高考E+E系列

理科数学

LI KE SHU XUE

2004年-2005年

高考新动向E+E

GAO KAO XIN DONG XIANG E+E

新考纲解读

新考纲

新题型

新样卷

中世 组编

主编：陈忠怀

民族出版社

高考E+E系列

理科数学

LI KE SHU XUE

2004—2005年

2004—2005年

高考新动向E+E

GAO KAO XIN DONG XIANG E+E

丛书编写学科带头人名单

语文：章雪莱　　理科数学：陈忠怀　　文科综合：熊大翔
英语：李玉新　　文科数学：屠新民　　理科综合：杨汉楚

中世　组编

本书主编：陈忠怀

编写人员：陈忠怀　赵　红　熊　莎　陈智宏　刘春秀

民族出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考新动向 E + E. 理科数学/民族出版社中世编辑室组编. -北京:民族出版社,2004.4

ISBN 7-105-06187-1

Ⅰ.高... Ⅱ.民... Ⅲ.数学课-高中-升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 031663 号

民族出版社出版发行

(北京市和平里北街 14 号 邮编 100013)

民族出版社微机照排 北京市美通印刷厂印刷

各地新华书店经销

2004 年 4 月第 1 版 2004 年 4 月北京第 1 次印刷

开本:787×960 毫米 1/16 印张:15.125

字数:300 千字 定价:24.00 元

该书如有印装质量问题,请与本社发行部联系退换

(总编室电话:64212794;发行部电话:64211734)

出版说明

民族出版社中世编辑室应广大考生要求，隆重推出《高考新动向 E + E》系列丛书，该丛书包括语文、英语、文科数学、理科数学、文科综合、理科综合。其最大特点是用例题解读新考试大纲，透视重点考点内容，旨在帮助广大师生在最短时间内领悟教育部考试中心《普通高等学校招生全国统一考试大纲》所涵盖的全部内容和信息，并有重点地理解《考试大纲》的精神和宗旨。

该套丛书编写阵容庞大，名师云集。执笔者均为全国著名特、高级教师，中国考试命题专家，国家级学科骨干教师。他们除了长期从事高考第一线的教学研究工作之外，还同时被聘为教育部考试中心会议中心的特聘教师，对高考改革方向、高考的重点和热点明察秋毫，对例题的选取、安排、分析、更解具有绝对权威性。

丛书体例新颖、别致，顺应高考形式，结合大量例题给考生讲解《考试大纲》的内容和要求，并以例题带分析的方式，通过"重点考点剖析"、"主要考查内容"、"解题思路"、"知识扩展"等栏目对《考试大纲》中的重点、热点、难点进行逐层深入剖析。所选例题多为根据高考各科试卷的形式与结构设置的原创性仿真题，凝结着专家学者们多年备考、应考经验，准确地体现了《考试大纲》中有关考点和分值的变化与调整要求。其答案之详尽、点拨之精到、拓展之到位、角度之新颖、预测之准确更是不言而喻。

丛书附有全真模拟试卷若干套，其各项指标的设置包括知识点考查、分值分布以及长度、难度、信度、效度等，均与高考原题水平完全一致，能够让考生做到从形式到内容迅速熟悉高考，从容应试，超常发挥。

编　者

祝你好运！

目录 contents

第一部分　考试内容与考试要求

1　平面向量/1
2　集合、简易逻辑/14
3　函数/23
4　不等式/34
5　三角函数/46
6　数列/65
7　直线和圆的方程/75
8　圆锥曲线方程/88
9　直线、平面、简单多面体/99
10　排列、组合、二项式定理/111
11　概率/119
12　概率与统计/128
13　极限/137
14　导数/147
15　数系的扩充/160

第二部分　高考题型解读

1　怎样解高考选择题/168
2　怎样解高考填空题/178
3　高考经典题解题方略/184
(1)函数与不等式/184
(2)空间角与空间距离/186
(3)三角式恒等变换/186
(4)数列与极限/190
(5)曲线与方程/193
(6)“存在性”问题/197
4　新型能力题应考对策/201
(1)新定义型/201
(2)图形变换型/202
(3)开放题/204
(4)应用题/206
(5)迁移题/209

第三部分　高考样卷模拟

第一套/211
第二套/214
第一套参考答案/218
第二套参考答案/225

第一部分　考试内容与考试要求

1　平面向量

2004年考点

(1)理解向量的概念,掌握向量的几何表示,了解共线向量的概念.

(2)掌握向量的加法和减法.

(3)掌握实数与向量的积,理解两个向量共线的充要条件.

(4)了解平面向量的基本定理,理解平面向量的坐标的概念,掌握平面向量的坐标运算.

(5)掌握平面向量的数量积及其几何意义,了解用平面向量的数量积可以处理有关长度、角度和垂直的问题,掌握向量垂直的条件.

(6)掌握平面两点间的距离公式,以及线段的定比分点和中点坐标公式,并且能熟练运用,掌握平移公式.

