东北师范大学數学函授專修班参考資料

初等几何学

（平　面）

習题解答

上　册

吉林人民出版社

东北师范大学数学函授專修班參考資料

初等几何学

（平　面）

習題解答

上　册

武云翔譯　孫福元校

吉林人民出版社

1956·長春

初等几何学（平面）習題解答
上 冊
武 云 翔 譯
孙 福 元 校
*
吉林人民出版社出版
吉林省書刊出版業營業許可証文出字第一号
（長春市斯大林大街）
吉林省長春新生企业公司印刷
新華書店吉林省分店發行
字数：230,000　开本：787×1092 1/16
印張：$10^5/_8$　印数：80,000 册
1956年7月第一版　第一次印刷
統一书号：13091.2

定价：（8）1.00 元

譯 者 的 話

这本“初等几何学(平面)習題解答”原是东北师范大学敎学函授專修班的参考資料。它是根据苏联别里标尔金(Д.Перепёлкин)敎授为法國数学家哈达瑪(J.Hadamard)的“初等几何学(平面)”一書所編輯的習題解答譯出的。全書共分上下兩册，下册正在續譯中。

原書“初等几何学(平面)”在苏联被批准为高等师范学校数理系学生和中学数学敎师的主要参考書。在我國已列入师范学院和师范專科学校数学系(科)初等数学“平面几何”复習及研究課的参考書。原書“初等几何学(平面)”中文本(馬忠林編譯)，已于一九五五年九月由遼寧人民出版社出版。

东北师范大学数学系馬忠林先生曾閱过这本“習題解答”的原稿，并提出了不少意見；这次出版又蒙孙福元先生給以詳細的校閱和修正。謹向兩位先生表示深切的謝意。

武云翔

1956.3.20

目　　次

第一編 直　　綫

第一章 角

1. 如果点M是綫段AB的中点，而点C也在綫段AB上，則CM等于綫段CA与CB的差的一半，如果点C在綫段AB的延長綫上时，則CM等于綫段CA与CB的和的一半。（証明）

〔**解答**〕 如果点C在M与B之間（圖 250a），則由等式$AM=MB$得到$AC-MC=MC+CB$，由此$MC=\frac{1}{2}(AC-CB)$，如果点C在A和M之間，可以类似地証明。

如果点C在綫段AB**自点**B**起的**延長綫上（圖 250b），則$AC-MC=MC-BC$，由此$MC=\frac{1}{2}(AC+BC)$，如果点C在綫段AB**自点**A**起的**延長綫上，可以类似地証明。

圖 250

2. 如果OM是角AOB的平分綫，且半直綫OC在角AOB的內部时，則角COM等于兩个角COA与COB的差的一半；如果半直綫OC在角AOB的对頂角$A'OB'$的內部时，則角COM与前兩个角的差的一半的和是兩直角。但如果半直綫OC在已知直綫所構成的兩个角BOA'和AOB'中之一的內部时，則角COM等于角COA与COB的和的一半。（証明）

〔**解答**〕 如果半直綫OC_1在角MOB的內部（圖 251），則$\angle AOC_1-\angle MOC_1=\angle MOC_1+\angle C_1OB$，由此$\angle MOC_1=\frac{1}{2}(\angle AOC_1-\angle C_1OB)$，**如果半直綫**$OC_1$**处在角**$AOM$的內部，可以类似地証明。

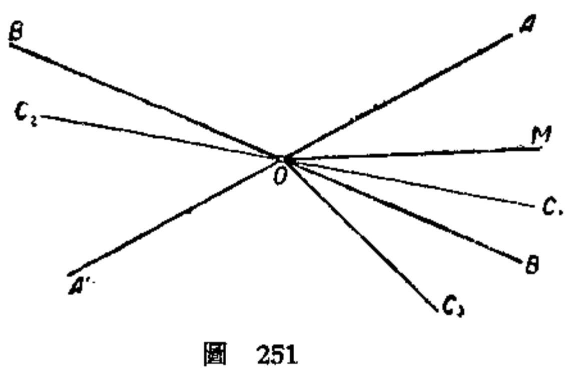


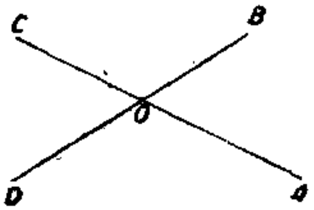
圖 251

如果半直綫OC_2处在角$A'OB'$的內部，則它的延長綫OC_1在角AOB的內部，并且$\angle MOC_2=180°-\angle MOC_1$。

如果半直綫 OC_3 在角 BOA' 的內部，則 $\angle AOC_3-\angle MOC_3=\angle MOC_3-\angle BOC_3$，由此 $\angle MOC_3=\frac{1}{2}(\angle AOC_3+\angle BOC_3)$，如果半直綫 OC_3 在角 AOB' 的內部，也可以类似地証明。

