高等学校教学用书

概率论与数理统计
学习引导

喻德生　易青　郑华盛　主编

化学工业出版社
教材出版中心

（京）新登字 039 号

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计学习引导/喻德生，易青，郑华盛主编．—北京：化学工业出版社，2003．12
高等学校教学用书
ISBN 7-5025-4573-5

Ⅰ．概…　Ⅱ．①喻…②易…③郑…　Ⅲ．①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 108629 号

高等学校教学用书
概率论与数理统计学习引导
喻德生　易青　郑华盛　主编
责任编辑：唐旭华
文字编辑：云　雷
责任校对：凌亚男
封面设计：蒋艳君
*
化学工业出版社
教材出版中心 出版发行
（北京市朝阳区惠新里 3 号　邮政编码 100029）
发行电话：（010）64982530
http://www.cip.com.cn
*
新华书店北京发行所经销
北京市昌平振南印刷厂印刷
三河市宇新装订厂装订
开本 787 毫米×1092 毫米 1/16　印张 11¼　字数 275 千字
2003 年 12 月第 1 版　2003 年 12 月北京第 1 次印刷
ISBN 7-5025-4573-5/G・1242
定　价：17.00 元

前 言

本书是根据工科概率论与数理统计课程教学的基本要求，结合当前教学改革的实际需要，组织教学经验比较丰富的教师编写的. 可作为概率论与数理统计课程的学习指导书和报考硕士研究生的复习资料供学生使用，也可以作为教学参考书供教师使用.

本书参照浙江大学《概率论与数理统计》（第三版）的基本内容，分章编写. 每章均包括教学目标、内容提要、学习引导和能力测试四部分的内容. 各部分编写说明如下.

一、教学目标　按照美国著名教育学家、心理学家布鲁姆博士的教学目标分类学，把线性代数和概率论与数理统计教学大纲的基本要求分解成具体的教学目标，分知识、领会、运用、分析综合四个能力层次，逐点编写. 目的是把教学目标交给学生，使学生领会教学大纲的精神和教师的要求，从而增强学习的主动性和目的性.

布鲁姆的教学目标分类学是一个教育的-逻辑的-心理的分类体系. 它把学校教育所要达到的全部目标分为认知、情感、动作技能三大领域，其中认知领域包括知识、领会、运用、分析、综合和评价六个能力层次，每个能力层次都有明确的界定.

知识是指那些注重记忆的行为和测验情境，这种记忆是通过对观念、材料或现象的再认识或者回忆而获得的.

领会是指用来包括表明理解交流内容中所含的文字信息的各种目标、行为或者反应. 在这种理解过程中，学生可能会在自己头脑中改组交流的内容，或者用自己觉得更有意义的某种类似的形式作出明显反应时改组交流的内容，还可能有一些表示对简单扩大交流本身的范围的反应.

运用某事物，需要“领会”被运用的方法、理论、原理或抽象概念. 但“领会”这一类别的问题，要求学生充分了解某一抽象概念，当要求学生具体说明抽象概念的用途时，他们能够正确地加以说明. 然而，“运用”要比这更进一步. 当学生遇到一个新问题时，他要在没有向他提示哪个抽象概念是正确的情景中运用合适的抽象概念. “领会”的标志在于，当说明抽象概念的用途时，学生能使用该抽象概念；“运用”的标志在于，在没有说明问题解决模式的情况下，学生会正确地把该抽象概念运用于适当的情景.

分析处于领会和运用稍微高级一些的水平. “领会”注重于掌握材料的意义和含义. “运用”注重于回忆适当的抽象概念或原理，并把它们运用于特定的材料. “分析”则注重把材料分解成各个组成部分，弄清各部分之间的相互关系及其构成的方式. 分析还包括那些用来传递意义或确定交流结果的技术和手段.

综合是指将各种要素和组成部分组合起来，以形成一个整体. 它是一个对各种要素和组成部分进行加工的过程，是一个用这种方式将它们组合起来，以构成一种原先不太清楚的模式或结构的过程.

根据教学目标分类学理论，认知领域中各个层次的技能和能力都需要在分类等级中较低层次的技能和能力. 据此我们认为较高层次的教学目标包含较低层次的教学目标. 因此，在编写教学目标时，如果一个教学内容在较高层次的能力水平有所要求，我们通常不重复列出

相应的较低层次的能力水平的要求，除非这两个层次的侧重点有所不同.

二、内容提要　以章的知识结构为框架，以树形图表的方式简明扼要地总结、概括每章的主要内容. 目的是对各章的教学内容进行梳理，使学生掌握知识间的联系，把零散的知识转化为系统的知识结构. 在这部分中，我们通常先列出所述内容的名称，这样，当你熟悉这个名称所指的内容时就不必往下看.

三、学习引导　围绕教学内容的重点、难点，分点论述本章的教学思想、教学方法、学习方法、解题方法等内容，阐述本章内容的作用、地位以及与其他章节内容间的联系等. 目的是拓宽学生的视野，加深他们对知识的理解，使学生从更高的层次把握所学的知识.