例题1　以下各量中,可以称为向量的是

A. 我国国土面积约为960万平方公里

B. 三峡大坝蓄水后,某闸门受到两万吨的旁压力

C. 连续阴雨天气使空气的湿度达到90%

D. 某种酒精的浓度达到85%

【答案】　B

【解析】　面积、浓度和湿度都只有大小而无方向,都不能称为向量. 而旁压力则既有大小又有方向,故可称为向量.

【考点透视】　本题考查内容:向量的概念.

例题2　如图所示,D、E、F分别是$\triangle ABC$中AB、BC、CA边的中点,则哪些向量与$\overrightarrow{AD}$相等? 哪些向量与$\overrightarrow{DF}$共线?

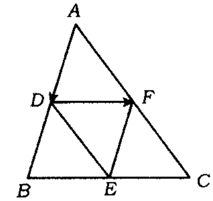

图1-1

【解析】　长度相等且方向相同的向量都相等,故与$\overrightarrow{AD}$相等的向量有$\overrightarrow{DB}$,$\overrightarrow{FE}$;

方向相同或相反的所有非零向量都共线,所以与$\overrightarrow{DF}$共线①的向量有$\overrightarrow{FD}$、$\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{EB}$、$\overrightarrow{EC}$、$\overrightarrow{CE}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CB}$共七条.

【注解】　①向量中共线的概念与平面几何中共线的概

念不同.因为平行向量都是共线向量,所以这里的共线并不意味着它们都在同一直线上.

【考点透视】 本题考查内容:向量的几何表示及共线向量的概念.

例题 3 若 $ABCD$ 为正方形,E 是 CD 的中点,且$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{BE}=$

A.$\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$　　B.$\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$　　C.$\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　D.$\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$

【答案】 B

【解析】 如图所示,$\overrightarrow{CE}=-\frac{\boldsymbol{a}}{2}$,

$\therefore \overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$①

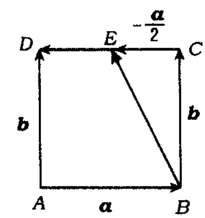

图 1－2

【注解】 ①$\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{BC}$方向相同且长度相等,是相等的向量,但$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$仅长度相同,而方向相反,它们是相反向量,故$\overrightarrow{CD}=-\boldsymbol{a}$.

【考点透视】 本题要求考生掌握向量的加、减法.

例题 4 已知$\triangle ABC$ 的三个顶点 A、B、C 及平面内一点 P 满足$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$,则点 P 与$\triangle ABC$ 的关系为

A.P 在$\triangle ABC$ 内部　　B.P 在$\triangle ABC$ 外部

C.P 在 AB 边所在直线上　　D.P 是 AC 边的一个三等分点

【答案】 D①

【解析】 可以证明:平面内一点 P 满足$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$的充分必要条件是 P 为$\triangle ABC$ 中 AC 边的一个三等分点:$\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{PA}$.

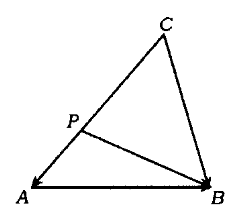

图 1－3

如图 1－3 所示,$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}$.由条件得:$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}$,$\therefore \overrightarrow{PC}=-2\overrightarrow{PA}$,即$\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{PA}$.

$\overrightarrow{CP}$与$\overrightarrow{PA}$共线且$|\overrightarrow{CP}|=2|\overrightarrow{PA}|$②,故 P 是 AC 边的一个三等分点,条件必要.

反之,若$\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{PA}$,如图 1－4 所示,作▱$PBDC$,则$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PD}$.取 BD 中点 E,连 AE、PE.

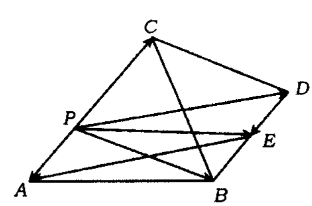

图 1－4

$\because \overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{PA}$,$\therefore \overrightarrow{DE}=\overrightarrow{EB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PA}$,四边形 $PAED$ 为平行四边形,$\therefore \overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PE}$,但四边形 $PABE$ 也是平行四边形,$\therefore \overrightarrow{PE}=\overrightarrow{AB}$,于是证明了$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$,条件充分.

【注解】 ①作为选择题，选项 A、B、C 中点 P 的位置不定，按常规三向量之和不可能等于定向量$\overrightarrow{AB}$，据此可直接排除 A、B、C 而选 D.

②若 P 是 AC 的另一个三等分点，即$\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PA}$，

则$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$与$\overrightarrow{AB}$不等，只能证它们共线. 请读者试证之.

【考点透视】 本题考查考生运用向量加、减法解题的能力，理解向量共线的条件.

