中学数学解题方法

待定系数法

罗介玲

四川教育出版社

中学数学解题方法

待定系数法

罗介玲

责任编辑：何伍鸣
封面设计：何一兵
版面设计：王　凌

中学数学解题方法　　待定系数法

四川教育出版社出版发行　（成都盐道街三号）
四川省新华书店经销　自贡新华印刷厂印刷

开本787×960毫米 1/32 印张2.75　字数38千
1989年11月第一版　1991年8月第二次印刷
印数：4751—11650册

ISBN 7-5408-1102-1/G·1072　定价：0.82元

前　言

《中学数学解题方法》丛书是根据目前中学数学教学的实际而组织编写的，旨在帮助中学生扩大数学知识面，增强深广度，掌握好解题的“钥匙”。

这套丛书将系统介绍中学数学中基本的解题方法，包括《数学归纳法》、《几何变换法》、《待定系数法》、《判别式法》、《反证法》、《分析法》、《换元法》、《复数法》、《递推法》、《解析法》、《参数法》、《图解法》等十二种。

就全书体系和结构而言，丛书是以“方法”为主线，以近现代数学的基本思想为指导，纵向贯穿中学数学的主要内容，横向总揽各方法中的典型实例，力求在纵横有机结合的基础上帮助读者拓宽解题思路，培养分析和运用方法的能力，从而提高数学思维的素质。

该丛书的编写注意突出了以下几点：

1. 以方法成书，每册书全面系统地介绍了一

种方法的基本理论及各种具体的运用，着重阐述了一种方法常用于解决哪几类问题，在什么情况下使用这种方法，以及一般采用的思维方式，等等。

2. 方法的介绍力求科学性与趣味性的统一，定义、定理、公理的表述，一是符合近现代数学的基本理论，二是与全国统编教材基本吻合。对方法的理论依据均作了较为浅显的说明，并将生动性和趣味性融合于实例中，以达深入浅出，事半功倍的效果。

3. 例题的选择注重了典型性、灵活性、启发性，有助于培养逻辑思维，抽象思维以及发散思维，求同、求异思维等。

这套丛书的作者均是高级数学教师，有着丰富的教学和科研经验，作为他们多年来辛勤劳动的结晶奉献给广大中学师生和数学爱好者，将使他们感到最大的欣慰。

编辑出版这套丛书，是我社根据教育体制改革及教学实际要求进行的尝试探索，不足之处在所难免，恳请读者不吝指正。

编者

1988.10

目 录

方　　法

一、待定系数法

1．什么是待定系数法

先看两个简单例子：

例1　求多项式$4x^3+7x^2+6x+2$除以x^2+1的商式和余式．

分析：因为被除式为三次式，除式为二次式，所以，在未求出商式和余式之前，我们能判断所求的商式为一次式，余式至多是一次式．

解：设所求商式为$ax+b$，余式为$cx+d$，则

$$4x^3+7x^2+6x+2=(x^2+1)(ax+b)+(cx+d)$$

即

$$4x^3+7x^2+6x+2=ax^3+bx^2+(a+c)x$$

$+(b+d)$

比较两边同类项系数得

$$\begin{cases} a=4, \\ b=7, \\ a+c=6, \\ b+d=2. \end{cases}$$

解此方程组，得

$a=4$，$b=7$，$c=2$，$d=-5$.

所以商式为$4x+7$，余式为$2x-5$.

例2 已知直线l和直线$3x-18y-4=0$平行，且和坐标轴围成面积为3的三角形，求直线l的方程.

分析：直线方程都有确定的解析式，由题意可设所求的直线方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$（截距式）较方便，只需确定待定系数$a$、$b$的值即可.

解：设直线l的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，由题设条件，可得方程组

$$\begin{cases} \frac{1}{2}|a\cdot b|=3, \\ -\frac{b}{a}=\frac{1}{6}. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} a=-6, \\ b=1, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=6, \\ b=-1. \end{cases}$

所以，所求直线l的方程为

$$x-6y+6=0 \quad \text{或} \quad x-6y-6=0.$$

从上面两个例题的解法可以看出：在某些数学问题中，如果我们事先能判断所求问题的结果具有某种确定的数学表达式，仅仅是这种形式中的某些系数有待确定．则可先引进适当的几个“尚待确定的系数”，把要解答的数学问题，根据给定的已知条件，列出含尚待确定的系数的方程（组），并解此方程（组），以求出这些系数的值，从而使问题得到解决．这种解决数学问题的方法，叫做**待定系数法**．

