CENTURY 21

高等学校教材

工程结构的有限元方法

屈钧利 韩江水 主编

Mechanical Science

北工業大學出版社

工程结构的有限元方法

屈钧利　韩江水　主编

西北工业大学出版社

【内容提要】 本书介绍了工程结构的有限元方法，主要内容有平面杆系结构的有限元方法、弹性力学平面问题的有限元方法及其程序设计、等参数单元、轴对称问题、薄板弯曲问题的有限元方法和热粘弹性理论及其有限元方法等。其中，热粘弹性理论及其有限元方法这一章中详述了作者近年来的研究成果——变温粘弹性有限元方法及程序设计。

本书内容精炼，重点突出，实用性强；内容阐述循序渐进，由浅入深，通俗易懂，便于自学。

本书可作为高等工科院校工程力学、土木工程、机械设计制造及其自动化、地质工程、采矿工程等相关工程专业的 50～70 学时本科生、研究生的教材，也可供相关工程领域的科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程结构的有限元方法/屈钧利，韩江水主编．—西安：西北工业大学出版社，2004.9
ISBN 7-5612-1800-1

Ⅰ．工…　Ⅱ．①屈…②韩…　Ⅲ．工程结构—有限元方法　Ⅳ．TU311.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 059937 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号　**邮编**：710072
电　　话：029-88493844　　88491757
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：西安东江印务有限公司
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：13.875
字　　数：335 千字
版　　次：2004 年 9 月第 1 版　　2004 年 9 月第 1 次印刷
定　　价：20.00 元

前 言

有限元方法是建立在待定场函数离散化基础上的一种数值方法，可用于求解边值或初值问题。自从 1960 年 R. W. Clough 正式提出“有限元方法”以来，随着计算机科学技术的不断发展，作为连续体离散化的一种标准研究方法的有限元方法已成为工程结构分析中不可或缺的工具，被广泛地用于解决工程领域中的各类问题。

本书参照原国家教委审定的高等工科院校有限元方法课程教学的基本要求，结合作者几年来为工程力学、土木工程、采矿工程、地质工程等工科专业的硕士生和高年级本科生讲授有限元方法课程的讲义修改编写而成。

考虑到当前有限元方法教学改革及今后发展的需要，我们将多年来各兄弟院校教学改革的共识编入此书，使该书具有以下几个特点：

(1) 由于应用数学、弹性力学、结构力学、计算机语言等前期课程内容的加强，本书适当提高了工程结构的有限元方法教学的起点，合并和缩减了部分章节中的一些不必要的重复内容，同时也考虑到本课程的系统性和便于学生自学或查阅，将部分内容精简后以附录方式编入书后。例如对平面杆系有限元方法、薄板弯曲问题的有限元方法等部分内容做了精简和改动；将整体刚度矩阵的修正、整体刚度矩阵元素的存储方法等重复的内容合并在一章内讲授；在附录 A，B，C 中分别编入了 FORTRAN 语言梗概、弹性力学的基本方程、矩阵运算的基本法则。在讲述上采用了由浅入深、循序渐进、重点突出的方法，便于学生理解和掌握。

(2) 由于有限元方法理论性强，内容丰富且又是一门实践性很强的学科，同时也考虑到学生在后续课程及工程实践中对本门课程的需求，本书在注重阐明基本概念、基本理论、基本方法的基础上，着重介绍了有限元程序设计方法、技巧；详述了弹性力学平面问题有限元程序设计和实施方法；介绍了变温粘弹性有限元程序设计方法及确定非定常温度场的程序方法，等等。

(3) 本书内容共 8 章：绪论、平面杆系结构的有限元方法、弹性力学平面问题的有限元方法、弹性力学平面问题的有限元程序设计、等参数单元、轴对称问题、薄板弯曲问题的有限元方法和热粘弹性理论及其有限元方法，其中热粘弹性理论及其有限元方法这一章中详述了作者近年来的研究成果——变温粘弹性有限元方法及程序设计。第 1 章至第 7 章为教学的基本内

容，第 8 章可作为专题选讲。

(4) 本书有与之相配套的计算机辅助教学(CAI)课件，该课件覆盖了全书的主要内容，文图并茂，生动，形象，使用方便。通过 CAI 多媒体教学，大大地增加了课堂教学的信息量，改变了传统的授课方式，精简了学时，提高了教学质量，实现了教学手段的现代化。