3．从点 O 引四条半直綫，OA, OB, OC, OD（象我們所列举的順序，一个在另一个的后面）．并且 $\angle AOB=\angle COD$ 和 $\angle BOC=\angle DOA$；試証 OA 和 OC 互为延長綫，OB 和 OD 也是一样。

〔**解答**〕从假設得到 $\angle ACB+\angle BOC=\angle COD+\angle DOA$（圖 252）；但是，顯然有 $\angle AOB+\angle BOC+\angle COD+\angle DOA=4d$；因而，$\angle AOB+\angle BOC=\angle COD+\angle DOA=2d$．由后一等式可知（根据§15的逆定理），$OA$ 和 OC 一个为另一个的延長綫．同样可以証明 BOD 也是直綫。



顯　252

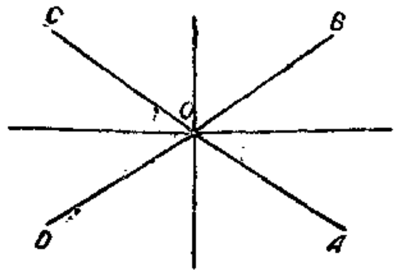


圖　253

4．有順次的四条半直綫 OA, OB, OC, OD，如果角 AOB 和 COD 的平分綫組成一条直綫，角 BOC 和 AOD 的平分綫，也組成一条直綫时，則这四条半直綫中兩兩地互为延長綫。（証明）

〔**解答**〕根据假設（圖 253）：$\frac{1}{2}\angle AOB+\angle BOC+\frac{1}{2}\angle COD=2d$；$\frac{1}{2}\angle COD+\angle DOA+\frac{1}{2}\angle AOB=2d$，由此 $\angle BOC=\angle DOA$。

同样可以証明，$\angle AOB=\angle COD$．根据習題 3，則四个半直綫兩兩互为延長綫。

第二章　三角形

5．試証明三角形具有下列条件之一时，是等腰三角形：

1）如果它的頂角的平分綫同时是高；

2）如果它的底边上的中綫同时是高；

3）如果它的頂角的平分綫同时是中綫。

〔**解答**〕1°．在三角形 ABC 中，如果 $\angle BAD=\angle CAD$ 和 $\angle BDA=\angle CDA=d$（圖 254），則三角形 ABD 和 ACD 具有公共边 AD，并且有頂点 A 和頂点 D 的角对应相等．由这兩个三角形相等則得到 $AB=AC$。

2°．如果 $\angle BDA=CDA=d$ 和 $BD=CD$，根据兩个三角形的边及其夾角相等，則$AB=AC$。

3°. 假設$\angle BAD=\angle CAD$和BD=CD. 延長AD到E使$DE=AD$（圖 254），則三角形ABD和ECD是相等的（§24，第二个条件），由此$AB=EC$和$\angle BAD=\angle CED$. 根据等式$\angle BAD=\angle CAD$和$\angle BAD=\angle CED$則有$\angle CAD=\angle CED$,因此，三角形ABC是等腰三角形（§23. 逆定理），并且$AC=EC$. 因为$AB=EC$和$AC=EC$，則$AB=AC$.

6. 在已知角的一个边OX上，取兩个綫段OA和OB，在它的另一边OX'上取兩个綫段OA'和OB'，各与前兩綫段相等，并且交叉連結綫段的端点：A和B'，A'和B，試証直綫AB'和$A'B$的交点I在已知角的平分綫上.

〔解答〕 具有公共角O以及对应相等的边OA和OA'，OB'和OB的兩个三角形OAB'和$OA'B$是相等的；因而，$\angle OB'A=\angle OBA'$和$\angle OAB'=\angle OA'B$（圖 255). 因为角OAB'和角$OA'B$相等,則与它們相鄰的角也相等:$\angle B'A'B=\angle BAB'$.三角形IAB和$IA'B'$是相等的（$AB=A'B'$；$\angle IAB=\angle IA'B'$；$\angle IBA=\angle IB'A'$），因而$IA=IA'$.最后三角形OIA和OIA'也是相等的(由于三边相等),由此$\angle AOI=\angle A'OI$.