“待定系数法”的基本思想，就是把具有某种确定形式的数学问题，通过引入一些待定的系数，转化为方程组来解决．

2．哪些数学问题可以用待定系数法

要判断一个数学问题能否使用待定系数法求解，关键是看所求数学问题的结果是否具有某种确定的数学表达式，如果具有，则可使用待定系数法求解．例如代数中求多项式相除的商式和余式、分解因式、化部分分式、数列求和、求函数、求复数、解不等式或证明条件不等式，以及解析几何中求曲线方程等．这些问题的结果都具有确定的数学表达形式，因而都可以使用待定系数法来求解．

3．使用待定系数法的步骤

第一步：确定所求问题是含待定系数的解析式．

第二步：根据给定的已知条件，列出一组含待定系数的方程．

第三步：解方程组或消去待定系数，从而使问题得到解决．

二、待定系数法的根据

为了说明待定系数法的理论根据，让我们先说明关于多项式恒等的意义．

对于两个一元多项式$f(x)$、$g(x)$来说，当未知数x同取任一数值a时，如果它们所得的值都是相等的，即$f(a)=g(a)$．那么，这两个多项式就称为是恒等的，记为$f(x)\equiv g(x)$，也可简记为$f(x)=g(x)$．

例如　$f(x)=4x^2-(2-3x)$，

$g(x)=3x-2+4x^2$．

当x任取一个值时，比如$x=0$，-1，1，…，a时，则有$f(0)=-2=g(0)$，$f(-1)=-1=g(-1)$，$f(1)=5=g(1)$，…，$f(a)=4a^2-(2-3a)=4a^2+3a-2=g(a)$．

因此，多项式 $f(x)=4x^2-(2-3x)$ 与 $g(x)=3x-2+4x^2$ 是恒等的，记为

$$f(x)=4x^2-(2-3x)\equiv g(x)=3x-2+4x^2.$$

反过来，我们也可以得出：

如果 $f(x)\equiv g(x)$，那么对于任意一个数值 a，都有 $f(a)=g(a)$。

由此得出以下性质：

定理：如果两个多项式恒等，这两个多项式的同类项系数都一定对应相等。

也就是说，如果

$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\equiv b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$ 那么

$$a_n=b_n,\ a_{n-1}=b_{n-1},\ \cdots,\ a_1=b_1,\ a_0=b_0.$$

证明：$\because$ $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\equiv b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$.

移项，合并同类项可得：

$$(a_n-b_n)x^n+(a_{n-1}-b_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_1-b_1)x+(a_0-b_0)\equiv 0$$

这就是说，x 取任何值时，左边多项式的值都是零，因此，各项系数应全为零.

即 $a_n-b_n=a_{n-1}-b_{n-1}=\cdots\cdots=a_1-b_1=a_0-b_0=0$,

所以 $a_n=b_n$，$a_{n-1}=b_{n-1}$，$\cdots$，$a_1=b_1$，$a_0=b_0$。

由此可知待定系数法的主要依据是

1．多项式$g(x)\equiv f(x)$的充要条件是对于任一个值a，都有$g(a)\equiv f(a)$．

2．多项式$g(x)\equiv f(x)$的充要条件是两个多项式各同类项系数都对应相等．

三、重要定理

为了使待定系数法应用更广泛，我们将介绍下面的概念和有关定理．

我们知道当$x=a$时，有$f(a)=0$，a就叫做方程$f(x)=0$的根．我们也把a叫做多项式$f(x)$的根．如多项式$f(x)=2x^2-7x+3$，所对应的方程$2x^2-7x+3=0$的根为$x_1=3$，$x_2=\frac{1}{2}$，我们把$x_1=3$与$x_2=\frac{1}{2}$称为多项式$f(x)=2x^2-7x+3$的根．

余式定理 多项式$f(x)$除以$x-a$所得的余式等于$f(a)$．

证明：设多项式$f(x)$除以$x-a$所得的商式

为$q(x)$，余式为$r(x)$，由除法可得：

$$f(x)=q(x)\cdot(x-a)+r(x).$$

其中$r(x)$的次数低于$(x-a)$的次数或为零．所以$r(x)$必为一个常数，我们令$r(x)=R$，因此

$$f(x)=q(x)\cdot(x-a)+R$$

这是一个恒等式，取$x=a$，有

$$f(a)=q(a)(a-a)+R,$$

$$\therefore \quad R=f(a).$$

这就证明了余式定理．这个结论告诉我们，求多项式$f(x)$除以$(x-a)$的余数，无需使用除法，只需求出多项式$f(x)$在$x=a$的值$f(a)$就行了。

例1　不做除法，求下列各题的余数：

（1）$f(x)=x^3-2x+1$除以$x-\frac{1}{2}$；

（2）$g(x)=x^4+2x^3+4x+1$除以$x+2$.