本书主编为屈钧利和韩江水。参加编写的有屈钧利(第 3,5,6,8 章，附录 A,B,C)，韩江水(第 1,4 章)，张天军(第 2,7 章)。韩江水教授审阅了书稿并提出了建设性的修改意见，最后由屈钧利统稿。

西安科技大学董立红老师、西北工业大学出版社王夏林、李杰同志对本书的出版都给予了支持和帮助，作者对此及对本书所引用文献的国内、外作者表示深深的谢意。

由于作者水平有限，加之时间仓促，书中难免有错误和不妥之处，恳请读者予以指正。

作　者

2004 年 5 月于西安

目 录

第1章 绪 论

1-1 有限元方法的基本概念

有限元方法又称有限元素法(The Finite Element Method,简写为 FEM),是求解边值或初值问题,建立在待定场函数离散化基础上的一种数值方法,是 20 世纪中期兴起的应用数学、力学及计算机科学相互渗透、综合利用的交叉学科。

有限元方法的实质是用有限个单元体的组合代替连续体,化无限自由度问题为有限自由度问题;是用有限子域的组合代替一个连续域,化连续场函数的微分方程求解问题为有限个参数的代数方程组求解问题。对于大多数形状和边界条件复杂的工程问题,要想获得问题的解析解答是不可能的,只能寻求各种近似的数值方法,而有限元方法是一种行之有效的数值分析方法。

在使用有限元方法对所要研究的连续体进行计算分析时,要将研究的连续体划分为若干个有限大小的子区域,即有限元(单元)。在对单元进行分析时,首先假定单元内部位移为结点位移的简单函数,建立单元的结点位移和结点力之间的关系,其次将这些单元组合成为整体,引入边界条件,通过求解整体结点力和结点位移关系的代数方程组,最终得到连续体在离散点处未知量(位移和应力)的解答。

用有限元方法求解工程问题时,有限元方法常采用以位移为基本变量,并使用虚位移原理或最小势能原理求解的协调模型。有限元的早期工作主要集中于此类模型,目前,这种模型仍是最成功和应用最广泛的一类模型。

1964 年,乌贝克(B Fraeijs de Venbeko)倡导并采用以应力为基本变量,使用虚应力原理或最小余能原理求解的平衡模型。

混合模型是取部分位移和部分应力为变量,以广义变分原理为基础,可收到兼顾位移和应力的效果。1967 年,赫尔曼(L. R. Herrman)提出的薄板三角形单元即属此类。

1964 年,卞学璜(T. H. Pian)建立了有限元的杂交模型,其中应力杂交模型是以修正的余能原理为基础,在单元内假设应力,在单元边界上假设位移,可兼顾位移和应力且有较好的收敛性。此后,又有与之对偶的位移杂交模型以及以广义变分原理为基础的杂交-混合模型。

用有限元方法分析工程结构问题时,将一个连续体离散化后,如何保证其数值解的收敛性是有限元理论讨论的主要内容之一。而数值解的收敛性与单元的划分及单元的形状有关,不同的有限元研究模型其独立函数的正确选取亦是保证收敛性的重要条件之一。例如,以位移为独立函数的协调模型,其位移函数的选取必须符合收敛准则,才能保证其数值解的正确性。

同样一个问题，由于单元划分的不同、单元形状选取的差异以及位移函数选取的不规则性，得到的解答可能是完全相反的。经过广大理论工作者几十年来的深入研究及大量的工程实践，关于单元划分、单元形状的选取和对不同研究模型独立函数的确定，都已有一套成熟的理论、方法和准则。

对于工程结构的数值分析方法有两种，即有限差分法和有限元方法。前者是通过在连续体上将某一连续函数展开为泰勒级数的方法建立基本微分方程，然后对微分方程采用近似的数值方法，这是一种数学近似计算方法；有限差分法可以用来求解许多连续介质力学问题，但当问题的边界条件比较复杂时要想获得满意的解答仍是很困难的。后者是建立在力学模型上进行近似数值计算的一种物理近似计算方法。与有限差分法相比，有限元方法更具有物理概念清晰、处理问题灵活、适用各种复杂边界条件的优点。