例题 5 以下四个命题(其中 $m,n\in\mathbf{R},\boldsymbol{a}\neq 0$)：

(1)$m(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}-m\boldsymbol{b}$；(2)$(m-n)\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{a}-n\boldsymbol{a}$；

(3)若 $m\boldsymbol{a}=n\boldsymbol{a}$，则 $m=n$；(4)若 $m\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

其中正确命题的个数是

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

【答案】 C

【解析】 选 C.

实数与向量的积满足乘法对加、减法的分配律. ∴(1)、(2)正确；由 $m\boldsymbol{a}=n\boldsymbol{a}$，得$(m-n)\boldsymbol{a}=0$. ∵$\boldsymbol{a}\neq 0$，∴$m-n=0$，即 $m=n$，(3)正确；若 $m\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}$①可能 $m=0$，不一定 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，(4)不正确.

【注解】 ①实数与向量的积还是向量，若 $\boldsymbol{a}\neq 0$，则 $m\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，即使 $m=\mathbf{0}$，则 $m\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ 是零向量而不是 $\mathbf{0}$，在运算中这一点要特别注意.

【考点透视】 本题考查内容：实数与向量的积.

例题 6 求证：向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充分必要条件是$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/\!/(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

【解析】 若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$. 故$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/\!/(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$成立，命题已获证明，今设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$. 不妨设 $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$.

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，则存在惟一实数 λ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 成立.

于是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1+\lambda)\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(\lambda-1)\boldsymbol{b}$. ∵$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$，∴$1-\lambda\neq 0$，$\boldsymbol{b}=\frac{1}{\lambda-1}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

从而 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\frac{1+\lambda}{\lambda-1}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，这里$\frac{1+\lambda}{\lambda-1}\in\mathbf{R}$，故$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/\!/(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，条件必要.

反之，若$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/\!/(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，必存在惟一实数 λ'，使$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda'(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$成立(这里 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$，故 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 为非零向量).

即有 $\boldsymbol{a}(1-\lambda')=-\boldsymbol{b}(1+\lambda')$，若 $\lambda'=0$，则 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$，已有 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线；

若 $\lambda'\neq 0$，又由 $\boldsymbol{b}\neq 0$，知 $\lambda'\neq 1$，∴$\boldsymbol{a}=-\frac{1+\lambda'}{1-\lambda'}\boldsymbol{b}$，∵$-\frac{1+\lambda'}{1-\lambda'}\in\mathbf{R}$，故 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线，条件充分，∴原命题成立.

【考点透视】 本题要求:理解两向量共线的充要条件.零向量 $\mathbf{0}$ 因为具有任意方向,所以它与任一向量共线;如向量 $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$,则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充分必要条件是存在惟一实数 λ,使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 成立.

例题 7 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是两个不共线的向量,已知 $\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$, $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$, $\overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$,且 A、B、D 共线,求 k 的值.

【解析】 $\because A$、B、D 共线,$\therefore$ 必存在惟一实数 λ,使 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BD}$ 成立(这里 $\overrightarrow{BD}\neq 0$).

已知 $\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$.

又 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=(2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)-(\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2$, $\therefore 2\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2)$,即 $(2-\lambda)\boldsymbol{e}_1+(k+4\lambda)\boldsymbol{e}_2=0$.

根据平面向量基本定理①,应有

$\begin{cases}2-\lambda=0,\\ k+4\lambda=0,\end{cases}$ $\therefore \lambda=2$,从而 $k=-8$.

【注解】 ①平面向量基本定理的含义是:如果 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内两个不共线的向量,那么对于这一平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$,有且只有一对实数 λ_1,λ_2,使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 成立.其中 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 叫做表示这一平面内所有向量的基底.

这个定理的实质是说:集合 $\{\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2|\lambda_1, \lambda_2\in\mathbf{R}\}$ 就是平面内的一切向量.或者说:平面内任一向量 $\boldsymbol{a}$,都可以用这个平面内的两个基底惟一地线性表示.

【考点透视】 本题考查考生是否掌握了平面向量基本定理.

例题 8 已知 $\boldsymbol{a}=(1,2)$, $\boldsymbol{b}=(x,1)$,且 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 平行,则 x 等于

A. 1　　B. 2　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

【答案】 D

【解析】 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(1,2)+2(x,1)=(1+2x,4)$

$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=2(1,2)-(x,1)=(2-x,3)$, $\because(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})/\!/(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

$\therefore$ 存在惟一实数 λ,使 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=\lambda(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ 成立.

即 $(1+2x,4)=\lambda(2-x,3)$, $\therefore\begin{cases}1+2x=\lambda(2-x),\\ 4=3\lambda,\end{cases}$ 得 $\lambda=\frac{4}{3}$.

得:$1+2x=\frac{4}{3}(2-x)$,解得 $x=\frac{1}{2}$.

【考点透视】 本题考查考生掌握平面向量的坐标运算的情况.

例题 9 下列五个命题:

①$|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}^2$;②$\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^2}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$;

③$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2$;④$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$;

⑤若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

其中正确命题的序号是

A.①②③　　B.①④　　C.①③④　　D.②⑤

【答案】 B

【解析】 $\because \boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线,其夹角为 0.