四、能力测试　以每节课约九十个问题的幅度设定能力测试题，包括判断题、填空题、选择题、解答题、证明题等题型及知识、领会、运用、分析综合各个能力层次的问题. 每个题之前都标明了正确解答问题所要求的能力水平. 目的是便于学生巩固练习，让学生对自己的能力水平进行测试，并结合能力测试题答案作出评价，从而诊断学习中存在的问题，明确努力的方向，促进知识向能力、素质的转化.

本书由喻德生、易青、郑华盛主编，参加编写的有：第一、五章易青，第二章李园庭，第三、七章喻德生，第四章夏璇，第六章李曦，第八章王卫东，全书最后由喻德生修改定稿.

由于水平有限，经验不足，书中疏漏、错误之处，敬请同行和读者指正.

编　者

2003 年 7 月

目　　录

第一章　概率论的基本概念

一、教学目标

（一）知识

1. 记住概率的基本概念的各种术语与记号；
2. 知道随机试验、样本空间与随机事件的定义；
3. 知道频率、概率的统计定义与概率的公理化定义；
4. 知道等可能概型（古典概型）与概率的古典定义；
5. 知道概率的基本性质；
6. 知道事件互斥与对立的定义，记住概率的加法公式；
7. 知道条件概率与事件的独立性的定义，记住概率的乘法公式；
8. 记住全概率公式与贝叶斯公式.

（二）领会

1. 领会随机现象、随机试验与随机事件中的“随机”的意义；
2. 领会事件及其运算与集合及其运算之间的对应关系；
3. 领会事件的互斥、对立与相互独立的定义，了解三者之间的关系；
4. 领会全概率公式与贝叶斯公式的意义.

（三）运用

1. 会求随机试验的样本空间；
2. 会用事件之间的运算关系，将复杂事件用简单事件进行表示；
3. 会求基本的古典概型问题的概率；
4. 会用加法公式求和事件的概率；
5. 会用乘法公式和事件的独立性求积事件的概率；
6. 会用全概率公式和贝叶斯公式计算典型问题的有关概率.

（四）分析综合

1. 综合运用排列组合与概率的古典定义直接计算事件的概率；
2. 综合运用概率的性质、公式间接计算事件的概率.

二、内容提要

- 基本概念
  - 随机事件
    - 样本点(基本事件)：随机试验的每一个可能的结果.
    - 样本空间(基本事件空间)：全体样本点的集合.
    - 随机事件(事件)：样本空间的子集.
    - 必然事件：样本空间 Ω 自身.
    - 不可能事件：空集 $\varnothing$.

基本概念基本公式

事件的运算

- 包含：$A \subset B \Leftrightarrow \omega \in A \Rightarrow \omega \in B$，即事件 A 发生 $\Rightarrow$ 事件 B 发生.
- 相等：$A = B \Leftrightarrow A \subset B$，且 $B \subset A$.
- 和：$A \cup B$，即 A、B 至少有一发生的事件.
- 交：$A \cap B(AB)$，即 A、B 同时发生的事件.
- 差：$A - B$，即 A 发生且 B 不发生的事件.
- 互斥（互不相容）：A、B 互斥 $\Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$.
- 对立（互逆）：A、B 对立（记作 $A = \overline{B}$，或 $B = \overline{A}$）$\Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$，且 $A \cup B = \Omega$.

运算律

- 交换律：$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$.
- 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- 分配律：$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$，$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
- 对偶律：$\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \overline{A_i}$，$\overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \overline{A_i}$.

概率的定义

- 频率：$f_n(A) = n_A/n$，其中 n 为试验的次数，n_A 为事件 A 发生的次数.
- 概率的统计定义：当 n 很大时，若事件 A 的频率 $f_n(A)$ 稳定地在某一常数 p 的附近摆动，则称 p 为事件 A 的概率，记为 $P(A) = p$.
- 古典概型：具有下述特点的随机试验模型：
  (i) 基本事件的总数是有限的；(ii) 每个基本事件发生的可能性相同.
- 概率的古典定义：在古典概型中，$P(A) = \dfrac{m}{n}$，其中 n 为基本事件总数，m 为 A 包含的基本事件数.
- 概率的公理化定义：设 E 为随机试验，Ω 为其样本空间. 对于 E 的每一事件 A 对应于一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：
  (i) $P(A) \geqslant 0, \forall A \subset \Omega$；(ii) $P(\Omega) = 1$；
  (iii) 若 $A_iA_j = \varnothing, i \neq j, i,j = 1,2,\cdots$，则有 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$.
- 概率的基本性质：概率的三种定义均有如下性质：(i) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$，$\forall A \subset \Omega$；(ii) $P(\varnothing) = 0$.

条件概率与独立性

- 条件概率：$P(A \mid B)$，即事件 B 发生的条件下（$P(B) \neq 0$），事件 A 发生的概率.
- 事件的独立性：A、B 相互独立 $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$；
  $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立 $\Leftrightarrow \forall s, 1 \leqslant s \leqslant n$ 以及 $\forall i, 1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_s \leqslant n$，有
  $P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_n}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_n})$.