以经典结构力学刚架位移法为基础，伴随计算机科学的发展而发展起来的有限元方法，比刚架位移法有着更深刻的数学和物理基础。用位移法求解杆系结构时，一个杆件就是一个单元，单元的结点就是杆件的两个端点，它是将一个有限的自由度问题化成另一个简单的自由度问题来处理。而对于连续介质，不存在这样的自然单元。有限元方法是将连续介质人为地划分为有限个单元的集合体，这些单元仅仅在有限个公共点、交线上连接。有限元方法是将一个无限自由度问题转换为一个有限自由问题来处理。

用刚架位移法求解刚架时，每个杆件的内力和变形关系都是明确的，都可从杆端力和杆端位移由材料力学公式推得杆的内力和位移。而有限元方法需要在一个单元的局部范围内，用结点位移的插值函数来描述单元上各点的位移，进而推得单元上各点的应力，这是有限元方法与刚架位移法另一个重要的区别。但刚架位移法分析方法的基本概念和连续介质有限元方法是相同的，所以刚架位移分析方法又叫杆系结构分析的有限元方法。

有限元方法内容十分丰富，是工程结构数值分析中不可或缺的有力工具。

1－2　有限元方法的发展概况

从 20 世纪 40 年代有限元的基本思想出现以来，有限元方法经历了产生、发展和不断完善的阶段，有限元理论与计算机科学的完美结合成为现代力学的重要标志。

现代有限元方法的发展依赖于计算机科学的发展，自从第一台计算机投入运行后，人们惊喜地发现结构力学的矩阵表达方法特别适用于编写计算机程序。为适用于计算机求解问题特点的需要，在有限元方法中广泛地采用了矩阵方法，矩阵运算和有限元法产生的大量代数方程的求解有赖于电子计算机。如果没有计算机，要做高阶的矩阵运算和求解大量的线性方程组是十分困难的，甚至是不可能的。如果说有限元理论的推导是以矩阵方法为基础的，那么计算机的出现为有限元方法的发展提供了强有力的保证。

回顾历史，早在公元 3 世纪，我国古代数学家刘徽提出用割元术求圆周长的方法即是有限元基本思想的体现。经典结构力学求解刚架内力的位移法是有限元方法的雏形。用该方法求解刚架内力时，人们将刚架看成是由有限个在结点处连接的杆件单元组成，研究每一个杆件单元，最后将其重新组合成一个整体进行综合分析，进而求得刚架的内力。这种先离散，后整合的方法便是有限元方法的基本思路。1943 年，可朗特（R. Courant）提出的圣维南扭转问题的近似解法是第一次用有限元方法处理连续体问题。他将所研究的柱体截面划分成若干个三角

形单元，在每个单元内设呈线性分布的翘曲函数，用最小势能原理求解。1947 年普拉格（W. Prager）和 1957 年辛格（J. L. Synge）分别提出的超圆法，促进了这种离散化方法的发展。

1956 年，特纳（M. J. Turner）、克劳夫（R. W. Clough）、马丁（R. J. Martin）和托普（L. J. Top）等人在美国宇航局的年会上宣布，他们将求解杆系结构的位移法应用于飞机结构的平面应力计算。1960 年，克劳夫正式引用了“有限元方法”这一名称，以区别于有限差分法。从此，有限元方法开始成为连续体离散化的一种标准研究方法，有愈来愈多的研究和应用成果在科学和技术刊物上发表，把有限元理论的研究和应用水平推向了新的高度。我国数学及力学工作者也为有限元方法的初期发展做出过首创性的贡献，并得到国际学术界的公认。他们中的杰出代表是陈伯屏（结构矩阵方法）、钱令希（余能原理）、钱伟长（广义变分原理）、胡海昌（广义变分原理）、冯康（有限元法理论）等。1963 年以后，人们对有限元法实质的认识有了一个很大的进步。卞学璜（T. H. Pian）、贝塞林（J. F. Besseling）等人在内的一批科学家开始认识到，有限元方法实际上是弹性力学变分原理中瑞莱-里兹法的一种形式，从而在理论上为有限元方法奠定了数学基础。20 世纪 70 年代以后，随着计算机和软件技术的发展，进入了有限元方法的鼎盛时期。期间对有限元方法进行了全面而深入的研究，涉及内容有在数学和力学领域所依据的理论，单元的划分原则，形状函数的选取，各种数值计算方法及其误差、收敛性和稳定性，计算机程序设计技术，向其他领域的推广等。

