中学教师继续教育丛书

中学数学重点课题研究

张鸿顺 主编

杭州大学出版社

中学数学重点课题研究

张 鸿 顺　主编

杭州大学

（浙）新登字第12号

中学数学重点课题研究

张鸿顺　主编

*

杭州大学出版社出版

（杭州天目山路34号）

*

浙江省新华书店总发行　浙江诸暨印刷厂印刷

787×1092毫米 1/32　9印张　200千字

1991年9月第1版　1991年11月第2次印刷

印数：5001—15000

书号：ISBN 7-81035-151-6/G・061

定　价：4.10元

总　　序

由京、津、沪、浙等全国十二省市教育学院协作编写的《中学教师继续教育丛书》陆续出版了。在更新教育观念、深化教育改革的今天，这套丛书的问世是很有意义的。

国家振兴，教育为本；教育振兴，教师为本。能否建设一支思想品德素质和文化业务素质精良的师资队伍，关系到社会主义教育事业的成败。而要加强师资队伍的建设，就得采取必要的措施，使他们能结合工作的需要，不断地再学习、再进修、再提高。

随着大部分中学教师逐步达到现阶段国家规定的合格学历，教师培训工作的重点必将有步骤地转移到开展继续教育上来。这种继续教育是指对已达国家规定学历的教师进行以提高政治思想素质和教育教学能力为主要目标的培训。它包括职务培训、新教师见习期培训、骨干教师培训和对部分骨干教师提高学历层次的培训等方面。做好这项工作，对于建设一支能够坚持社会主义方向，品德高尚，素质优良，结构合理，适应我国教育事业发展需要的教师队伍，有着十分重要的作用。

开展继续教育，不能没有教材。但我们的国家地域辽

阔，人口众多，各地师资队伍建设的客观条件和实际需求很不一样，这就需要从实际出发设置相应的课程，编写不同的教材。这次，一些起步较早、条件相仿的教育学院，根据已有的实践，发挥群体的优势，协作编写这套丛书，它既可供有关院校当前开展继续教育使用，又能兼顾中学教师自学进修的需要，这是切合时宜的。

中学教师继续教育这项工作目前尚处于探索、研究、实践的阶段，因此，可说这套丛书的编撰工作也同样处在探索阶段，只能随着我国继续教育事业的发展而逐步改进、完善。但编写者在调查研究和从事中学教师继续教育实践的基础上确定丛书的选题和内容，努力把思想政治教育放在首位，致力学科前沿知识与基础知识同中学教育实际的结合，教育科学与心理科学同中学学科教学实际的结合，这是可取的。丛书以科学性、先进性、适用性、针对性作为努力方向，这就把教师培训工作与提高教育质量有机地联系起来，我相信它将会受到广大教师的欢迎。

编写《中学教师继续教育丛书》是一项开创性的工作。我们希望参编院校发扬团结协作的精神，不断实践，不断提高，共同把这套丛书编好，为中学教师继续教育事业作出贡献。

金长泽

金长泽同志系国家教委师范教育司司长

□前　言

《中学数学重点课题研究》是中学中级教师必修的一门继续教育课程。设置这门课程的目的是：用较高的观点对中学数学重点课题进行系统的分析，准确掌握知识的整体结构和相互之间的联系，正确而灵活地运用处理数学问题的方法，较深入地研究并解决中学数学所遇到的各种问题，以提高教师的数学修养和教学水平。

问题是怎样确定重点课题？我认为应既着眼于现在又放眼于未来。

现实情况是比较复杂的。首先从现行中学数学教材来看，从1978年的全国统编教材到现在已经发生了不少变化，随着普及义务教育的实施，教材势必还要发生变化。这是因为义务教育是要使全体7—15岁的少年儿童都要受到的教育，也就是说要使几亿人都必须受到的基础教育，因此教材的内容应使这几亿学生都要受益，而不能像以往那样只使少数能升入高一级学校学习的学生受益，竟使大多数学生陪榜，不仅挫伤了这大多数学生的积极性，造成严重的流失问题，而且即使他们陪完了榜，也不能很好地参加社会实践，造成很大的浪费。因此，义务教育教材应以对公民文化的最基本的要求为标准，知识面要扩充，实用性应加强。