加法公式

- $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$，若 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.
- $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$，若 $A_iA_j = \varnothing$，$i \neq j$，$i,j = 1,2,\cdots,n$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$.
- $P(A - B) = P(A) - P(B)$，若 $B \subset A$.
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

乘法公式

- $P(AB) = P(A)P(B)$，若 A、B 相互独立.
- $P(AB) = P(B \mid A)P(A)$，若 $P(A) > 0$；$P(AB) = P(A \mid B)P(B)$，若 $P(B) > 0$.
- $P(ABC) = P(C \mid AB)P(B \mid A)P(A)$，若 $P(AB) > 0$.
- $P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_{n-1} \mid A_1A_2\cdots A_{n-2})\cdots P(A_2 \mid A_1)P(A_1)$，若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0$.

全概公式与贝叶斯公式

- 定义：Ω 的一组子集 $\{B_i\}_1^n$ 称为其一个划分，若
  (i) $B_iB_j = \varnothing, i \neq j, i,j = 1,2,\cdots,n$；　(ii) $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$.
- 全概率公式：若 $B_1, B_2, \cdots B_n$ 为 Ω 的一个划分，且 $P(B_i) > 0, i = 1,2,\cdots,n$，则有
  $$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \mid B_i)P(B_i).$$
- 贝叶斯公式：若 $B_1, B_2, \cdots B_n$ 为 Ω 的一个划分，且 $P(A) > 0$，$P(B_i) > 0, i = 1,2,\cdots,n$，则有
  $$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A \mid B_j)P(B_j)}.$$

三、学习引导

（一）学习方法概述

概率论是研究非确定性现象——随机现象的一个数学分支. 虽然随机现象的发生带有偶然性，但是，在表面上是偶然性在起作用的地方，其实是受内部的隐蔽着的规律支配的. 概率论就是定量地研究、揭示这种内在规律性的一门学科.

由于此前大家所学的数学课程研究的都是确定性现象，这一转变往往会使初学者产生困惑. 要尽快地适应概率论这门课程的思维方法，认真地学习并掌握好本章的基本概念是非常关键的，而且这也是整个课程的基础.

如何计算事件的概率，是本章的另一重要内容. 在这里，熟悉并能灵活地运用集合论、排列组合的有关知识是十分重要的. 另外，理解并运用好概率的性质以及基本公式也是必不要少的.

（二）基本概念

1. 事件及其运算

随机试验每一个可能出现的结果称为基本事件，全体基本事件所成的集合称为样本空间. 随机事件——简称事件，则定义为样本空间的子集. 由此定义，基本事件——单点集、必然事件——样本空间本身，都是随机事件的特殊情形. 一次随机试验的结果是也只能是一个基本事件发生. 而一随机事件发生当且仅当它所包含的某一基本事件发生.

对于一个具体事件，要会用数学符号表示；反之，对于用数学符号表示的事件，要清楚其具体意义是什么，换言之，要能正确无误地“互译”出来.

【例 1】 袋中有八个球，依次编号为 $1,2,\cdots,8$. 从中任取一球，观察其号码. ① 试用集合表示事件 $A=\{$摸出球的号码为偶数$\}$. ② 连续摸两次，设 $B=\{$两球号码都是偶数$\}$，问 $\overline{B}=?$

解 ① 用 i 表示摸出球的号码为 i，显然样本空间为 $\Omega=\{1,2,\cdots,8\}$，而 $A=\{2,4,6,8\}$.

② $\overline{B}$ 是 B 的对立事件，它表示事件 B 不发生，所以 $\overline{B}=\{$两球号码至少有一为奇数$\}$，或 $\overline{B}=\{$两球号码恰有一个为奇数$\}\cup\{$两球号码都为奇数$\}$.

注　初学者往往误以为 $\overline{B}=\{$两球号码都为奇数$\}$，原因是没有分清不相容与对立两个概念的差异.

【例 2】 以 A 表示事件“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，则其对立事件 $\overline{A}$ 为（　）.

（1989 年考研题）

A. “甲种产品滞销，乙种产品畅销”；

B. “甲、乙两种产品均畅销”；

C. “甲种产品滞销”；

D. “甲种产品滞销或乙种产品畅销”.

解 用 A_1 表示甲种产品畅销，A_2 表示乙种产品畅销，则 $A=A_1\overline{A_2}$，于是 $\overline{A}=\overline{A_1\overline{A_2}}=\overline{A_1}\cup A_2$，故选 D.

在实际问题中，随机事件多种多样，有的简单，有的复杂. 我们往往需要将复杂的事件由简单事件通过运算表示；或将欲求其概率的事件，由已知其概率的事件通过运算表示出来. 这一点在概率的计算中十分重要.

【例 3】射击 3 次，事件 A_i 表示第 i 次命中目标（$i=1,2,3$）. 试用 A_i 的运算关系表示事件 $A=\{$至少命中两次$\}$.

解法一 $A=\{$至少有两次命中$\}\cup\{$三次都命中$\}$

$=A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_3A_1\cup A_1A_2A_3=A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_3A_1$.

解法二 $A=\{$恰好有两次命中$\}\cup\{$三次都命中$\}$

$=A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1A_2A_3$.

解法三 因为 $\overline{A}=\{$至少有两次没有命中$\}=\overline{A}_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_3\overline{A}_1$，

所以 $A=\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{A}_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_3\overline{A}_1}=(\overline{\overline{A}_1\overline{A}_2})(\overline{\overline{A}_2\overline{A}_3})(\overline{\overline{A}_3\overline{A}_1})$

$=(A_1\cup A_2)(A_2\cup A_3)(A_3\cup A_1)$.

