笃志图书

高等学校教材配套辅导

概率论与数理统计

同步辅导

浙江大学 第三版

主 编：同济大学应用数学系 彭 舟

- 教材内容归纳
- 重点难点剖析
- 典型例题解析
- 课本习题全解
- 考研真题精选

航空工业出版社

笃志图书

概率论与数理统计

同步辅导

浙江大学 第三版

主 编：同济大学应用数学系 彭 舟

- 教材内容归纳
- 重点难点剖析
- 典型例题解析
- 课本习题全解
- 考研真题精选

航空工业出版社

内 容 提 要

本书是与浙江大学主编的《概率论与数理统计》第三版相配套的学习辅导用书，全书根据全国高等院校概率统计教学大纲和研究生入学考试要求编写。可供理、工、农、医（非数学专业）大学生学习概率统计时作为参考用书，也可供考研数学复习第一阶段使用。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计同步辅导/彭舟主编，一北京：航空工业出版社，2005.2

ISBN 7-80183-553-0

Ⅰ.概… Ⅱ.彭… Ⅲ.概率论一高等学校一教学参考资料 ②数理统计一高等学校一教学参考资料

Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 009240 号

概率论与数理统计同步辅导

GailüLun Yu Shuli Tongji Tongbufudao

航空工业出版社出版发行

（北京市安定门外小关东里 14 号 100029）

发行电话：010-64978486 84926529
010-82742769 82742036

北京金明盛印刷有限公司 全国各地新华书店经售

2005 年 2 月第 1 版 2005 年 2 月第 1 次印刷

开本：787×960 1/16 印张：16.75 字数：270 千字

印数：1－8000 定价：15.80 元

前　言

本书是浙江大学主编的《概率论与数理统计》(第三版)的指定配套参考用书。适合初次学习《概率论与数理统计》课程的大学生和准备报考硕士研究生的人员复习概率统计时使用。

随着人类步入二十一世纪,科学技术飞速发展,概率统计在科学研究、经济金融、生物等领域的应用空前广泛,概率统计课程在大学数学中的地位也越来越重要。但由于近年来教学改革的实施,大学数学课程课时不断减少,而难度和教学要求并未降低,同学们急切需要一本合适的概率统计辅导书。为了帮助广大同学学好概率统计,同济大学应用数学系和浙江大学数学系根据多年的概率论与数理统计教学经验,认真听取了广大学生的意见,继推出《高等数学同步辅导》、《线性代数同步辅导》之后,联合编写了这本《概率论与数理统计同步辅导》。

本书内容体系严格按照浙江大学主编的《概率论与数理统计》(第三版)教材编排。在具体内容上具有以下特点:

1. 在每章开始给出了大纲对本章各知识点的不同程度的要求,使学生在学习中做到有的放矢。

2. 概括归纳出了教材每章的主要内容,更有利于同学提纲挈领,深刻理解各部分内容之间的关系,从整体的角度掌握课本内容。

3. 例题既包括与基本概念有关的各种题型,又有综合各个知识点具有一定难度的综合例题,从基础到提高,适合各种水平学生的需要。

4. 给出了每节课后习题的全解,供学生作为解题参考。

5. 精选了有代表性的近年考研真题及解答放在每章的最后,让学生在第一遍学习时就对研究生入学考试的难度要求有初步认识。

《概率论与数理统计同步辅导》具有科学完整的体系,如果合理地使用本书,必将事半功倍。本书的出版,如果能对广大学生在概率统计的学习和复习中有所帮助,那就是对我们工作的最大肯定。由于时间仓促和水平所限,书中的不足之处请广大读者和专家给予批评指正。

编　者

二〇〇五年一月

目　录

第一章　概率论的基本概念

一、本章大纲要求

1. 理解随机试验的特征

2. 了解样本空间的概念，理解随机事件的概念，掌握事件的关系与运算

3. 正确理解随机试验的概率的定义，熟练掌握概率的基本性质及概率的运算

4. 熟练地掌握古典概型的几种问题解法

5. 理解条件概率的概念，掌握概率的乘法公式全概率公式及贝叶斯(Bayes)公式并能熟练应用它们进行计算

6. 理解随机事件的独立性概念，并掌握用独立性计算概率的方法

二、基本内容

1. 随机试验

称对随机现象的实验和观测为**随机试验**. 随机试验具有以下三个特征：

(1) 可以在相同条件下进行重复；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

2. 样本空间和随机事件

(1) 样本空间

将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**，记为 S. 样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为**样本点**.