由于理论的不断完善和方法的不断改进，作为离散化数值解的有限元法已成为一门成熟的学科，且已扩展到其他研究领域并在实际工程中得到广泛的应用。

有限元方法的应用已从结构静力分析发展到动力问题、稳定性问题，从平面问题发展到空间问题、板壳问题。研究的对象从线弹性材料扩展到塑性、粘弹性、粘*塑性、热粘弹性、热粘弹塑性和复合材料；从小变形的弹性问题发展到大变形的非线性问题；由结构计算分析、校核问题扩展到结构优化设计问题；由固体力学扩展到流体力学，继而又渗透到热传导、电磁场等非力学领域。生物力学领域的许多研究，如脊柱、颅骨、牙齿等方面的强度分析愈来愈多地成为当前有限元方法的新课题……可以预计，随着计算机技术的发展，有限元方法作为一个具有坚实理论基础、广泛应用效力的数值分析工具，必将在科学技术发展和经济建设中发挥更大作用。有限元方法应用举例如图 1－1～图 1－4 所示。

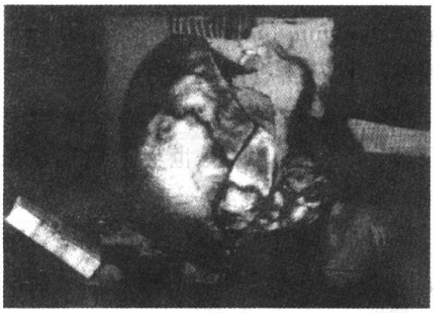

图 1－1　用有限元法研究颅骨创伤应力

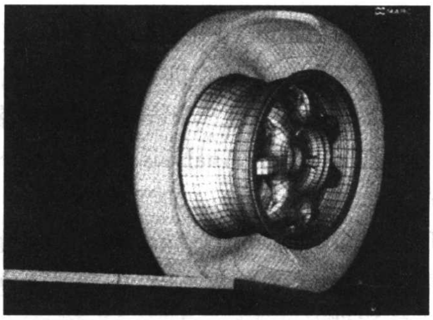

图 1－2　轮胎与轮毂的有限元分析

* 依据《现代汉语词典》，“粘”应改为“黏”。考虑到专业方面的习惯，本书仍使用“粘”。

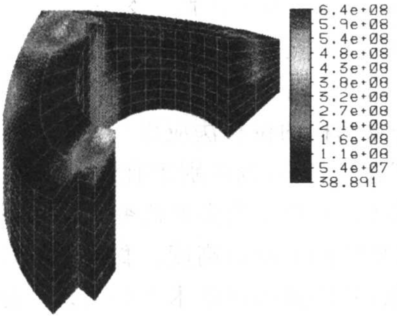

图 1-3　工程构件的有限元分析(1)

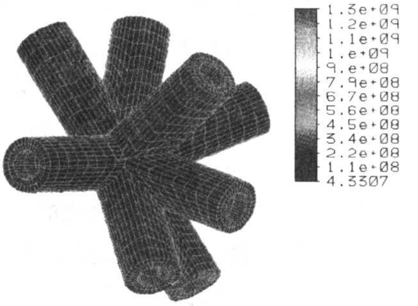

图 1-4　工程构件的有限元分析(2)

1-3　大型工程应用软件简介

与有限元方法几乎同时诞生的有限元软件，随着有限元方法与计算技术的发展而迅速发展。以有限元软件为依托的力学学科——计算力学，将力学理论应用于工程实践，使古老的力学学科至今仍然闪耀着强大的生命之光。有限元软件的应用极大地提高了力学学科解决自然科学和工程实际问题的能力，解决了许多用传统理论和方法无法解决的工程问题，促进了力学学科的发展。

有限元软件是指有限元方法的计算机程序或程序系统，分为通用和专用两种。通用程序是商业软件，其优点是通用性强，规格规范，输入方法简单，解决问题的领域广泛；缺点是程序比较大，开发成本高。专用软件相对较短，开发成本低，版本升级相对容易，解决专门问题更有效力。常用的大中型著名有限元软件有：

SAP(Stuctural Analysis Program)：美国加州大学伯克利分校 M. J. Wilson 教授的线性静、动力结构分析程序。

NASTRAN(NASA Stuctural Analysis)：美国国家航空和宇航局(NASA)的结构分析程序。

ADINA(A Finite Element Program for Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis)：美国麻省理工学院机械工程系的自动动力增量非线性分析有限元程序。