但是，中等学校毕竟还有为高等学校输送合格人才，为国家培养各方面的尖端人才打好基础的重要任务。当今世界科学技术发展迅猛，要跟上时代的步伐并步入前列，中学教

材又必须不断更新，纳入或渗透新观点，增加新的、学生可接受的现代科学知识。这样，就与上述普及任务之间产生了很大的矛盾，而两者又都是不可缺少的。因此可以预言，义务教育就是为了普及，而高级中学将是为进一步升学作准备，尽管这样也会有一些学生是陪榜的，但毕竟数量要小得多，何况不做出点牺牲就不能在激烈竞争的世界之中处于有利的地位。

这样，重点课题的确定就不能只停留在现行中学教材的水平上，还必须考虑未来高级中学的需要。

其次，就当前中级教师的现状来考虑，其中绝大多数都已取得了大学或大专的学历，有了一定的高等数学基础，具备了用较高的观点来研究和处理初等数学问题的水平与能力，他们也具有较丰富的教学经验，也较熟练地掌握了教材教法。但是，长期以来，师范院校与中学实际脱节，很少过问初等数学问题，因此，取得了学历并不等于解决了有关初等数学中的一些问题。不可否认，有些中学教师肯于刻苦钻研，确实解决了不少问题，但是对大多数教师来说，由于他们工作与家务负担都很重，又受升学指挥棒的影响，一头扎到题解之中，而不去深入钻研有关初等数学中的一些概念与理论问题，正因如此，几年来输送到高一级学校的学生出现了“高分低能”的现象，这不能不引起全体教育工作者的重视。

十年来，我遇到了不少有关初等数学的问题，其中有的是教师在教学过程中反映出来的，有的是教师直接向我询问的，有的是教材、教参、杂志、小报、复习资料等等反映出来的，大体上是：(1)把恒等变形误认为是同解变形；(2)混淆充分与必要条件，造成逻辑错误；(3)根本没有无限的

概念，误认为直线上的点要比射线上的点多，当然比线段上的点更多；（4）混淆顺序与大小的区别，误认为复数无顺序；（5）两条平行线决定一平面，只证存在性或只证唯一性；（6）两条二次曲线相切的充要条件不清，乱用所谓的判别式法；等等. 为了说明问题的严重性，宁肯占点篇幅，再举三个实例：

（1）对于等速螺线 $\rho=\theta$ 来说，因为

$$\rho=\pm\sqrt{x^2+y^2}\,,\quad \theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

从而有
$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

于是由 $f(-x,\ -y)=f(x,\ y)$，可知 $\rho=\theta$ 关于原点对称. 由画图肯定这是错误的，但找不出错误的原因，也就无法向学生解答.

（2）已知 $2\leqslant a+b\leqslant 4,$ ①

$1\leqslant a-b\leqslant 2$。 ②

求 $4a-2b$ 的范围.

同学甲的解法是：

①＋②得 $3\leqslant 2a\leqslant 6$. ③

③×2得 $6\leqslant 4a\leqslant 12$. ④

②×(－1)得 $-2\leqslant b-a\leqslant -1$. ⑤

①＋⑤得 $0\leqslant 2b\leqslant 3$. ⑥

⑥×(－1)得 $-3\leqslant -2b\leqslant 0$. ⑦

④＋⑦得 $3\leqslant 4a-2b\leqslant 12$.

而同学乙的解法是：

①＋②得③.

②×2得 $2\leqslant 2a-2b\leqslant 4$. ⑧

③+⑧得　　　$5\leqslant 4a-2b\leqslant 10$。

教师判别不了孰对孰错，怎能指导学生。

(3) 已知　$f(\cos 2x)=\sin x-2$，求$f(\sin 2x)$。

这是一本高中数学复习资料的例题，其解法为：

$$\begin{aligned} f(\sin 2x) &= f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\right) \\ &= f\left(\cos 2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-2. \end{aligned}$$