$\therefore \boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cos\theta=|\boldsymbol{a}|^2$.①正确.

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角为 θ,则

$$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^2}=\frac{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta}{|\boldsymbol{a}|^2}=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\cos\theta.$$

而向量运算中不含除法运算,$\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$没有意义.②不能成立.

若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$,

则$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=0$ 而 $\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2\neq0$. $\therefore$③不能成立.

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,则

$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=(x_1-x_2,y_1-y_2)\cdot(x_1-x_2,y_1-y_2)=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$.

而 $\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$

$=(x_1^2+y_1^2)-2(x_1x_2+y_1y_2)+(x_2^2+y_2^2)=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$.

$\therefore$④成立.

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角为 90°,不能认为 $\boldsymbol{a}=0$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.⑤不成立.

故正确的只有①④.

【考点透视】 本题考查考生对平面向量数量积及其几何意义的理解与掌握程度.若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,称 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为平面向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积,注意两向量的数量积是数量,不再是向量,因此,由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$,并不能推出 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$(例如若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$,那么 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$,但 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不一定相等).也因此,平面向量的数量积不满足结合律,即$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$不一定相等.如设 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=m,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=n$,因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不一定同向或反向,故 $m\boldsymbol{c}$ 与 $n\boldsymbol{a}$ 不一定相等.

例题 10　已知$|\boldsymbol{p}|=2\sqrt{2},|\boldsymbol{q}|=3,\boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{q}$ 夹角为$\dfrac{\pi}{4}$,求以 $\boldsymbol{a}=5\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}-3\boldsymbol{q}$ 为邻边的平行四边形两对角线之长.

【解析】 以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的两对角线之长可分别记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

$\because \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(5\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q})+(\boldsymbol{p}-3\boldsymbol{q})=6\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$.

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(5\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q})-(\boldsymbol{p}-3\boldsymbol{q})=4\boldsymbol{p}+5\boldsymbol{q}$.

$\therefore |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|6\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|=\sqrt{|6\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^2}$

$=\sqrt{(6\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})^2}=\sqrt{36\boldsymbol{p}^2-12\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}^2}$

$=\sqrt{36\cdot(2\sqrt{2})^2-12\cdot2\sqrt{2}\cdot3\cos\frac{\pi}{4}+3^2}$

$=\sqrt{288-72+9}=\sqrt{225}=15.$

同理：$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|4\boldsymbol{p}+5\boldsymbol{q}|$

$=\sqrt{16\boldsymbol{p}^2+40\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+25\boldsymbol{q}^2}$

$=\sqrt{16\times8+40\cdot2\sqrt{2}\cdot3\cos\frac{\pi}{4}+25\times9}$

$=\sqrt{128+240+225}=\sqrt{593}.$

【考点透视】 本题要求考生会用向量积处理有关长度的问题.

例题 11 已知向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，其中 $\boldsymbol{e}_1=(1,0),\boldsymbol{e}_2=(0,1)$.

(Ⅰ)试计算 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 的值；

(Ⅱ)求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的大小.

【解析】 (Ⅰ)$\boldsymbol{a}=(1,0)-(0,1)=(1,-1),\boldsymbol{b}=4(1,0)+3(0,1)=(4,3)$.

$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(1,-1)\cdot(4,3)=4-3=1,\because \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,-1)+(4,3)=(5,2)$.

$\therefore |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2},|\boldsymbol{b}|=5$.

设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot5}=\frac{\sqrt{2}}{10},\therefore\theta=\arccos\frac{\sqrt{2}}{10}$.

【考点透视】 本题要求考生掌握平面向量的坐标运算，了解用平面向量的数量积可以处理有关角度的问题.

例题 12 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{2}),\boldsymbol{b}=(-\sqrt{2},1)$，若正数 k 和 t，使得 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+(t^2+1)\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{y}=-k\boldsymbol{a}+\frac{1}{t}\boldsymbol{b}$ 垂直，则 k 的最小值是__________.

【答案】 2

【解析】 $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$ 时，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0$. 即 $[\boldsymbol{a}+(t^2+1)\boldsymbol{b}]\cdot\left[-k\boldsymbol{a}+\frac{1}{t}\boldsymbol{b}\right]=0$.

$\because \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(1,\sqrt{2})(-\sqrt{2},1)=-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0$①，$\therefore$ 有：$-k\boldsymbol{a}^2+(t+\frac{1}{t})\boldsymbol{b}^2=0$，

$\because \boldsymbol{a}^2=1+2=3,\boldsymbol{b}^2=2+1=3$，且 $k,t>0,\therefore k=t+\frac{1}{t}\geqslant2$，即 $k_{\min}=2$.

【注解】①由此又可知 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$.

$\therefore \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\theta=90°\Leftrightarrow\cos\theta=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

故两向量 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是其数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,这个条件用坐标表示是:$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$,(这里 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$).