ANSYS(Analysis System)：世界著名力学分析专家、匹兹堡大学教授 J. Swanson 创建的 SASI 公司(Swanson Analysis System Inc)大型通用有限元分析软件，是世界上最据权威的有限元产品。

IDEAS(Integrate Design Engineering Analysis System)：美国 SDRC 公司的机械通用软件，集成化设计工程分析系统，是集设计分析、数控加工、塑料模具设计和测试数据分析为一体的工作站软件。

ALGOR：美国 ALGOR 公司在 SAP5 和 ADINA 有限元分析程序基础上针对微机平台开发的通用有限元分析系统。

……

这些程序的共同特点：

（1）所有程序都包括杆、梁、平面、板和三维实体单元，以及具有对其相应结构在多种荷载（集中力、分布力、力偶、温度和支座沉陷等）作用下的静力和动力问题的计算分析能力。

（2）适用于线弹性问题和非线性问题。

（3）具有自动划分网格功能的前处理程序及用图形解释计算结果的后处理方法，如变形前后的模型、指定位置的位移和应力、应力和温度分布的云图等。

有限元软件应用举例如图 1－5 和图 1－6 所示。

本章仅概括性地介绍了有限元方法的基本概念、发展概况、方法和分类，在以后各章中将详述工程结构中的有限元方法。

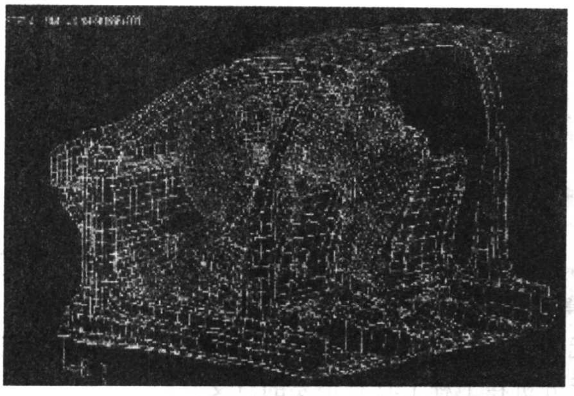

图 1－5　车体的有限元分析

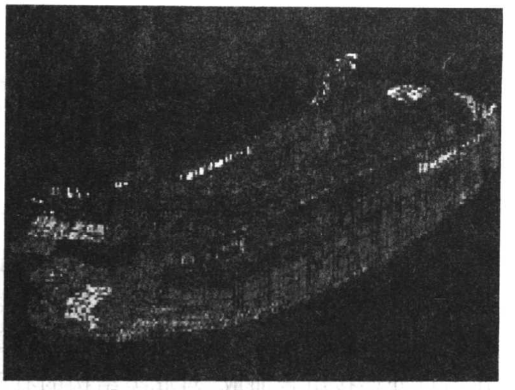

图 1－6　船体的有限元分析

习　题

1－1　有限元方法的基本思想是什么？

1－2　有限元方法研究问题的模型有哪几种？其中哪一种应用最广泛？

第 2 章　平面杆系结构的有限元方法

2-1　杆单元的刚度矩阵

一、概述

平面杆系结构是工程上常见的一类结构，此类结构所有的杆件轴线与荷载作用线均在同一平面上。例如，平面桁架、平面刚架、连续梁等属此类结构。对此类结构进行分析时，可将每一杆件作为结构的单元(简称为杆单元)，杆单元的端点称为结点 结构可看成是由有限个杆单元在结点处连接组合而成。对此类结构的有限元分析在工程上具有重要的意义。

下面，通过一个例题来说明用有限元方法分析平面杆系结构的一般步骤。

【例 2-1】 图 2-1 所示为一平面超静定桁架结构，在载荷 P 作用下，求各杆件的轴力。此结构可看成由 14,24,34 三个杆单元组成，如图 2-1(b) 所示。每个杆单元的两端为杆单元的结点。各结点的水平、铅直位移分别用 u,v 表示。