(2) 随机事件

称试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的**随机事件，简称为事件**. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一**事件发生**. 由一个样本点组成的单点集，称为**基本事件**. 在每次试验中总是发生的事件称为**必然事件**，在每次试验中都不发生的事件称为**不可能事件**.

(3) 事件之间的关系

1° 包含：若事件 A 发生必导致事件 B 发生，称事件 B **包含**事件 A，记为 $A \subset B$.

2° 相等：若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记为 $A = B$.

3° 和事件：事件 $A \cup B = \{x \mid x \in A 或 x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**和事件**.

4° 积事件：事件 $A \cap B = \{x \mid x \in A 且 x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**积事件**. 又记为 AB.

5° 差事件：事件 $A-B=\{x \mid x\in A 且 x\notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**差事件**.

6° 互不相容事件：若 $A\cap B=\varnothing$，称 A 与 B 是**互不相容的**或**互斥的**.

7° 逆事件：若 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$，称 A 与 B 互为**逆事件**，或**对立事件**. A 的对立事件记为 $\overline{A}=S-A$.

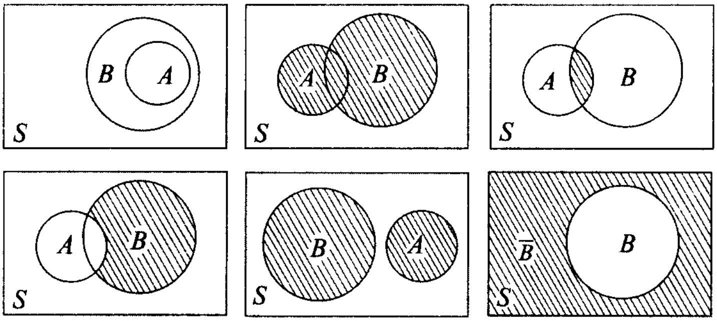

图 1－1

(4) 事件的运算律

1° **交换律**：$A\cup B=B\cup A$； $A\cap B=B\cap A$.

2° **结合律**：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$； $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

3° **分配律**：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

4° **德·摩根律**：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$； $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}=\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A}_k; \quad \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n;$$

$$\overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k}=\bigcup_{k=1}^{n}\overline{A}_k; \quad \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n.$$

3. 概率的定义及性质

(1) 定义

设 E 是随机实验，S 是它的样本空间. 给 E 的每一事件 A 赋于一个实数，记为 $P(A)$ 称为事件 A 的**概率**. 如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

1° 非负性：对于每一个事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

2° 规范性：对于必然事件 S，有 $P(S)=1$；

3° 可列可加性：设 $A_1,A_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件，即对于 $i\neq j$，$A_iA_j=\varnothing$，$i,j=1,2,\cdots$，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots.$$

概率可看作 $n\to\infty$ 时事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 的极限，于是用概率 $P(A)$ 表示事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小.

(2) 性质

性质 1　$P(\varnothing)=0$.

性质 2　若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

该性质称为概率的**有限可加性**.

性质 3　设 A,B 是两个事件,若 $A\subset B$,则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A);$$

$$P(B)\geqslant P(A).$$

性质 4　对于任一事件 A,$P(A)\leqslant 1$.

性质 5　对于任一事件 A,有

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

性质 6　对于任意两事件 A,B,有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

4. 古典概型

(1) 定义

设实验 E 满足:样本空间 S 只含有限个基本事件,记作 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$,即

$$S=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\omega_n\};$$

基本事件 $\omega_1,\omega_2,\cdots\omega_n$ 等可能发生. 则称 E 为**古典概型**.

(2) 计算

对于古典概型 E,若样本空间含 n 个基本事件,事件 A 是由 k 个基本事件组成的,则 A 的概率规定为$\frac{k}{n}$,即

$$P(A)=\frac{A\text{ 中基本事件数}}{\text{基本事件总数}}=\frac{k}{n}.$$

5. 条件概率及三大公式

(1) 条件概率

设 A,B 是两个事件,且 $P(A)>0$,称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**.

(2) 乘法定理

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件,$n\geqslant 2$,且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_{n-1}\mid A_1A_2\cdots A_{n-2})\cdots P(A_2\mid A_1)P(A_1).$$

(3) 全概率公式

如果事件组 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 满足:

① $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 两两互斥，且 $P(B_k)>0(k=1,2,\cdots,n)$；

② $\bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k=S$，

则对任一事件 A，有

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(B_k)P(A\mid B_k).$$

(4) 贝叶斯(Bayes)公式

设试验 E 的样本空间为 S，事件组 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 满足全概率公式的①、②，则对任何一事件 A，当 $P(A)>0$ 时，有

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n}P(B_k)P(A\mid B_k)}\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

贝叶斯公式又称为**逆概公式**.