【考点透视】 本题要求考生掌握向量垂直的条件.

例题 13 求以 $A(3,-2)$,$B(5,2)$,$C(-1,4)$ 为顶点的 $\square ABCD$ 的面积.

【解析】 $\overrightarrow{BA}=(3,-2)-(5,2)=(-2,-4)$,$\overrightarrow{BC}=(-1,4)-(5,2)=(-6,2)$.

$\therefore |\overrightarrow{BA}|=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{20}$,

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(-6)^2+2^2}=\sqrt{40}$. 又 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(-2,-4)(-6,2)=12-8=4$.

$\therefore \cos\angle ABC=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{4}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{40}}=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$,$\sin\angle ABC=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{10}\right)^2}=\dfrac{7}{10}\sqrt{2}$.

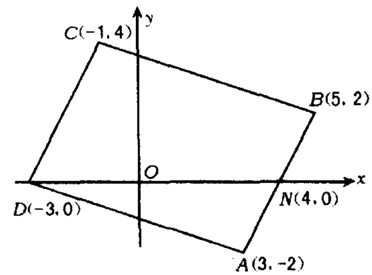

图 1-5

$\therefore S_{\square ABCD}=|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\sin\angle ABC=\sqrt{20}\cdot\sqrt{40}\cdot\dfrac{7}{10}\sqrt{2}=28$.

【考点透视】 本题要求考生掌握平面两点距离公式,并利用数量积处理面积问题.

【评注】 本题还有多种解法.

一种简单易行的方法是:注意到 AB 中点为 $N(4,0)$,则 $S_{\triangle ADN}=\dfrac{1}{4}S_{\square ABCD}$,设 $D(x,y)$,$\because \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$. $\therefore (5,2)-(-1,4)=(3,-2)-(x,y)$.

得 $(x,y)=(-3,0)$. 于是 $|\overrightarrow{DN}|=7$,$\therefore S_{\triangle ADN}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{DN}|\cdot|y_A|=\dfrac{1}{2}\times7\times2=7$.

$S_{\square ABCD}=4\times7=28$.

显然,这种解法比正解简单,它是借助了图形的特殊性(AB 的中点,AD 的端点恰在 x 轴上),几乎所有题都有各自的特殊和巧合之处,一旦发现,就能创造出各自的精解与妙解.但是这种智慧与能力,来自于平时的积累和细致的观察分析.

例题 14 已知 $M(2,3)$,$N(8,4)$,点 P 在线段 MN 内且 $\overrightarrow{MP}=\lambda\overrightarrow{PN}=\lambda^2\overrightarrow{MN}$,求 λ 的值及 P 点坐标.

【解析】 $\overrightarrow{MP}=\lambda\overrightarrow{PN}\Rightarrow\overrightarrow{PN}=\dfrac{1}{\lambda}\overrightarrow{MP}\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\dfrac{1+\lambda}{\lambda}\overrightarrow{MP}$,

又 $\overrightarrow{MP}=\lambda^2\overrightarrow{MN}$. $\therefore \overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{\lambda^2}\overrightarrow{MP}$,

得$\frac{1+\lambda}{\lambda}=\frac{1}{\lambda^2}$, $\lambda\neq 0$, 有: $\lambda^2+\lambda-1=0$. $\lambda=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. P 为内分点, ∴取 $\lambda=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

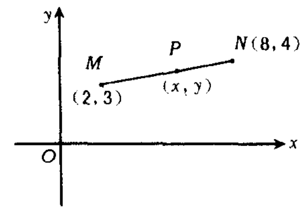

图 1-6

设 $P(x,y)$, 则 $x=\dfrac{2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\times 8}{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}}=11-3\sqrt{5}$,

$y=\dfrac{3+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\times 4}{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}}=\dfrac{9-\sqrt{5}}{2}$.

故所求定比 $\lambda=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 点 P 的坐标为$\left(11-3\sqrt{5},\frac{9-\sqrt{5}}{2}\right)$.

【考点透视】 本题要求熟练地掌握定比分点公式. 若点 P 在直线 MN 上, 则向量$\overrightarrow{MP}$、$\overrightarrow{PN}$同向或反向, 故两向量之比可求. 规定 P 为内分点时$\lambda>0$, P 为外分点时$\lambda<0$, 而 λ 的绝对值则等于两向量的长度之比.

例题 15 (用平面几何证题) $\triangle ABC$ 中, 若 $AC^2+BC^2=AB^2$, 求证: $\angle ACB=90°$.

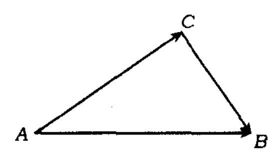

图 1-7

【解析】 $\because \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$,

$\therefore \overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{CB}^2+2\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$.

即有$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{CB}|^2+2\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$, 已知 $|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{CB}|^2$.

$\therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=0$. 故$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{CB}$, 即$\angle ACB=90°$.