注 ① 求一个事件的表示式时，由于思路不同，得到的表示式可能不同，但只要思路正确，所得的不同表示式必然相等.

② 表示式 $A=A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_3A_1$ 显然比表示式 $A=A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1A_2A_3$ 形式上更简单，但前者是相容事件的和，而后者是不相容事件的和，计算后者概率更为简单. 实际上，在求相容事件之和的概率时，常先把它转化成互不相容事件的和，再去计算概率.

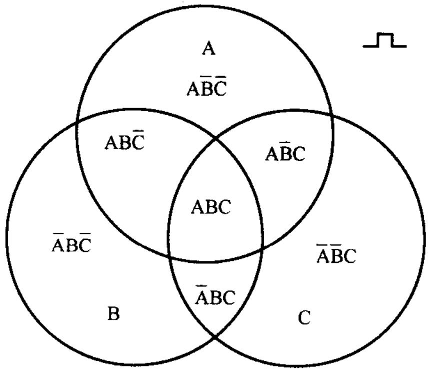

图 1-1

用平面上的一个正方形区域的点集表示一个事件，这种表示事件及其运算的示意图称为文氏图. 借助文氏图，可以直观地求出欲求事件的表示式.

【例 4】设事件 A，B，C 满足 $ABC\neq\varnothing$，把事件 $A\cup B\cup C$ 表示为一些互不相容事件的和.

解 两个事件互不相容从文氏图上看，等价于表示它们的两个子区域不相交. 因此，只需将集合 $A\cup B\cup C$ 分解成不相交集合的并.

从图 1-1 易知

$A\cup B\cup C=A\,\overline{B}\overline{C}\cup A\,\overline{B}C\cup AB\,\overline{C}\cup ABC\cup\overline{A}B\,\overline{C}\cup\overline{A}BC\cup\overline{A}\,\overline{B}C$.

除相应的定义外，两个事件之间的包含、相等、互斥、对立等关系也可以用不同的式子表达出来，而这种表示同种关系的不同式子称为“等价的”.

【例 5】对于任意两个事件 A 和 B，与 $A\cup B=B$ 不等价的是（ ）. （2001 年考研题）

A. $A\subset B$； B. $\overline{B}\subset\overline{A}$； C. $A\,\overline{B}=\varnothing$； D. $\overline{A}B=\varnothing$.

解 $A\cup B=B\Leftrightarrow A\subset B\Leftrightarrow\overline{B}\subset\overline{A}\Leftrightarrow A\,\overline{B}=\varnothing$. 故选 D.

2. 概率的定义

在一般教材中，通常给出概率的三种形式的定义，即统计概率、古典概率以及概率的公理化定义. 弄清楚这三者之间的区别与联系对正确理解事件的概率这一基本概念是有益的.

(i) 统计概率 这种定义是建立在事件的频率的稳定性之上的，而后者直接来自于实际观测. 其优点是直观且实用，在实际问题中，当试验次数充分大时，往往就是用频率作为概率的近似. 其不足之处则在于不够确切，“当试验次数充分大时，事件 A 出现的频率总是在某个固定的常数——事件 A 的概率 $P(A)$——附近摆动”. 这里既不清楚试验次数究竟要大到何种程度，也不能解释为什么是 P（A）而不是与 P（A）非常接近的另一常数. 如在抛

硬币试验中，出现正面的概率为什么是0.5，而不是0.49999？因此统计概率尚不足以成为一个精确的数学定义.

(ii) 古典概率　与统计概率不同的是，古典概率的定义是确切的，并且给出了计量概率的方法：$P(A)=\{A$ 包含的基本事件数$\}/\{$基本事件的总数$\}$. 但现在要求基本事件总数是有限的，并且它们的出现具有"等可能性". 这两条限制严重制约了古典概率的应用范围，因为在实际问题中大多不同时具备这两个条件，尤其是"等可能性". 所以，古典概率也不能作为一个一般的概率的定义.

(iii) 概率的公理化定义　概率的公理化定义由前苏联数学家柯尔莫哥洛夫于20世纪30年代首先提出，在公理化定义中，没有给出直接确定事件 A 的概率 $P(A)$ 的具体数值的方法，而是给出了概率所必须满足的最基本的规律. 但它克服了统计概率、古典概率的种种缺陷，作为一个精确的概率的一般定义，为建立严格的概率论理论提供了一个坚实的基础. 另一方面，概率的公理化定义概括了古典概率及统计概率. 不难说明在古典概率的条件下，古典概率与概率的公理化定义是一致的，即古典概率是公理化定义的特殊情形，而在公理化定义的基础上，统计概率定义所依赖的"频率的稳定性"可以给出严格的证明（参见教材大数定律）. 这不仅给统计概率而且为在实际中用频率近似代替概率提供了理论依据. 因此，尽管概率的公理化定义不能用来直接求概率，但它的建立在概率论的发展史上起着极其重要的作用.

3. 古典概率——计算概率的直接方法

概率论中的一个基本问题就是求所给事件的概率. 在本章中，求概率的方法大致可分为两种：利用定义计算的直接方法；利用概率的性质、公式计算的间接方法. 前者主要用于古典概率情形，因为古典概率定义中给出了计算概率的表达式.