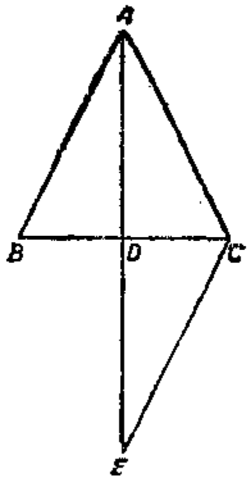


圖 254

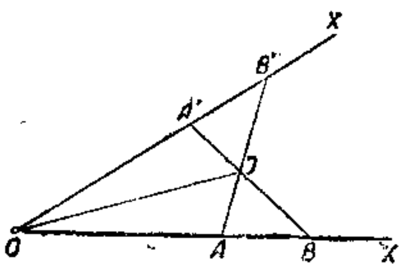


圖 255

7. 如果三角形的兩个边不等，則这兩个边間的中綫与小边的夾角，大于它与大边的夾角（仿照 §25的圖來証明）.

〔解答〕 假設BD是已知三角形ABC的中綫并且$BD=DE$（見原書27圖).这时三角形DAE和DCB相等,由此，$AE=BC$；$\angle DEA=\angle DBC$. 如果$BC>BA$，則在三角形ABE中$AE>AB$，由此根据已知的定理(原書§25：三角形的每个外角，大于与它不相鄰的內角）$\angle ABE>\angle AEB$，也就是$\angle ABD>\angle DBE$.

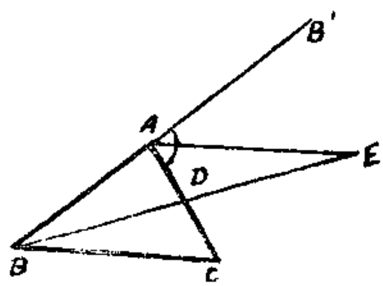


圖 27

8. 如果在三角形所在的平面上取一点，連結这个点与三角形的三个頂点所得的綫段的和，大于三角形周長的一半；如果所取的点在三角形的內部时，則这些綫段的和小于三角形的周長。(証明)

〔解答〕 对于三角形 ABC 所在平面上的任意一点M： $MB+MC\geqslant BC$； $MC+MA\geqslant CA$；$MA+MB\geqslant AB$，并且三个等号不能同时成立，因为点M不能同时在这三条直綫 BC,CA 和 AB 上。因此 $MA+MB+MC>\frac{1}{2}(BC+CA+AB)$。

8a. 如果在多边形所在的平面上取一点，連結这个点与多边形的各頂点所得綫段的和，大于它的周長的一半。(証明)

因为凸折綫的周界小于它的外圍閉折綫的周界，对于三角形內的任意一点M，根据§27則有不等式 $MB+MC<AB+AC$；$MC+MA<BC+BA$；$MA+MB<AC+BC$。相加后，再除以2，則得到 $MA+MB+AC<BC+CA+AB$。

〔解答〕 如果 $ABC\cdots KL$ 是一个任意多边形，而M是所取的点，則$MA+MB\geqslant AB$；$MB+MC\geqslant BC$；$MC+MD\geqslant CD$；……；$ML+MA\geqslant LA$， 并且所有等号不可能同时成立。相加后，再除以2，則得到$MA+MB+\cdots\cdots+ML>\frac{1}{2}(AB+BC\cdots\cdots+LA)$。

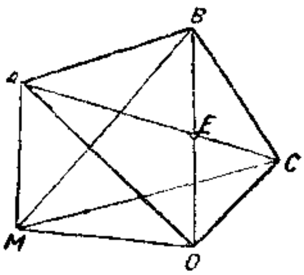


圖 256

9. 凸四边形对角綫的和，大于它的周長的一半，但小于它的周長。(証明)

〔解答〕 如果 E 是四边形 $ABCD$ 的对角綫 AC 和 BD 的交点 (圖 256)， 則$AC<AB+BC$；$AC<AD+DC$； $BD<BC+CD$； $BD<BA+AD$。 相加后，再除以2，則求得 $AC+BD<AB+BC+CD+DA$。

既然四边形 $ABCD$ 是凸四边形，則$AC=AE+EC$，$BD=BE+ED$ 和 $AE+EB>AB$；$BE+EC>BC$；$CE+ED>CD$； $DE+EA>AD$。把后边的不等式相加后，再除以2，則得到 $AE+BE+CE+DE>\frac{1}{2}(AB+BC+CD+AD)$，也就是 $AC+BD>\frac{1}{2}(AB+BC+CD+AD)$。