例题 16 (用立几证题与解题) 在棱长为 a 的正方体 $ABCD—A'B'C'D'$ 中, E, F 分别是棱 AB、BC 上的动点, 且 $AE=BF$.

(Ⅰ) 求证: $\overrightarrow{A'F}\perp\overrightarrow{C'E}$;

(Ⅱ) 当三棱锥 $B'—BEF$ 的体积取得最大值时, 求二面角 $B'-EF-B$ 的大小 (结果用反三角函数表示).

【解析】 (Ⅰ) 设$|\overrightarrow{AE}|=|\overrightarrow{BF}|=x$, 则$|\overrightarrow{EB}|=|\overrightarrow{FC}|=a-x$, 连 $A'B$、BC', 显然: $|\overrightarrow{A'B}|=|\overrightarrow{BC'}|=\sqrt{2}a$, $\angle A'BA=\angle C'BC=45°$, $\angle A'BC'=60°$.

$\therefore \overrightarrow{A'F}\cdot\overrightarrow{C'E}=(\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{BF})(\overrightarrow{C'B}+\overrightarrow{BE})=\overrightarrow{A'B}\cdot\overrightarrow{C'B}+\overrightarrow{A'B}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{C'B}+\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BE}$.

$\because \overrightarrow{A'B}\cdot\overrightarrow{C'B}=\sqrt{2}a\cdot\sqrt{2}a\cdot\cos 60°=a^2$.

$\overrightarrow{A'B}\cdot\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{BA'}\cdot\overrightarrow{BE}=-\sqrt{2}a(a-x)\cos 45°$

$= -a^2+ax.$

$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{C'B} = -\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BC'} = -x\cdot\sqrt{2}a\cos45^\circ = -ax.$

$\because \overrightarrow{BE}\perp\overrightarrow{BF}, \therefore \overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}=0.$

故$\overrightarrow{A'F}\cdot\overrightarrow{C'E} = a^2-a^2+ax-ax+0=0.$

$\therefore \overrightarrow{A'F}\perp\overrightarrow{C'E}.$

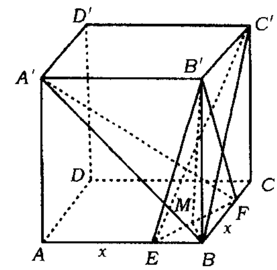

图 1－8

(Ⅱ) $V_{B'-BEF}=\frac{1}{3}S_{\triangle BEF}\cdot|\overrightarrow{BB'}|=\frac{1}{6}|\overrightarrow{BE}|\cdot|\overrightarrow{BF}|\cdot|\overrightarrow{BB'}|=\frac{a}{6}\cdot x(a-x)\leqslant\frac{a}{6}\cdot\left[\frac{x+(a-x)}{2}\right]^2=\frac{1}{24}a^3.$

当且仅当 $x=a-x$，即 $x=\frac{a}{2}$时，$(V_{B'-BEF})_{\max}=\frac{1}{24}a^3$. 此时 E、F 分别为AB、BC 的中点. 设 EF 中点为M，则 $B'M\perp EF$、$BM\perp EF$，$\angle B'MB$ 为二面角$B'-EF-B$ 的平面角.

设为 θ，$\because$ 此时$|\overrightarrow{BM}|=\frac{1}{4}|\overrightarrow{BD}|=\frac{\sqrt{2}}{4}a.$

$\therefore \tan\theta=\frac{|\overrightarrow{BB'}|}{|\overrightarrow{BM}|}=2\sqrt{2}$. 则 $\theta=\arctan2\sqrt{2}.$

【评注】 本题第一问，若借助空间直角坐标系则更为简单.

例题 17 （与解析几何结合）已知向量$\overrightarrow{OB}=(2,0)$，向量$\overrightarrow{OC}=(2,2)$，向量$\overrightarrow{CA}=(\sqrt{2}\cos\alpha,\sqrt{2}\sin\alpha)$，则向量$\overrightarrow{OA}$与向量$\overrightarrow{OB}$的夹角的范围为

A. $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$　　B. $\left[\frac{\pi}{4},\frac{5}{12}\pi\right]$　　C. $\left[\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$　　D. $\left[\frac{\pi}{12},\frac{5}{12}\pi\right]$

【答案】 D

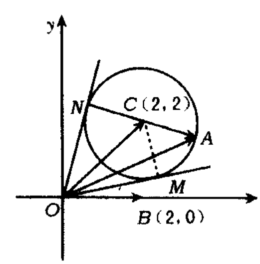

图 1－9

【解析】 如图所示，点 A 的轨迹是以 $C(2,2)$为圆心，$\sqrt{2}$为半径的圆，作 OM 切⊙C 于M，ON 切⊙C 于N.

$\because |\overrightarrow{OC}|=2\sqrt{2}$，且$|\overrightarrow{CM}|=|\overrightarrow{CN}|=\sqrt{2}.$

$\therefore \angle COM=\angle CON=\frac{\pi}{6}$，而$\angle COB=\frac{\pi}{4}.$

设$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$成θ 角，则 $\theta_{\min}=\angle MOB=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$，$\theta_{\max}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{12}$. 即 $\theta\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$.