【例6】 袋中有2个黑球，3个白球. 从袋中任意取出1球，求取出的是白球的概率.

解　设想已将球编号：黑1，黑2，白1，白2，白3. 则样本空间为 $\Omega=\{$黑1,黑2,白1,白2,白3$\}$. 由于是任意取，每个球被取到的可能性相同，故属于古典概率模型.

设 $A=\{$取出的是白球$\}$，则 $A=\{$白1,白2,白3$\}$，从而

$$P(A)=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{\Omega\text{ 中的基本事件总数}}=\frac{3}{5}$$

注　试看上题的另一种做法：因为每次摸球的结果只有两个，设 $\omega_1=\{$摸出的是黑球$\}$，$\omega_2=\{$摸出的是白球$\}$，则 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$，而 $A=\{\omega_2\}$，因此 $P(A)=\frac{1}{2}$. 这种做法是错误的. 因为摸出的是黑球与摸出的是白球不是等可能的. 显然前者的可能性要小于后者. 此例说明，在用古典概率时，首先要判别是否属于古典概型. 人们往往对基本事件总数是否有限比较注意，而对这些基本事件是否具有等可能性则易忽略，从而导致错误.

在求古典概率时，样本空间的元素并不一定要列出，只要求出基本事件的总数及事件 A 所包含的基本事件数即可.

【例7】 设一批产品共100件，其中98件为合格品，2件为次品. 从中任意抽取3件，求抽出的3件中恰有1件是次品的概率.

解法一　基本事件的总数，即不同抽法的种数，就是从100件产品中取出3件的组合数 C_{100}^3. 设事件 A 为抽出的3件中恰有1件是次品. 则 A 所包含的基本事件数为 $C_{98}^2\cdot C_2^1$，故

$$P(A)=\frac{C_{98}^{2}\cdot C_{2}^{1}}{C_{100}^{3}}=\frac{97}{1650}=0.0588.$$

解法二 一次取 3 件，可看成连取 3 次，每次取 1 件，取后不放回. 由排列组合的乘法原理，不同取法的总数为 $A_{100}^{3}=100\times 99\times 98$.

设第一次出现次品，第二、三次出现合格品有 A_{98}^{2} 种可能，于是有 $A_{2}^{1}\cdot A_{98}^{2}$ 种可能. 但次品也可以在第二次或第三次出现，即次品出现的方式有 C_{3}^{1} 种可能，故 A 包含的基本事件数为 $C_{3}^{1}A_{2}^{1}A_{98}^{2}$. 因此

$$P(A)=\frac{C_{3}^{1}A_{2}^{2}A_{98}^{2}}{A_{100}^{3}}=\frac{3\times 2\times 98\times 97}{100\times 99\times 98}=0.0588.$$

在这个例子中，解法一是把每一个可能的组合作为基本事件，即不考虑出现的顺序；解法二是把每一个可能的排列作为基本事件，即考虑出现的顺序（尽管问题本身与顺序无关）. 而二者相比较，解法一更简便. 由此可见，同一个问题根据不同的解释可以有不同的样本空间，从而有不同的解法，其中有的解法比较简便，有的则比较麻烦.

古典概率的计算，大都围绕基本事件总数和有利事件数的计算展开. 对于比较复杂的情形，往往需要借助排列组合中的加法原理和乘法原理将其分解成若干简单的情形来考虑. 关键在于做到不重复，不遗漏.

【例 8】 从 $0,1,2,\cdots,9$ 等十个数字中任选三个不同的数字，试求下列事件的概率：

$A_1=\{$三个数字中不含 0 和 5$\}$；$A_2=\{$三个数字中含 0 但不含 5$\}$；$A_3=\{$三个数字中不含 0 或 5$\}$.

（1990 年考研题）

解 随机试验是从十个数字中任取三个数字，样本空间的样本点总数为 C_{10}^{3}.

由于取出的三个数字不含 0 和 5，因此这三个数字必须从其余八个数字中取出，故事件 A_1 所包含的样本点总数为 C_8^3，从而

$$P(A_1)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}.$$

由于取出的三个数字中含 0，所以只需再取出两个数字，而这两个数字显然只能在不含 0 和 5 的其余八个数字中去取，从而事件 A_2 所包含的样本点总数为 C_8^2，故

$$P(A_2)=\frac{C_8^2}{C_{10}^3}=\frac{7}{30}.$$

三个数字中不含 0 的取法有 C_9^3，不含 5 的取法也有 C_9^3，这两种情况的总数为 $2C_9^3$. 但在前一种取法中，包含取 5 与不取 5 两种情形，在后一种取法中也包含取 0 与不取 0 两种情形. 因此，在 $2C_9^3$ 中，不取 0 和 5 的情形（C_8^3 种）被重复计算了，应予剔除. 从而事件 A_3 所包含的样本点总数为 $2C_9^3-C_8^3$，故

$$P(A_3)=\frac{2C_9^3-C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{14}{15}.$$

【例 9】 随机地将 15 名新生平均分配到三个班级中去，这 15 名新生中有 3 名优秀生，问每个班级各分配到一名优秀生的概率是多少?