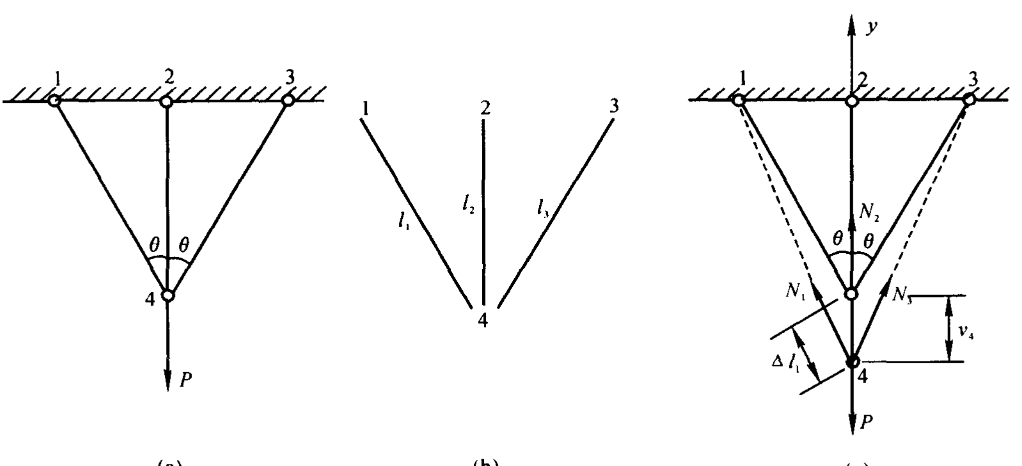

图　2-1

各杆单元的轴力 N 是待求的未知数。其几何、物理性质如下：

长度：　$l_1 = l_3$

横截面面积：

$$A_1 = A_3$$

弹性模量：

$$E_1 = E_3$$

由题设条件可知

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0, \quad v_1 = v_2 = v_3 = 0, \quad v_4 \neq 0$$

在载荷 P 作用下，各杆单元变形为

$$\Delta l_1 = v_4 \cos\theta = \Delta l_3, \quad \Delta l_2 = v_4$$

各杆单元的伸长量为 $\Delta l_i = \dfrac{Nl_i}{EA}(i = 1 \sim 3)$，各杆单元的轴力分别为

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \frac{E_1 A_1}{l_1} v_4 \cos\theta \\ N_2 &= \frac{E_2 A_2}{l_2} v_4 \\ N_3 &= \frac{E_3 A_3}{l_3} v_4 \cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

上式建立了结点位移 v 和轴力 N 的关系。

我们把单元结点上所受的力称为结点力，结点力一般用坐标分量表示。本例中各杆单元在结点 4 处、y 方向的结点力大小为

$$\left.\begin{aligned} N_{1y} &= N_1 \cos\theta = \frac{E_1 A_1}{l_1} v_4 \cos^2\theta = k_1 v_4 \\ N_{2y} &= N_2 = \frac{E_2 A_2}{l_2} v_4 = k_2 v_4 \\ N_{3y} &= N_3 \cos\theta = \frac{E_3 A_3}{l_3} v_4 \cos^2\theta = k_3 v_4 \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

式中，$k_1 = \dfrac{E_1 A_1}{l_1}\cos^2\theta$，$k_2 = \dfrac{E_2 A_2}{l_2}$，$k_3 = \dfrac{E_3 A_3}{l_3}\cos^2\theta$ 分别称为杆单元 14，24，34 的单元刚度系数。它的物理意义是当结点 4 产生单位铅直位移时的铅直结点力，或称为结点 4 的铅直位移对各单元结点 4 的铅直刚度贡献。

现在考虑结点 4 的平衡条件，各杆件对结点 4 的结点力和上述杆单元所受的结点力大小相等，方向相反。对结点 4 来说，由平衡方程有

$$N_{1y} + N_{2y} + N_{3y} - P = 0$$

由式(b)得

$$(k_1 + k_2 + k_3) v_4 = P$$

令

$$k_1 + k_2 + k_3 = k$$

则

$$k v_4 = P$$

这就是结构平衡方程，也是位移法计算桁架的基本方程的形式，对于复杂结构来说，式中的三个量都是矩阵。由此式可得，结点 4 的位移为

$$v_4 = \frac{P}{k} = \frac{P}{k_1 + k_2 + k_3} = \frac{P}{2k_1 + k_2} \tag{c}$$

式中，P 是外载荷；k 是结构的整体刚度系数，它是由单元刚度系数 $k_i(i = 1 \sim 3)$ 按照某种规则叠加起来的。

将式(c)代入式(a)，得各杆单元的轴力如下：

$$\begin{cases} N_1 = N_3 = \dfrac{N_{1y}}{\cos\theta} = \dfrac{k_1 v_4}{\cos\theta} = \dfrac{k_1 P}{(2k_1 + k_2)\cos\theta} \\ N_2 = \dfrac{k_2 P}{2k_1 + k_2} \end{cases}$$