6. **独立性**

(1) 定义

两事件情形：

设 A,B 是两个事件，如果

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称事件 A,B **相互独立**，简称 A,B **独立**.

三事件情形：

设 A,B,C 是三个事件，如果

$$P(AB)=P(A)P(B)$$
$$P(BC)=P(B)P(C)$$
$$P(AC)=P(A)P(C)$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

则称事件 A,B,C **相互独立**.

n 事件情形：

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n(n\geqslant 2)$ 个事件，如果对于其中任意 2 个，任意 3 个，…，任意 n 个事件的积事件的概率，都等于各事件的概率之积，则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **相互独立**.

(2) 独立事件的性质

性质 1 若 $P(B)>0$，则 A、B 独立的充分必要条件是 $P(A\mid B)=P(A)$.

性质 2 若事件 A、B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

三、重点难点

1.所谓"随机试验",是相对于"确定性试验"而言的,它是指一个试验可以在相同的条件下重复进行,而且每次试验的结果都不能事先预言.

2.频率与概率是两个完全不同的概念,不能说频率就是概率,因为频率不能脱离具体的 n 次试验,而概率是指一次试验中,事件发生的可能性的大小,它与试验的次数 n 无关.从某种意义上说,频率是概率的近似,概率是频率的极限.

3.事件的和、差运算不可以随意去括号或交换运算次序,如对 $B+(A-B)$ 进行去括号并交换运算次序,有

$$B+(A-B)=B+A-B=B-B+A=A$$

这显然是不对的,如下图.

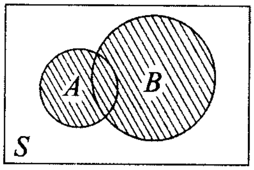

图 1－2

4.全概率公式为我们提供了一种思想方法,这就是把复杂事件 B 分割为一些互斥事件的和事件,而这些互斥事件是一些简单事件,再将加法法则与乘法法则相结合,计算出要求的复杂事件 B 的概率.

5.关于事件独立的定义要很好掌握,其要点是要真正区分事件独立与事件互斥,这是两个本质完全不同的概念,切勿混淆.两个事件(有非零概率)互斥就不独立,独立就不互斥.而对立事件与互斥事件的关系是:

(1) 对立必互斥,但互斥未必对立;

(2) 互斥概念适用于多个事件,而对立概念只适用于两个事件;

(3) 两个事件互斥只表明这两个事件不能同时发生,即至多只能发生其中一个,但可以都不发生,而两事件对立则表示它们有且仅有一个发生.

6.在贝叶斯公式中,已知事件 B_i 的概率 $P(B_i)$ 称为"先验概率",它是试验前根据以往经验确定的一种假设概率,现在进行了一次试验,如果事件 A 确实发生了,则对于事件 B_i 的概率应予以重新估计,也就是在事件 A 发生之后,再来判断事件 B_i 发生的概率 $P(B_i \mid A)$,称之为"后验概率".

由于后验概率的计算以先验概率为基础,所以两者有一定的联系.但后验概率是在试验之后事件 A 确已发生的情况下,来分析 B_i 的概率,因而一般来讲,有利于 A 发生的那些原因的概率就会增大,而不利于 A 发生的那些原因的概率就会减小.

四、典型例题解析

例1 写出下列随机试验E的样本空间Ω,并说出所给定的事件A的基本事件组成:

(1) E:观察 50 粒种子中发芽的粒数,A:{发芽数不多于 40 粒};

(2)E:小组有a,b,c,d四人,要选正式代表和列席代表各一个去参加某个会议,观察选举的结果,A:{a 当选};

(3) E:甲乙两人下棋,观察棋赛的结果,A:{至少有一人不败}.

解 (1) 基本事件是{有i粒发芽}($i=0,1,2,\cdots,50$),样空间Ω由这51个基本事件所组成. 而事件 A 则由其中的 41 个基本事件($i=0,1,2,\cdots,40$) 所组成;

(2) 样本空间 Ω 由 12 个基本事件组成,

$$\Omega=\{ab,ac,ad,bc,bd,cd,ba,ca,da,cb,db,dc\}$$

其中每一个基本事件用两个字母表示,写在前面的表示正式代表,写在后面的表示列席代表.