解 基本事件总数为 15 名新生平均分配到 3 个班级中的分法总数，此分法可分三个步

骤完成．第一步先分 5 个学生到第一班共有 C_{15}^5 种分法，再在剩下 10 人中分 5 人到第二班共有 C_{10}^5 种分法，最后将剩下 5 人分到第三班有 C_5^5 种分法，从而由乘法原理，基本事件总数为

$$n=C_{15}^5C_{10}^5C_5^5.$$

设 $A=\{15$ 名新生平均分到三个班级，且各班均有一名优秀生$\}$．事件 A 可分两步完成，先分优秀生，各班一个共有 3！种分法．再将其余 12 人平均分到三个班，与前类似，共有 $C_{12}^4C_8^4C_4^4$ 种分法．由乘法原理，A 包含的基本事件数为

$$m=3!\ C_{12}^4C_8^4C_4^4,$$

故

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{25}{91}.$$

【例 10】 有不同的数学参考书 6 本，不同的物理参考书 4 本，不同的化学参考书 3 本．从中任取两本，试求两本为不同学科参考书的概率．

解 基本事件总数为从 13 本不同的书中任取两本的取法总数，显然有 C_{13}^2 种取法．

设事件 $A=\{$取出两本不同学科的参考书$\}$，完成此事件有三种方法，一是在数学和物理书中取，共有 $C_6^1C_4^1$ 种取法；二是在数学与化学书中取，共有 $C_6^1\cdot C_3^1$ 种取法；三是在物理与化学书中取，共有 $C_4^1\cdot C_3^1$ 种方法，由加法原理，A 包含的基本事件数为 $C_6^1\cdot C_4^1+C_6^1\cdot C_3^1+C_4^1\cdot C_3^1$，故

$$P(A)=\frac{C_6^1\cdot C_4^1+C_6^1\cdot C_3^1+C_4^1\cdot C_3^1}{C_{13}^2}=\frac{9}{13}.$$

4．条件概率

条件概率是概率论中的一个重要且实用的概念，它也是另一种重要概念——独立性的基础．条件概率所考虑的是在事件 B 已发生的条件下事件 A 发生的概率，记为 $P(A|B)$，这时由于附加了条件，它与事件 A 的概率 $P(A)$ 的意义是不同的．

【例 11】 设某产品 100 件中有 5 件不合格，而不合格品中又有 3 件是次品，2 件是废品．今在 100 件产品中任意抽取 1 件，① 求抽得的是废品的概率；② 若已知抽得的是不合格品，求它是废品的概率．

解 设 $A=\{$抽得的是废品$\}$，$B=\{$抽得的是不合格品$\}$．

① 由于 100 件产品中有 2 件废品，按古典概率计算 $P(A)=\dfrac{2}{100}=\dfrac{1}{50}$；

② 由于 5 件不合格品中，废品只有 2 件，故 $P(A|B)=\dfrac{2}{5}$．

注　这里 $P(A|B)$ 的计算，本来样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{100}\}$，其中 ω_1，ω_2，ω_3 为次品，ω_4，ω_5 为废品，ω_6，…，ω_{100} 为合格品．当 B 发生后，样本空间缩减为 $\Omega_B=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_5\}$，上面的 $P(A|B)$ 就是在这个缩减了的样本空间 Ω_B 上计算的．

在例 11 中，易见 $P(AB)=\dfrac{2}{100}$，$P(B)=\dfrac{5}{100}$，从而得 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$．一般的条件概率就是由此式定义的．而该式也给出计算条件概率的另一种方法：先在原样本空间 Ω 中计算（无条件）概率 $P(AB)$，$P(B)$，再用前者除以后者即可．

【例 12】 假设一批产品中一、二、三等品各占 60%，30%，10%，从中随意取出一件，结果不是三等品，求取到的是一等品的概率．（1994 年考研题）

解 记事件 A_i 为取出的产品为 i 等品（$i=1$，2，3）．则 A_1，A_2，A_3 互不相容，且

$$P[A_1(A_1\cup A_2)]=P(A_1)=0.6,\quad P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)=0.6+0.3=0.9.$$

所求概率 $$P(A_1\mid A_1\cup A_2)=\frac{P[A_1(A_1\cup A_2)]}{P(A_1\cup A_2)}=\frac{0.6}{0.9}=\frac{2}{3}.$$

【例 13】 设 10 件产品中有 4 件不合格品，从中任取两件，已知取出的两件产品中有一件为不合格品，求另一件是合格品的概率.

解 设 $A=\{$两件产品中至少有一件不合格$\}$，$A_1=\{$两件产品中一件不合格,另一件合格$\}$，$A_2=\{$两件产品都为不合格品$\}$. 则

$$A=A_1\cup A_2,\quad A_1A_2=\varnothing,\quad AA_1=A_1.$$

而 $$P(A_1)=\frac{C_6^1C_4^1}{C_{10}^2}=\frac{8}{15},\quad P(A_2)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15},$$

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{2}{3},\quad P(AA_1)=P(A_1)=\frac{8}{15}.$$

故所求概率为 $$P(A_1\mid A)=\frac{P(AA_1)}{P(A)}=\frac{4}{5}.$$

从上述例子可知,计算各种概率 $P(A\mid B)$，可视具体情况选用下列两种方法之一：

(1) 在缩减后的样本空间 Ω_B 中计算 A 出现的概率 $P(A\mid B)$；

(2) 在样本空间 Ω 中，先计算 $P(AB)$，$P(B)$，再由 $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 得出.

