，类似（1）小题，可知

$$P(B)=\frac{C_9^3 4!6!}{10!}=\frac{2}{5}$$

**1.21** 某产品 40 件，其中有次品 3 件，现从其中任取 3 件，求下列事件的概率：

（1）3 件中恰有 1 件次品；

（2）3 件中恰有 2 件次品；

（3）3 件全是次品；

（4）3 件全是正品；

（5）3 件中至少 1 件为次品.

**分析** 抽到的 3 件产品构成一个基本事件，所有可能的抽取方式构成所有的基本事件，没有顺序关系，是组合. 基本事件的总数为 $C_{40}^3$.

（1）3 件中恰有 1 件次品，说明 1 件次品可以是 3 件次品中的任何 1 件，有 $C_3^1$ 种取法，其他 2 件正品要在 37 件正品中取，有 $C_{37}^2$ 中取法.

（2），（3），（4）小题类似于（1）小题.

（5）"3 件中至少有 1 件次品"的逆事件为"3 件全是正品"；"3 件中至少有 1 件为次品"说明"3 件恰有 1 件次品"或"恰有 2 件次品或全是次品".

**解** （1）设 $A_1$ 表示"3 件中恰有 1 件次品"，则

$$P(A_1)=\frac{C_3^1 C_{37}^2}{C_{40}^3}\left(=\frac{999}{4\,940}\right)$$

（2）设 $A_2$ 表示"3 件中恰有 2 件次品"，则

$$P(A_2)=\frac{C_3^2 C_{37}^1}{C_{40}^3}\left(=\frac{111}{9\,880}\right)$$

（3）设 $A_3$ 表示"3 件全是次品"，则

$$P(A_3)=\frac{C_3^3}{C_{40}^3}$$

（4）设 $A_4$ 表示"3 件全是正品"，则

$$P(A_4)=\frac{C_{37}^3}{C_{40}^3}$$

（5）设 $A_5$ 表示"3 件中至少有 1 件为次品"，则有两种解法.

方法一：
$$\overline{A}_5=A_4$$

所以
$$P(A_5)=1-P(\overline{A}_5)=1-P(A_4)=1-\frac{C_{37}^3}{C_{40}^3}$$

方法二：
$$A_5=A_1\cup A_2\cup A_3$$

所以
$$P(A_5)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{C_{37}^2 C_3^1+C_{37}^1 C_3^2+C_3^3}{C_{40}^3}$$