事件 A:{a 当选} $=\{ab,ac,ad,ba,ca,da\}$ 共含有 6 个基本事件;

(3) 样本空间 Ω 由 3 个基本事件所组成,即

$$\Omega=\{\text{甲胜乙负},\text{乙胜甲负},\text{和局}\}$$

事件A:{至少有一人不败}={甲不败,乙不败,甲乙都不败}$=\Omega$. 故事件A与Ω相同.

例2 写出下列随机试验E的样本空间Ω,如果Ω是有限集,计算样本空间的容量V_Ω(Ω 中样本点的总数目):

(1)E:一个小班进行一次数学考试,试录其平均成绩(百分制);

(2)E:10 件产品中有 3 件是次品,每次从该 10 件中任取 1 件(取后不放回),直到将 3 件次品都取出为止,记录抽取的次数;

(3)E:连续生产某种产品,直到生产出 10 个正品为止,记录产品总件数;

(4)E:某射击手向靶射击,直到击中为止,记录击中的各种情况;

(5)E:向 xOy 平面上的单位圆内($x^2+y^2<1$) 投点,记录落点的坐标.

解 (1)$\Omega=\{\frac{0}{n},\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{100\cdot n}{n}\}$,$n$ 为小班里的人数.

$$V_\Omega=100n+1;$$

(2)$\Omega=\{3,4,\cdots,10\}$,$V_\Omega=8$;

(3)$\Omega=\{10,11,12,\cdots\}$;

(4) 用 ω_i 表示第 i 次击中,$\overline{\omega}_i$ 表示第 i 次不中,则

$$\Omega=\{\omega_1,\ \overline{\omega}\omega_2,\ \overline{\omega}_1\overline{\omega}_2\omega_3,\cdots,\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2\cdots\overline{\omega_{n-1}}\omega_n,\cdots\}$$

Ω 为无限集;

(5)$\Omega=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$.

例3 箱中有 4 件同样的产品,分别标号 1,2,3,4,试写出下列随机试验的

样本空间：

(1) 从箱中一次任取两件；

(2) 从箱中任取一件，不放回箱中，再从箱中任取一件(不放回抽取)；

(3) 从箱中每次取一件，取后放回箱中，再从箱中任取一件(有放回抽取)；

(4) 从箱中不放回地连续抽取产品，直到取到 1 号产品为止．

解　(1) 试验中抽取的两件产品没有先后顺序问题，则其样本点有 $C_4^2 = 6$ 个，若用 (i,j) 表示取得 i 号及 j 号产品，故所求样本空间为

$$\Omega = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}.$$

(2) 因为该抽取为不放回抽取，因此，两此不可能取到同号产品，同时，该试验应考虑取到两件产品的次序，所以其样本空间有 $A_4^2 = 12$ 个样本点．用 (i,j) 表示第 1 次取到 i 号产品，第 2 次取到 j 号产品，则所求样本空间为

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),\\&(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}.\end{aligned}$$

(3) 这个试验是“有放回抽取”，即第 1 次取到某号产品后放回箱中，第 2 次仍有可能取到该产品，即两次取到的产品可能同号，于是样本点共有 $4^2 = 16$ 个，即

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),\\&(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),\\&(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),\\&(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}.\end{aligned}$$

(4) 该随机试验一方面是连续取到的产品的标号不可能重复，另一方面是只要取到 1 号产品试验就结束，这个试验所有可能结果有 $1+A_3^1+A_3^2+A_3^3 = 16$. 同(2)中的记号，有

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1),(2,1),(3,1),(4,1),(2,3,1),(2,4,1),\\&(3,4,1),(3,2,1),(4,2,1),(4,3,1),\\&(2,3,4,1),(2,4,3,1),(3,2,4,1),(3,4,2,1),\\&(4,3,2,1),(4,2,3,1)\}.\end{aligned}$$