附注：証明中的第一个性質 $AC+BD<AB+BC+CD+AD$ 对于凹四边形仍然有效。第二个性質 $AC+BD>\frac{1}{2}(AB+BC+CD+AD)$ 对于凹四边形不常成立（例如在圖 257里 $AC+BD$，顯然小于周界）。

10. 凸四边形对角綫的交点，是平面上到它四个頂点距离的和最小的点。(証明)

〔解答〕 假設 E 是凸四边形 $ABCD$ 的对角綫交点，并且M是它所在平面上的任意点，但与 E 不同 (圖 256)。則有 $MA+MC\geqslant EA+EC$； $MB+MD\geqslant EB+ED$，并且兩个等号不能同时成立，因为点M与点 E 不同。逐項相加后，則得到：$MA+MB+MC+MD>EA+EB+EC+ED$。

附注：凹四边形的对角綫交点 E 沒有上面研究的性質。为了断定这一点，我們用D表示凹四边形 $ABCD$ 的頂点中，在三个頂点所構成的三角形 ABC 內部一个（圖 258）。

假設点M在角 BDC 的对頂角內部（或在边上），在这种情形下 $MB+MC>DB+DC$，此外，$MD+MA\geqslant AD$。由此

$$MA+MB+MC+MD>DA+DB+DC. \quad (1)$$

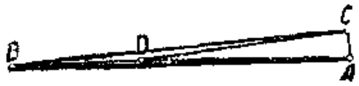


圖 257

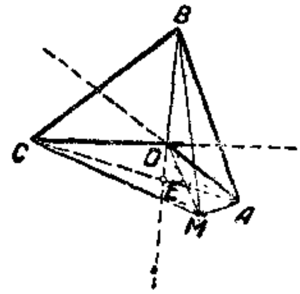


圖 258

对于在角 ADB 的对頂角內部（或边上）的点M，也会得到同样的不等式，并且对于在角 ADC 的对頂角內部的点也是同样．因此，对于与点 D 不同的任何一点M不等式（1）都成立（对角綫交点 E 也算在內）．

总之，D（不是点 E）是平面上到四个頂点間距离的和最小的点．

11． 三角形的中綫，小于夾这个中綫的兩边和的一半，但大于这个和的一半与第三边一半的差。（証明）

〔**解答**〕 在圖 27 的三角形 ABE 中，$2BD<AB+AE$，也就是$BD<\frac{1}{2}(AB+BC)$．

在三角形 ABD 和 BCD 中，$BD>AB-AD$；$BD>BC-DC$。相加后除以 2，則得到 $BD>\frac{1}{2}(AB+BC-AC)$。

12． 三角形三个中綫的和大于它周長的一半，但小于它的周長。（証明）

〔**解答**〕 如果 AA',BB',CC' 是三角形 ABC 的中綫，根据練習 11 則$\frac{1}{2}(AB+AC-BC)<AA'<\frac{1}{2}(AB+AC)$；$\frac{1}{2}(AB+BC-AC)<BB'<\frac{1}{2}(AB+BC)$；$\frac{1}{2}(AC+BC-AB)<CC'<\frac{1}{2}(AC+BC)$。相加后，則得到：$\frac{1}{2}(AB+AC+BC)<AA'+BB'+CC'<AB+AC+BC$。

附注：利用 §56 的定理，可以証明关于中綫和的較狹界限的不等式 $\frac{3}{4}(AB+BC+AC)<AA'+BB'+CC'$．如果 G 是中綫的交点，則 $BC<GB+GC$，也就是 $BC<\frac{2}{3}(BB'+CC')$．同样地，$AC<\frac{2}{3}(AA'+CC')$ 并且$AB<\frac{2}{3}(AA'+BB')$．相加后，則得到$\frac{3}{4}(AB+BC+AC)<AA'+BB'+CC'$．

13． 試在已知直綫上，求出一点，使它和兩个已知点的距离的和最小，討論下列的兩种情形：兩个已知点在已知直綫的同側或異側。

由第二种情形，導出第一种情形（利用圖形关于已知直綫的对称）．

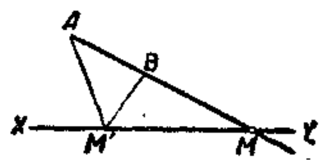


圖 259

〔**解答**〕 如果已知点 A 和 B 在已知直綫 XY 不同側，則所求的点是直綫 XY 与 AB 的交点 M，因为如果 M' 是直綫 XY 的任意点，并且与M不同，則 $MA+MB=AB<M'A+M'B$。