例题 18 （向量与三角）已知 $f(A,B)=\sin^2 2A+\cos^2 2B-\sqrt{3}\sin 2A-\cos 2B+2$，

(Ⅰ)设 A、B、C 为$\triangle ABC$ 内角，当 $f(A,B)$取得最小值时，求$\angle C$；

（Ⅱ）当 $A+B=\frac{\pi}{2}$ 且 $A,B\in\mathbf{R}$ 时，$y=f(A,B)$ 的图像通过向量 $\boldsymbol{p}$ 平移得到函数 $y=2\cos2A$ 的图像，求向量 $\boldsymbol{p}$.

【解析】 （Ⅰ）$f(A,B)=\left(\sin2A-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\cos2B-\frac{1}{2}\right)^2+1$.

当且仅当 $\begin{cases}\sin2A=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos2B=\frac{1}{2}\end{cases}$ 时 $f(A,B)_{\min}=1$.

此时 $\begin{cases}2B=\frac{\pi}{3}\\ 2A=\frac{\pi}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=\frac{\pi}{6}\\ A=\frac{\pi}{6}\end{cases}\Rightarrow C=\frac{2\pi}{3}$ 或 $\begin{cases}2B=\frac{\pi}{3}\\ 2A=\frac{2\pi}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=\frac{\pi}{6}\\ A=\frac{\pi}{3}\end{cases}\Rightarrow C=\frac{\pi}{2}$，故 $\angle C=\frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi}{2}$.

（Ⅱ）当 $A+B=\frac{\pi}{2}$ 时，$2A+2B=\pi$，$f(A,B)=\sin^2 2A+\cos^2(\pi-2A)-\sqrt{3}\sin2A-\cos(\pi-2A)+2=\cos2A-\sqrt{3}\sin2A+3=2\cos\left(2A+\frac{\pi}{3}\right)+3$.

即是 $f(A,B)-3=2\cos2\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$ （1）

此函数图像平移 $\boldsymbol{p}=(h,k)$，则 $(A,f(A,B))+(h,k)=(A',y')$，∴ $\begin{cases}A=A'-h\\ f(A,B)=y'-k\end{cases}$. 代入(1)：$y'-k-3=2\cos2\left[(A'-h)+\frac{\pi}{6}\right]$.

此函数应与 $y=2\cos2A$ 相同.

$\therefore\begin{cases}-k-3=0\\ -h+\frac{\pi}{6}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=-3\\ h=\frac{\pi}{6}\end{cases}$，所求 $\boldsymbol{p}=\left(\frac{\pi}{6},-3\right)$.

例题 19 （向量与数列，轨迹）已知两点 $M(-1,0)$，$N(1,0)$，且点 P 使 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$，$\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NP}$ 成公差小于零的等差数列，

（Ⅰ）点 P 的轨迹是什么曲线？

（Ⅱ）若 P 点的坐标为 (x_0,y_0)，记 θ 为 $\overrightarrow{PM}$ 与 $\overrightarrow{PN}$ 的夹角，求 $\tan\theta$.

【解析】 （Ⅰ）由条件可知：$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NP}=2\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$.

$\because\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{MN}(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN})=\overrightarrow{MN}^2=4$.

故有 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=2$. 设 $P(x,y)$，则 $(-1-x,-y)(1-x,-y)=2$，得 $x^2+y^2=3$. 已知该数列公差小于零.

$\therefore\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}>\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NP}$，即 $(x+1,y)\cdot(2,0)>(-2,0)(x-1,y)$，

$2(x+1)>-2(x-1)$，知 $x>0$.

$\therefore$ 点 P 的轨迹是以原点为圆心，$\sqrt{3}$ 为半径的右半圆（不含端点）.

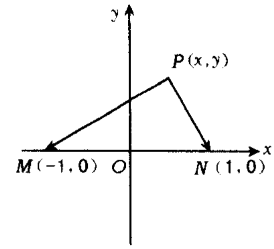

图 1－10

（Ⅱ）$\because P(x_0,y_0)$ 在圆上，$\therefore x_0^2+y_0^2=3$，已证 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=2$，且

$|\overrightarrow{PM}|=\sqrt{(x_0+1)^2+y_0^2}=\sqrt{x_0^2+2x_0+1+y_0^2}=\sqrt{4+2x_0}$.

$|\overrightarrow{PN}|=\sqrt{(x_0-1)^2+y_0^2}=\sqrt{4-2x_0}$

$$\therefore \cos\theta=\frac{\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}}{|\overrightarrow{PM}|\cdot|\overrightarrow{PN}|}=\frac{2}{\sqrt{16-4x_0^2}}=\frac{1}{\sqrt{4-x_0^2}}$$

$\because 0<x_0\leqslant\sqrt{3}$，$\therefore \frac{1}{2}<\cos\theta\leqslant 1, 0\leqslant\theta<\frac{\pi}{3}$.

$$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{4-x_0^2}}=\sqrt{\frac{3-x_0^2}{4-x_0^2}}=\frac{|y_0|}{\sqrt{4-x_0^2}},$$

于是 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=|y_0|$.