例 4　在某校学生中任选一名学生，设 A 表示被选出是男生，B 表示该学生是三年级学生，C 表示该学生是运动员．

(1) 叙述事件 $A \cap B \cap \overline{C}$ 的意义；

(2) 在什么条件下有恒等式 $A \cap B \cap C = C$；

(3) 什么时候关系式 $C \subset B$ 正确；

(4) 什么时候关系式 $\overline{A} = B$ 成立．

解　(1) 事件 $A \cap B \cap \overline{C}$ 表示该生是三年级男生，但不是运动员；

(2) $A \cap B \cap C = C$ 表示全校的运动员都是三年级男生；

(3) 当所有运动员都是三年级学生，即除三年级外其它年级学生都不是运动员时，$C \subset B$ 正确；

(4) 当全校女生都在三年级且三年级学生都是女生时 $\overline{A} = B$ 成立．

例 5　设 A、B、C 为三事件，用 A、B、C 的运算关系表示下列事件：

(1) A 发生，B 与 C 不发生；

(2) A,B,C 都发生；

(3) A,B,C 中不多于一个发生．

解　如图 1－3，易知：

(1) 根据事件运算的定义，该事件可表示为 $A\overline{B}\,\overline{C}$.

(2) A,B,C 都发生可表示为 ABC.

(3) 方法一：该事件可表示为

$$A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,B\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,C+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}.$$

方法二：该事件可表示为 $\overline{A}\,\overline{B}+\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{C}$.

方法三：该事件可表示为 $\overline{AB+BC+AC}$.

请读者体会上面三种表示法的含义．

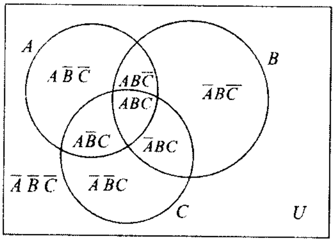

图 1－3

例 6　同时掷两颗骰子(每个骰子有六个面，分别有点数为 1,2,3,4,5,6)，观察它们出现的点数，求两颗骰子掷得点数不同的概率．

解　一个基本事件是由两个数字组成的排列 (i,j)，$i,j = 1,2,\cdots,6$，而 i,j 可以重复，故基本事件的总数为 6^2. 用 A 表示"两颗骰子掷得的点数不同"，即就是从 $1,2,\cdots,6$ 六个数字中无重复地任取两个排列方式数 A_6^2. 故

$$P(A) = \frac{A_6^2}{6^2} = \frac{5}{6}\quad.$$

例 7　将 n 个球随机放入 n 个袋子中去(每个球放入哪个袋子都是任意的)，试求：

(1) 每个袋子都有一个球的概率；

(2) 至少有一个袋子空着的概率．

解　给 n 个球和 n 个袋子分别都编号 $1,2,\cdots,n$. 然后给每个球分配一个袋子的编号，每种分配方式都是一个基本事件，可以表示为 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$，其中 i_k 表示第 k 个球分配的袋子编号，i_k 可取 $1,2,\cdots,n$ 中在任一个数. 故基本事件的总数为 n^n.

(1) 设 A 表示"每个盒子中都有一个球"，它对应于 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 全不相同的排列方式 $(i_1,i_2\cdots,i_n)$，即 n 个编号的一个全排列，其总数为 $n!$ 个. 故

$$P(A) = \frac{A_n^n}{n^n} = \frac{n!}{n^n}$$

(2) 设 B 表示"至少有一个盒子空着．"由于 $B = \overline{A}$，所以

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(A) = \frac{n_!}{n^n}.$$

例 8　袋中有 α 个白球和 β 个黑球，从中任意地接连取出 k 个球（$1\leqslant k\leqslant \alpha+\beta$，如果球被取出后不放回，试求最后取出的一个球是白球的概率．

解　方法一：

设 $A=\{$最后取出的一个球是白球$\}$，因为我们关心的是最后取出的一球是白球还是黑球，所以考虑样本空间时只对最后一球进行考虑．设把 $\alpha+\beta$ 个球加以编号，前 α 个球为白球，后 β 个球为黑球．设 ω_i 表示第 k 次摸出第 i 号球，则样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{\alpha+\beta}\}$，易知每一球都等可能性的在第 k 次被摸到，我们要求的是事件 $A=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_\alpha\}$ 的概率，故由古典概率的计算公式得所求概率为

$$P(A)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

方法二：

因为取球是不放回的，所以应考虑排列．每 k 个排列好的球构成一个基本事件，接连不放回地取 k 个球，共有 $A_{\alpha+\beta}^k$ 种取法，故样本空间共有 $A_{\alpha+\beta}^k$ 个样本点．另外，最后取出的一个白球可以是 α 个白球中的任何一个，其余 $k-1$ 个可以是其余 $\alpha+\beta-1$ 个中的任意 $k-1$ 个，故事件 A 包含的样本点数为 $\alpha A_{\alpha+\beta-1}^{k-1}$ 个．故

$$P(A)=\frac{\alpha A_{\alpha+\beta-1}^{k-1}}{A_{\alpha+\beta}^k}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

例 9　从集合 $\Omega=\{1,2,\cdots,N\}$ 中随意取 n 个数，按有放回抽样和无放回抽样两种不同方式分别求下列事件的概率：

(1) $A=\{n$ 个数都能被 m 整除$\}$；

(2) $B=\{n$ 个数都能被 m_1 或 m_2 整除$\}$.