这就把教师与学生引入歧途，因为他们相继得出很多不等价的解答而又辨别不了对与错。

这些问题不能不引起我的深思。

接受这门课程的授课与教材编写任务之后，与系里和部分分院以及部分区县教研室的老师们商讨了重点课题，并专门邀请了有丰富的中学数学教学经验并有较高的理论修养的10位老师，他们是副教授蒋文尉、罗小伟；特级教师孙维刚、孔令颐、陈剑刚；高级教师明知白、陈娴、储瑞年、王人伟、胡大同，共同确定了10个重点课题（即本书的10章）。并由他们分别担任第一章、第十章、第四章、第六章、第八章、第二章、第三章、第五章、第九章、第七章的试讲与撰写任务。我们共同研究了章节细目，确定了一些原则，先出讲授提纲并进行试讲，结果深受广大教师的赞赏，一致认为可以作为继续教育的教材内容。于是我们又相互交换了意见，他们又吸收了听课教师的一些意见，进行了补充与修改，最后形成了教材的初稿。

鉴于这10个问题在中学教材中所处的地位不同，教师对它们的需要也不相同，因此，在这十章里，有的侧重于概念

的理解，从理论上加深认识；有的侧重于灵活运用，从方法上予以拓宽；有的侧重于思维训练，以加强逻辑推理的严密性，提高分析问题和解决问题的能力；有的侧重于用较高的观点来统帅知识的纵横联系，以使教师更准确地掌握知识，从而能深入浅出地传授知识。

又由于本书是《中学数学重点课题研究》教材，既然是“研究”，就应准许百花齐放、百家争鸣，允许每个作者有各自的发挥，最后由实践来检验。在试讲的过程中，广大听课教师还反映他们在短短的时间里听到了北京中学数学各家各派的讲学，确实受益不浅。这也说明了保留各自特点是很必要的。

为此，我对本书的各章节，在基本上保持原作者意见的基础上，只做了少许的修改或删减。如有不妥之处，欢迎广大读者批评指正。

张鸿顺

1991年6月30日

□目　录

□第一章

自然数理论和数学归纳法

我们现在熟知的自然数

$$1, 2, 3, 4, 5, \cdots$$

是人类最早认识的一种数。人类对自然数的认识经历了漫长的过程。起初，人们还没有数的概念。即使他们能够用自己的方式判断出在实践中遇到的这一物体的集合或那一物体的集合的大小，数也只是被理解为物体集合的不可缺的一种性质。随着人类实践活动的不断进行，对数的感性认识的逐渐积累，自然数的概念也渐渐形成了。这一过程大致可分为三个阶段。第一阶段，数量由物体的直接比较确定。例如，“就是像这只手上的指头那样多”，意思是表示5件物体；第二阶段，出现了数词，例如2只鹿，5只羊等；在第三阶段，数从具体事物中分离出来，形成抽象的数，如“2”、“5”等。

在当代世界，数学已形成了内容丰富、理论严谨、应用广泛的科学体系。关于这种最原始的自然数也有其严谨的理论体系，主要有自然数的基数理论和序数理论两个理论体系。

第一节　自然数的基数理论

一、集合的基数

定义1　如果两个集合A和B之间存在一个一一对

应 f：$A \to B$，则称集合 A 与集合 B 对等，记作 $A \sim B$。

例如，如果 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{\alpha, \beta, \gamma\}$，那么可以建立如下一一对应：

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \alpha & \beta & \gamma \end{array}$$

从而，$A \sim B$。

注意，这里建立一一对应的方法不是唯一的。

不难明白，两个有限集只有当它们的元素个数相同时才可能是对等。可见"两个集合对等"一语乃是有限集的元素"个数相同"的直接扩充。

又如，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$。如果 $M=\{AB$ 上的点$\}$，$N=\{AC$ 上的点$\}$，那么由图 1-1 可以看到 $M \sim N$。

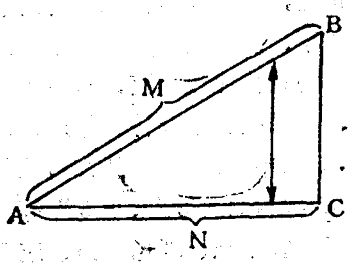

图 1-1

例中说明一条较长的线段并不比较短的线段含有"更多的"点。如果我们将直角边 AC 绕 A 点转到斜边 AB 上，那么 N 就成了 M 的真子集，这就是说，有的集可与其真子集对等。但是任何有限集都不能与其真子集对等。由此可见，只有无限集才有这种奇妙的性质。