这种以位移作为基本未知量，通过结点平衡方程求出结点位移，再由位移反推出各杆单元内力的方法，称为位移法。

由此例可将求解结构内力的步骤归纳如下：

(1) 划分单元：把一个结构划分成有限个单元，各单元通过结点拼合成整体(桁架问题：一般把每个杆件作为一个单元)。

(2) 形成单元刚度系数：进行单元分析，求出各单元的刚度系数(或矩阵)。

(3) 形成整体刚度系数：由单元刚度系数组成整体刚度系数(或矩阵)。

(4) 求解方程：除去边界上被固定的结点外，对可以产生位移的各结点，利用平衡条件求出它们的位移，然后由结点位移求出各单元的内力，把这种方法称为平面杆系结构的有限元方法。

二、杆单元的刚度矩阵

由上面简单例题的分析我们知道，只有得到了单元的刚度系数，才能组集结构整体刚度系数，从而建立整体平衡方程并求解，所以杆单元刚度(矩阵)的形成在用有限元方法对结构分析中占有十分重要的位置，下面介绍杆单元的刚度矩阵。

图 2-2 所示为桁架中某一等截面直杆。桁架中的杆件只受轴力作用，故此杆为一杆单元，用 i、j 分别表示它的两个端结点，坐标轴 x 由 i 指向 j，y 轴按右手系统确定。xOy 坐标称为单元的局部坐标。

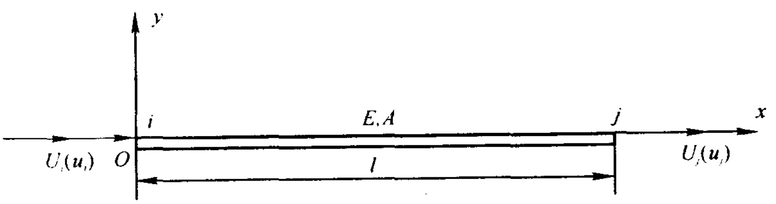

图 2-2

因为单元只受轴力，所以只有伸长或缩短变形，杆单元两端各有一个水平结点位移 u_i 和 u_j，两结点的位移有以下三种情况：

(1) 结点 i 固定，仅结点 j 有位移，即 $u_i = 0$，$u_j \neq 0$，则有

单元应变为 $$\varepsilon = \frac{u_j}{l}$$

单元应力为 $$\sigma = \frac{E}{l}u_j$$

单元左端结点力为 $$U_i = -A\sigma = -\frac{EA}{l}u_j$$

单元右端结点力为 $$U_j = A\sigma = \frac{EA}{l}u_j$$

(2) 结点 j 固定，仅结点 i 有位移，即 $u_j = 0, u_i \neq 0$，则有

单元应变为 $$\varepsilon = -\frac{u_i}{l}$$

单元应力为 $$\sigma = -\frac{E}{l}u_i$$

单元左端结点力为 $$U_i = -A\sigma = \frac{EA}{l}u_i$$

单元右端结点力为 $$U_j = -A\sigma = -\frac{EA}{l}u_i$$

(3) 两个结点都有位移，这时的结点力为以上两种情况的叠加，左右两端的结点力为

$$U_i = \frac{EA}{l}u_i - \frac{EA}{l}u_j$$

$$U_j = -\frac{EA}{l}u_i + \frac{EA}{l}u_j$$

写成矩阵形式，可得

$$\begin{bmatrix} U_i \\ U_j \end{bmatrix} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$$

简写成

$$\boldsymbol{F}^e = \boldsymbol{k}^e \boldsymbol{\delta}^e \tag{2-1}$$

式中，$\boldsymbol{F}^e = \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \end{bmatrix}$称为杆单元结点力向量(列阵)；$\boldsymbol{\delta}^e = \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$称为单元结点位移向量(列阵)，而

$$\boldsymbol{k}^e = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-2}$$

称为单元刚度矩阵，简称单刚。它的每一个元素 k_{ij} 的意义是：当结点 j 产生单位位移时在结点 i 上所引起的结点力，即结点 j 对结点 i 的刚度贡献。

以上只是考虑了结点 i,j 沿杆轴方向的位移，实际上还可能产生垂直于杆轴线方向的位移 v_i,v_j(但是，在小变形条件下，这种微小的垂直位移对桁架杆件的内力并无影响)，若考虑这种位移时，可把单元刚度矩阵扩展为四阶，单元结点力为

$$\boldsymbol{F}^e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_i \\ \boldsymbol{F}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{bmatrix} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} \tag{2-3}$$