解　有放回抽样时：

从 Ω 中取 n 个数，共有 N^n 种不同取法，故样本点总数为 N^n.

(1) 设从 Ω 中取得 n 个数 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 均能被 m 整除，则 $\frac{m_1}{m}=k_1,\frac{m_2}{m}=k_2,\cdots,\frac{m_n}{m}=k_n$ 均为正整数且 $1\leqslant k_1,k_2,\cdots,k_n\leqslant[\frac{N}{m}]$，又易知 $(m_1,m_2,\cdots,m_n)\sim(k_1,k_2,\cdots,k_n)$，而满足 $1\leqslant k_1,k_2,\cdots,k_n\leqslant[\frac{N}{m}]$ 的 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 共有 $[\frac{N}{m}]^n$ 种．故

$$P(A)=[\frac{N}{m}]^n\Big/N^n,\quad \text{其中}[x]\text{表示不超过 } x \text{ 的最大正整数}.$$

(2) 由(1) 易知在 Ω 中能被 m_1 整除的数共有 $[\frac{N}{m_1}]$ 个，能被 m_2 整除的数共有 $[\frac{N}{m_2}]$. 故从 Ω 中随机抽 n 个能被 m_1 或 m_2 整除的数共有 $\left([\frac{N}{m_1}]+[\frac{N}{m_2}]\right)^n$ 种．所以

$$P(B)=\left([\frac{N}{m_1}][\frac{N}{m_2}]\right)^n\Big/N^n$$

无放回抽样情形：

从 Ω 中任取 n 个数，共有 C_N^n 种不同取法，故样本点总数为 C_N^n.

(1) 从 Ω 中随机取 n 个数均能被 m 整除共有 $C_{M_1}^n$ 种取法，其中 $M_1=[\frac{N}{n}]$，故

$$P(A)=\frac{C_{M_1}^n}{C_N^n}=\frac{M_1!(N-n)!}{N!(M_1-n)!}$$

(2) 从 Ω 中随机取 n 个均能被 m_1 或 m_2 整除的数，共有 $C_{M_2}^n$ 种不同取法，其中 $M_2=[\frac{N}{m_1}]+[\frac{N}{m_2}]$，故

$$P(B)=\frac{C_{M_2}^n}{C_N^n}=\frac{M_2!(N-n)!}{N!(M_2-n)!}.$$

例 10 100 件产品中有 5 件次品，现从中连接任取两件而不放回，求在第一件取得正品的条件下第二件取得次品的概率．

解 设 A 为{第二件取得次品}，B 为{第一件取得正品}，则由题意可得

$$P(A\mid B)=\frac{5}{99}$$

例 11 某种动物由出生活到 20 岁的概率为 0.8，活到 25 岁的概率为 0.4，问现年 20 岁的这种动物活到 25 岁的概率是多少？

解 设 A 为{由出生活到 20 岁}的事件，B 为{活到 25 岁}的事件，则所求概率为

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

由于 $B\subset A$，故 $AB=B$，则

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.8}=0.5.$$

例 12 甲乙两工厂生产 1000 个零件，其中有 300 个是乙厂的生产的，而在这 300 个零件中有 189 个是标准品，现从 1000 个零件中任取一个，

(1) 试求它是乙厂生产的标准品的概率是多少？

(2) 通过此题说明 $P(A\mid B)$ 与 $P(AB)$ 在概念上的差异．

解 (1) 设 A 为{取出一件是标准品}，B 为{取出一件是乙厂生产的}，则{取出一件是乙厂生产的标准品}的事件为 AB，则

$$P(B)=\frac{300}{1000}=0.3,$$

$$P(A\mid B)=\frac{189}{300}=0.63$$

$$P(AB)=P(B)\cdot P(A\mid B)=0.3\times 0.63=0.189$$

(2) 由(1) 可知，$P(A\mid B)$ 与 $P(AB)$ 在概念上有较大差别，前者是“在取的产品是