例题 20　（向量与函数）平面直角坐标系有点 $P(1,\cos x)$，$Q(\cos x,1)$，$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，

（Ⅰ）求向量 $\overrightarrow{OP}$ 和 $\overrightarrow{OQ}$ 的夹角 θ 的余弦用 x 表示的函数 $f(x)$；

（Ⅱ）求 θ 的最值.

【解析】　（Ⅰ）$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=(1,\cos x)(\cos x,1)=2\cos x$，$|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{1+\cos^2x}$，$\therefore f(x)=\cos\theta=\frac{2\cos x}{1+\cos^2x}$.

（Ⅱ）当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 时，$\cos x\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，$u=\cos x+\frac{1}{\cos x}$ 是 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$ 上的减函数，即 $2\leqslant u\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{2}$，由于 $f(x)=\frac{2}{\cos x+\frac{1}{\cos x}}=\frac{2}{u}$，$\therefore \frac{2\sqrt{2}}{3}\leqslant f(x)\leqslant 1$，即 $\frac{2\sqrt{2}}{3}\leqslant\cos\theta\leqslant 1$，$\theta_{\max}=\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\theta_{\min}=0$.

例题 21　（向量与不等式）设 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$，证明：

$ac+bd\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$.

【解析】　设 $\boldsymbol{m}=(a,b)$，$\boldsymbol{n}=(c,d)$，则 $\boldsymbol{mn}=ac+bd$，$|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$. $\because \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|\cos\theta\leqslant|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|$，$\therefore ac+bd\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$.

例题22 （向量与数列极限）若 $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n+4b_n)=8$，$\lim\limits_{n\to\infty}(6a_n-b_n)=1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n+b_n)$ 之值.

【解析】 设 $\boldsymbol{a}=(3,4)$，$\boldsymbol{b}=(6,-1)$，$\boldsymbol{c}=(3,1)$，$\boldsymbol{x}=(a_n,b_n)$.

根据平面向量基本定理，存在惟一实数 k_1,k_2，使得 $(3,1)=k_1(3,4)+k_2(6,-1)$ 成立.

于是 $\begin{cases}3k_1+6k_2=3\\4k_1-k_2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=\dfrac{1}{3}\\k_2=\dfrac{1}{3}\end{cases}$，$\because$ $\boldsymbol{ax}=3a_n+4b_n$，$\boldsymbol{bx}=6a_n-b_n$，$\therefore$ $\boldsymbol{cx}=\left(\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}\right)\boldsymbol{x}$.

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{3}(3a_n+4b_n)+\dfrac{1}{3}(6a_n-b_n)\right]=\dfrac{1}{3}\times8+\dfrac{1}{3}\times1=3$.

例题23 （推广到空间向量）如图所示，四棱锥 P—$ABCD$ 中，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，PA 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $60°$，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle D=\angle DAB=90°$，$AB=4$，$CD=1$，$AD=2$.

（Ⅰ）建立适当的坐标系，并写出点 B，P 的坐标；

（Ⅱ）求异面直线 PA 与 BC 所成的角；

（Ⅲ）若 PB 的中点为 M，求证：平面 $AMC\perp$ 平面 PBC.

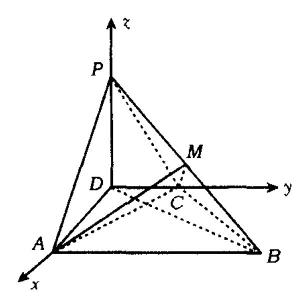

图 1－11

【解析】 （Ⅰ）分别以 DA、DC、DP 所在直线为横、纵、竖轴建立空间直角坐标系 O—xyz，则有：$B(2,4,0)$.

$\because\angle PAD$ 是 PA 与平面 $ABCD$ 所成角，$\therefore\angle PAD=60°$，有 $|\overrightarrow{DP}|=|\overrightarrow{DA}|\tan60°=2\sqrt{3}$，得 $P(0,0,2\sqrt{3})$.

（Ⅱ）$\because\overrightarrow{PA}=(2,0,0)-(0,0,2\sqrt{3})=(2,0,-2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=(0,1,0)-(2,4,0)=(-2,-3,0)$.

$\therefore\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}=(2,0,-2\sqrt{3})(-2,-3,0)=2(-2)+0\times(-3)-2\sqrt{3}\times0=-4$.

又 $|\overrightarrow{PA}|=\sqrt{2^2+0^2+(-2\sqrt{3})^2}=4$，$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+0^2}=\sqrt{13}$，

$\therefore\cos\angle(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{BC})=\dfrac{-4}{4\sqrt{13}}=-\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.