5. 独立性

根据条件概率的定义，一般 $P(A)\neq P(A\mid B)$，即事件 B 的发生对事件 A 发生的概率是有影响的. 但有时也会出现事件 B 的发生对事件 A 的发生的概率没有影响的情形，即 $P(A)=P(A\mid B)$，此时称 A 独立于 B. 实际上两事件独立是对称的，即 A 独立于 $B\Leftrightarrow B$ 独立于 A，这时乘法公式变成 $P(AB)=P(A)P(B)$，这一式子也可作为 A、B 独立的更一般的定义方式（此时去掉了 $P(A)>0$，$P(B)>0$ 的限制).

【例 14】 若 $P(A)>0$，$P(B)>0$，证明：A，B 互不相容与 A，B 相互独立不能同时成立.

证 若 A、B 互相独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)>0$，故此时不可能有 $P(AB)=0$，即 A，B 不可能互不相容.

注 相互独立与互不相容是常常被混淆的两个概念. 初学者常认为“若 A，B 相互独立，则 A，B 应毫无关系，因而不可能同时发生. 于是有 $AB=\varnothing$，所以独立一定不相容”. 由上例可知，实际情况恰恰相反：一般地（若 $P(A)>0$，$P(B)>0$)，若 A，B 独立，则 A，B 相容.

【例 15】 若 A，B 独立，$P(A)=0.2$，$P(B)=0.45$，求 $P(A\cup B)$.

解 $P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\bar{A}\bar{B})$ （A,B 独立$\Rightarrow\bar{A}$,$\bar{B}$ 也独立）

$=1-P(\bar{A})P(\bar{B})=1-0.8\times0.55=0.56.$

此例可推广到求 n 个相互独立的事件和事件的概率情形. 设 A_1，A_2，…，A_n 相互独立，

则 $$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_n).$$

【例 16】 将一枚硬币独立地掷两次，引进事件：$A_1=\{$掷第一次出现正面$\}$，$A_2=\{$掷第二次出现正面$\}$，$A_3=\{$正、反面各出现一次$\}$，$A_4=\{$正面出现两次$\}$，则事件（　　）.

（2003 年考研题）

A. A_1，A_2，A_3 相互独立；　　　　B. A_2，A_3，A_4 相互独立；

C. A_1，A_2，A_3 两两独立；　　　　D. A_2，A_3，A_4 两两独立.

解　显然 $A_3A_4=A_1A_2A_3=A_2A_3A_4=\varnothing$，故 $P(A_3A_4)=P(A_1A_2A_3)=P(A_2A_3A_4)=0$. 又由古典概型易知 $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{2}$，$P(A_4)=P(A_1A_2)=P(A_1A_3)=P(A_1A_4)=P(A_2A_3)=P(A_2A_4)=\frac{1}{4}$. 从而 $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)$，$P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3)$，$P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3)$，$P(A_1A_2A_3)\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$. 故 A_1，A_2，A_3 两两独立，但不相互独立，选 C.

（三）基本公式——计算概率的间接方法

前面曾介绍了用古典概率的定义计算概率的直接方法，但对于非古典概型的问题，直接方法就无法利用了. 此时，可利用间接方法，即运用概率的性质、公式，由已知事件的概率计算欲求事件的概率.

1. 加法公式

加法公式用于求和事件的概率，下面是一些常用的公式

（ⅰ）对互不相容的事件

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)\qquad (AB=\varnothing),$$

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

$$(A_iA_j=\varnothing;\ i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n),$$

$$P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1.$$

（ⅱ）对相容的事件

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(CA)+P(ABC).$$

所求概率的事件用“至少”，“最多”，“不多于”，“不少于”，“或”等词语表述时，常用加法公式.

【例 17】 一个工人看管 3 台机床，在一小时内机床不需工人照管的概率：第一台为 0.9，第二台为 0.8，第三台为 0.7. 求一小时内三台机床最多有一台需工人照管的概率.

解　设 $A_i=\{$第 i 台机床需要照管$\}$ $(i=1,2,3)$，$B=\{$最多有一台机床需要照管$\}$，则

$$B=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3,$$

显然右端四个事件互不相容，且由题意 A_1，A_2，A_3，互相独立，故

$$\begin{aligned}P(B)&=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)\\&=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)+P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)\\&=0.9\times0.8\times0.7+0.1\times0.8\times0.7+0.9\times0.2\times0.7+0.9\times0.8\times0.3\\&=0.902.\end{aligned}$$

注　把事件表示成互不相容的事件之和，再利用加法公式求概率，是求和事件概率的常用方法.

【例 18】 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$，则事件 A、B、C 全不发生的概率为多少？　　　　（1992 年考研题）

解　$P(\overline{A}\ \overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)$

$$=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)].$$

因为 $ABC\subset AB$，$P(AB)=0$，故 $P(ABC)=0$，从而

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{16}\right)=\frac{3}{8}.$$

【例 19】 7 件产品，其中 3 件次品，4 件合格品，从中无放回地取出 3 件. 求其中至少有一件次品的概率.