式中，$\boldsymbol{F}^e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_i \\ \boldsymbol{F}_j \end{bmatrix}$为单元结点力向量；$\boldsymbol{\delta}^e = [u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j]^T$ 为单元结点位移向量，而单元刚度矩阵为

$$\boldsymbol{k}^e = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由以上讨论可以得出等直杆单元具有以下性质。

(1) 单元刚度矩阵只与杆单元的刚度(截面积、长度、弹性模量)有关,与载荷及支撑情况无关。

(2) 单元刚度矩阵的每一列元素之和为零,这是静力学平衡条件的反映。

(3) 单元刚度矩阵的行列式为零,也就是说,单元刚度矩阵为奇异矩阵。

(4) 单元刚度矩阵是对称矩阵,这是结构力学中互等定理的反映,单元刚度矩阵对角线上的元素恒为正,说明结点的自我贡献为正。

三、整体坐标中斜杆的单元刚度矩阵

在铰接桁架中,经常遇到斜杆单元,在对其进行有限元方法分析的时候,用 xOy 表示整体坐标系,用 $\bar{x}O\bar{y}$ 表示局部坐标系,如图 2-3 所示。

结点位移和结点力的符号规定如下:与坐标轴 x,y 取相同方向者为正,反之为负。单元结点力向量和单元结点位移向量分别为

$$\boldsymbol{F}^e = \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\delta}^e = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}$$

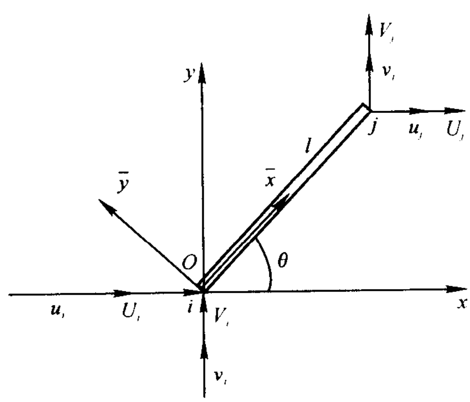

图 2-3

设杆单元长度为 l,由图 2-3 几何关系可得

$$l^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2$$

两边微分,可得

$$l\mathrm{d}l = (x_j - x_i)(\mathrm{d}x_j - \mathrm{d}x_i) + (y_j - y_i)(\mathrm{d}y_j - \mathrm{d}y_i)$$

上式两端各除以 l,并令

$$\alpha = \cos\theta = \frac{(x_j - x_i)}{l}, \quad \beta = \sin\theta = \frac{(y_j - y_i)}{l}$$

则

$$\mathrm{d}l = \alpha(\mathrm{d}x_j - \mathrm{d}x_i) + \beta(\mathrm{d}y_j - \mathrm{d}y_i)$$

杆件受力变形后,结点 i 的坐标将从 (x_i, y_i) 改变为 $(x_i + u_i, y_i + v_i)$,即有

$$\mathrm{d}x_i = u_i, \quad \mathrm{d}y_i = v_i, \quad \mathrm{d}x_j = u_j, \quad \mathrm{d}y_j = v_j$$

因此,杆的应变为

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}l}{l} = \frac{\alpha}{l}(u_j - u_i) + \frac{\beta}{l}(v_j - v_i)$$

则斜杆单元轴力为

$$N = AE\varepsilon = \frac{AE}{l}[\alpha(u_j - u_i) + \beta(v_j - v_i)] \tag{2-4}$$

规定轴力以拉力为正。单元的结点力分量为

$$U_i = -N\cos\theta = -\frac{AE}{l}(-\alpha^2 u_i + \alpha^2 u_j - \alpha\beta v_i + \alpha\beta v_j)$$

$$V_i = -N\sin\theta = -\frac{AE}{l}(-\alpha\beta u_i + \alpha\beta u_j - \beta^2 v_i + \beta^2 v_j)$$