解：（1）$\because f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3-2\times\frac{1}{2}+1$

$$=\frac{1}{8},$$

由余式定理可知，余数

$$R=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}.$$

（2）$\because g(-2)=(-2)^4+2\cdot(-2)^3$

$+4\cdot(-2)+1=-7$,

$\therefore$余数$R=g(-2)=-7$.

例2　求证$f(x)=x^4-1$可被$x-1$整除.

分析：要证明$f(x)$可被$x-1$整除，只要证明$f(x)$除以$x-1$所得余数是零即可.

证明：$\because f(1)=1^4-1=0$,

$\therefore$　$f(x)$除以$x-1$　的余数为零.

因此，$f(x)=x^4-1$能被$x-1$整除.

由余式定理，我们得到恒等式：

$$\boxed{f(x)=q(x)(x-a)+f(a)} \quad (1)$$

还可以得到以下四个重要推论.

推论1　如果$f(a)=0$，那么$(x-a)$必能整除$f(x)$；反过来，如果$x-a$能整除$f(x)$，那么$f(a)=0$.

证明：因为$f(a)=0$，由等式（1）可得

$f(x)=q(x)\cdot(x-a)$,

这就是说，余数$R=0$，$x-a$能整除$f(x)$.

反过来，因为$x-a$能整除$f(x)$，即余数$R=0$.由余式定理$R=f(a)$，$\therefore f(a)=0$.

推论1的内容，也可以这样叙述：如果$f(a)$

$=0$，那么，$f(x)$必定有因式$(x-a)$. 反过来也正确，因此，推论1又叫做**因式定理**.常可作为判断$x-a$是否是$f(x)$的因式的依据.

例3 证明：

（1） $x-2$是$f(x)=x^3-5x^2+12x-12$的因式；

（2） $x-a$是$g(x)=x^5-a^5$的因式.

证明：（1）$\because f(2)=2^3-5\times2^2+12\times2-12=0$,

由推论1知，$x-2$是$f(x)$的因式；

（2） $\because g(a)=a^5-a^5=0$,

$\therefore x-a$是x^5-a^5的因式.

推论2 如果多项式$f(x)$有两个不同的根a和b，那么，$(x-a)(x-b)$必能整除$f(x)$，即$f(x)$必含有因式$(x-a)(x-b)$；反过来说，如果$f(x)$含有因式$(x-a)(x-b)$，也就是$f(x)$能被$(x-a)(x-b)$整除，那么，a、b一定是$f(x)$的两个根.

证明：由于a是$f(x)$的根，即$f(a)=0$.

由推论1可知，$(x-a)$能整除$f(x)$.

不妨设 $f(x)=q(x)\cdot(x-a)$ （2）

将$x=b$代入（2）式，可得

$f(b)=q_1(b)\cdot(b-a)$。

$\because b$也是$f(x)$的根，$\therefore f(b)=0$，

因此$q_1(b)\cdot(b-a)=0$。

由于$b\neq a$，$\therefore b-a\neq 0$，

$\therefore q_1(b)=0$。

根据推论1，$x-b$能整除$q_1(x)$。

再设 $q_1(x)=q_2(x)\cdot(x-b)$ (3)

将(3)式代入(2)式，得

$$f(x)=q_2(x)\cdot(x-b)\cdot(x-a)$$

这正说明$(x-a)(x-b)$可整除$f(x)$，也就是$f(x)$含有因式$(x-a)(x-b)$。

反过来，如果$f(x)=q(x)\cdot(x-a)\cdot(x-b)$，由$f(x)=0$得出$q(x)\cdot(x-a)\cdot(x-b)=0$，因此$f(x)$的两个根是$x=a$，$x=b$。

例4 证明 $f(x)=x^4+2x^3-4x^2-2x+3$能够被x^2-1整除。

证明：$\because x^2-1=(x+1)(x-1)$，

且 $f(-1)=(-1)^4+2\times(-1)^3-4\times(-1)^2-2\times(-1)+3=0$

$$f(1)=1+2-4-2+3=0.$$

$\therefore x=-1$，$x=1$是$f(x)$的两个根。

因此，$f(x)$能被$(x+1)(x-1)=x^2-1$整除。