解 设 $A_i=\{$第 i 次取出的为次品$\}$，$B=\{$三件中至少有一件为次品$\}$. 显然 $B=A_1\cup A_2\cup A_3$，若想把 B 表示成互不相容的事件之和将比较烦（读者可试试）我们先考虑 $\overline{B}=\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$，易见，$\overline{B}=\{$取出三种全为合格品$\}$，由古典概率 $P(\overline{B})=\dfrac{C_4^3}{C_7^3}=\dfrac{4}{35}$，故

$$P(B)=1-P(\overline{B})=\frac{31}{35}.$$

注　当求一事件的概率不易时，转而考虑其对立事件，这是一种常用的手法. 在求三个或三个以上的事件至少有一个发生的概率时往往很有效，特别是诸事件为相互独立时更方便. 因为此时可用积事件的概率等于概率的积的乘法公式. 另外本题属古典概型，也可以用直接方法计算.

2. 乘法公式

乘法公式可用于求积事件的概率，常用的公式有：

(i) 对不互相独立的事件

$$P(AB)=P(A)P(B|A)\quad (P(A)>0);$$

$$P(AB)=P(B)P(A|B)\quad (P(B)>0);$$

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)\quad (P(AB)>0).$$

(ii) 对互相独立的事件

$$P(AB)=P(A)P(B);\ P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n).$$

若所考虑的问题可视为若干依次进行的步骤的合成，则与此相关的事件概率的计算常常用乘法公式.

【例 20】 已知一批产品中有 4%的次品，而在合格品中有 75%的一等品，求任取一件产品是一等品的概率.

解 取得一等品可视为先取合格品，再取一等品两个步骤组成，故可考虑用乘法公式.

设 $A=\{$取出的为合格品$\}$，$B=\{$取出的为一等品$\}$

则
$$P(B)=P(AB)=P(A)P(B|A)=0.96\times 0.75=0.75.$$

【例 21】 假设用步枪向飞机射击的命中率为 0.004，若用 250 支步枪同时独立地向敌机各射击一次，求命中敌机的概率.

解 设 $A_i=\{$第 i 支步枪击中敌机$\}$，$B=\{$敌机被命中$\}$，则显然 $B=\bigcup\limits_{i=1}^{250}A_i$，故

则
$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{250})=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_{250})$$
$$=1-(0.996)^{250}\approx 1-0.3671=0.6239.$$

注　事件的独立性要根据定义去判断通常是比较困难的，在很多问题中，往往是根据问题的实际背景来判断事件的独立性，而在一般的练习题中，独立性经常是作为已知条件直接给出的.

3. 全概率公式，贝叶斯公式

假设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为某随机试验的样本空间 Ω 的一个划分，即

(i) $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 互不相容；

(ii) $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=\Omega$.

而事件 A 必定与 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 中的一个同时出现，那么有如下的全概率公式

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i).$$

在实际问题中，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 往往可理解为事件 A 发生的原因. 因此，全概率公式的意义为：事件 A 发生的概率等于导致其发生的原因 B_i 的概率与在 B_i 发生的条件下 A 发生的条件概率的乘积之和.

【例 22】 甲袋中有 2 个白球、1 个黑球，乙袋中有 1 个白球、5 个黑球. 先从甲袋中任取一球放入乙袋，然后从乙袋中任取一球，求取出的是白球的概率.

解　设 $A=\{$从乙袋中取出的为白球$\}$，我们不能直接求 $P(A)$，因为不知从甲袋中取出的球的颜色，记 $B_1=\{$从甲袋取出的是白球$\}$，$B_2=\{$从甲袋取出的是黑球$\}$，则易见 B_1，B_2 为随机试验——从甲袋中任取一球的样本空间的一个划分，而 A 必随 B_1，B_2 之一同时出现. 故由全概率公式

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{7}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{7}=\frac{5}{21}.$$

【例 23】 一批产品共有 10 个正品，2 个次品，任意抽取两次，每次抽一个，抽后不放回，则第二次抽出的是次品的概率为多少？　　　　(1993 年考研题)

解　记 A 为第一次抽出的是次品，B 为第二次抽出的是次品，则 $B=AB+\overline{A}B$，从而

$$\begin{aligned}P(B)&=P(AB)+P(\overline{A}B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})\\&=\frac{2}{12}\times\frac{1}{11}+\frac{10}{12}\times\frac{2}{11}=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

在全概率公式中，我们知道事件 A 一定与原因 $B_1,B_2,\cdots B_n$ 中的某一个同时出现，但并不知道它究竟与哪一个一起出现. 现在如果 A 已经出现，要求它与原因 B_i 一起出现的概率，即求条件概率 $P(B_i|A)$，这就导出了贝叶斯公式：

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)}.$$

从上面分析可知，如果把全概率公式看成是“由因求果”的话，贝叶斯公式就是反过来，“执果溯因”.

【例 24】 设工厂 A 和工厂 B 的次品率分别为 1% 和 2%，现从由 A 和 B 的产品分别占 60% 和 40% 的一批产品中随机抽取一件，发现是次品，求该次品属 A 生产的概率.

(1996 年考研题)

解　记 A_1 为产品是工厂 A 生产的，B_1 为产品是工厂 B 生产的，C 为产品是次品. 于是所求概率为