关于对等集有下面的性质，读者可以自己证明。

定理 设 A，B，C 为任意三个集合，则

(1) $A \sim A$；（自反性）

(2) 如果 $A \sim B$，那么 $B \sim A$；（对称性）

(3) 如果 $A \sim B$，并且 $B \sim C$，那么 $A \sim C$。（传递性）

如果一种关系具有自反性、对称性和传递性，那么称这种关系为等价关系。可见集合的对等是一种等价关系。于是我们可把一切集合按对等关系进行分类。这样，在同一类的集合里，有一种共同的特征。例如：

(1) {1只羊}，{1棵树}，{1个手指}，$\{a\}$，等等，它们都是对等的集合，应归入一类，显然，羊、树、手指、字母不是它们的共同特征，而只有"1"才是它们的共同特征；

(2) {5只羊}，{5棵树}，{5个手指}，$\{a, b, c, d, e\}$，等等，它们也都是对等的集合，应归入一类，同样只有"5"才是它们共同的特征。

我们给同一类集合的共同特征的标志起一个名字：

定义 2 集合 A 所属的类(由一切与 A 对等的集合组成)中集合的共同特征的标志叫做集合 A 的基数，记作 $\overline{\overline{A}}$。

这样，在以对等关系分类时，如果两个集合 A 和 B 属于同一个类，则它们的基数相等，$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$。所以 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$ 的充要条件是 $A \sim B$。这时，A 和 B 也叫等基数集。

于是，(1)中的四个集合为等基数集，其基数是"1"。(2)中的四个集合也是等基数集，其基数是"5"。

二、自然数的概念

定义 非空有限集的基数叫做自然数。

单元素集 $\{a\}$ 是非空有限集，它的基数记作1；

在 $\{a\}$ 中添加一个元素 b，得 $\{a, b\}$，也是非空有限集，它的基数记作2；

在 $\{a, b\}$ 中添加一个元素 c，得 $\{a, b, c\}$，也是非空有限集，它的基数记作3；

从而得到自然数

$$1, \ 2, \ 3, \ \cdots$$

三、自然数大小的比较

定义 如果 A、B 为两个非空有限集，$\overline{\overline{A}}=a$，$\overline{\overline{B}}=b$。

(1) 当 $A\sim B$ 时，就说 a 等于 b，记作 $a=b$；

(2) 当 $A'\subset A$，$A'\sim B$ 时，就说 a 大于 b，记作 $a>b$；

(3) 当 $B'\subset B$，$A\sim B'$ 时，就说 a 小于 b，记作 $a<b$。

由集合论可知，对于任意两个非空有限集合 A 和 B，在下列三种情形中，必定有一种而且只有一种成立：

(1) $A\sim B$；

(2) $A'\subset A$，$A'\sim B$；

(3) $B'\subset B$，$A\sim B'$。

因此，对于任意两个自然数有以下性质。

定理 对于任意两个自然数 a 和 b，在下列三种情形中，必定有一种而且只有一种成立：

(1) $a=b$；　(2) $a>b$；　(3) $a<b$。

我们把这一性质称为三歧性。

显然，自然数的"等于"关系是等价关系，也具有：自反性，即 $a=a$；对称性，即如果 $a=b$，那么 $b=a$；传递性，即如果 $a=b$，$b=c$，那么 $a=c$。

关于自然数的不等有以下重要结论：

(1) 对逆性　如果 $a>b$，那么 $b<a$；

　　　　　　如果 $a<b$，那么 $b>a$。

(2) 传递性　如果 $a>b$，$b>c$，那么 $a>c$；

　　　　　　如果 $a<b$，$b<c$，那么 $a<c$。

(3) 如果 $a>b$，$b=c$，那么 $a>c$；

(4) 如果 $a<b$，$b=c$，那么 $a<c$。