如果已知点 A 和 B 在已知直綫的同一側，則对于直綫 XY 的任何一点 M' 等式 $M'A+M'B=M'A+M'B'$ 成立，这里 B' 是点 B 关于 XY 的对称点，所求的点是直綫 AB' 和 XY 的交点 M。

14. 有已知直綫 XY 和在它同側的兩点 A 和 B；試在这条直綫上求出一点 M，使角 AMX 等于角 BMY。

所得的点与前問題的点相同。

〔**解答**〕 如果 B' 是点 B 关于 XY 的对称点，則 $\angle BMY=\angle B'MY$，再根据等式 $\angle AMX=\angle BMY$，因而点 A,M,B' 在同一直綫上。所求的点是直綫 AB' 和 XY 的交点。

15. 試在已知直綫上求出一点，使它和兩个已知点的距离的差最大。討論下列兩种情形：兩个已知点在已知直綫的同側或異側。

〔**解答**〕 如果已知点 A 和 B 在已知直綫 XY 的同一側（圖 259），則所求的点是直綫 XY 和 AB 的交点 M，因为如果 M' 是直綫 XY 上任意一点，幷且与 M 不同，則 $|MA-MB|=AB>|M'A-M'B|$。

如果已知点 A 和 B 在已知直綫 XY 的不同側，則用 B'（圖 260）表示点 B 关于 XY 的对称点。此时对于直綫 XY 的任意一点 M' 等式 $M'A-M'B=M'A-M'B'$ 成立。因而，所求的点是直綫 AB' 和 XY 的交点 M。

第三章 垂綫与斜綫

16. 如果在兩个直角三角形里，第一个三角形的垂边分別小于第二个三角形的垂边，則第一个三角形的斜边小于第二个三角形的斜边。

〔**解答**〕 既然在直角三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 中直角边滿足条件 $AB<A'B'$ 和 $AC<A'C'$，那么我們作 $A'D=AB$ 和 $A'E=AC$（圖 261）。此时 $BC=DE$。因为 $A'E<A'C'$，則 $DE<DC'$，幷且同样地有 $DC'<B'C'$，因此，$DE<B'C'$，也就是 $BC<B'C'$。

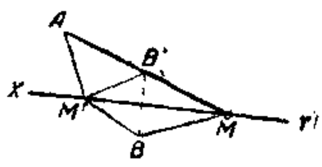


圖 260

17. 如果三角形 ABC 的內角 B 和 C 是銳角，幷且边 AB 和 AC 不等，則从頂点 A 所引出的綫段，有下面的順序：大边，中綫，角的平分綫，高，小边（參考第二章習題 7）。

〔**解答**〕 設 AD 是中綫，AE 是平分綫，AH 是三角形 ABC 的高，在三角形中 $AB>AC$（圖 262）。根据習題 7 $\angle BAD<\angle DAC$，因此中綫是在边 AB 和分角綫 AE 之間。

如果引 $HF=HC$，則 $AC=AF$，幷且根据不等式 $AB>AC$，同还有 $AB>AF$。可見 $BH>FH$，点 F 比点 B 近于 H，因此，$\angle CAH=\angle FAH>\angle BAH$，幷且高 AH 在分角綫 AE 与边 AC 之間。

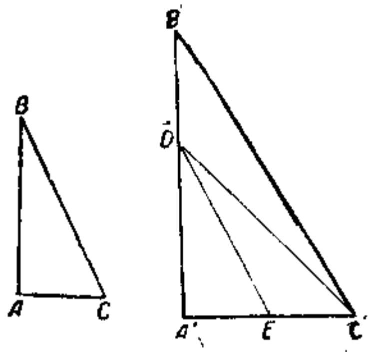


圖 261

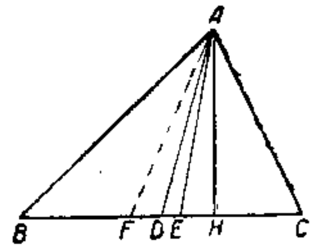


圖 262

18. 如果三角形不是等腰三角形，則从頂点到对边所引的角的平分綫小于从同一頂点所引出的中綫.

〔**解答**〕 因为 $HE<HD$（参考習題 17 的解答和圖 262），則 $AE<AD$.

第四章　直角三角形相等的条件、角的平分綫的性質

19. 試証，如果三角形的兩个高相等，則这个三角形是等腰三角形.

〔**解答**〕 如果三角形 ABC 的高 BD 和 CE 相等（圖 263），根据直角边和斜边的相等則直角三角形 BCD 和 BCE 相等，由此，$\angle BCD=\angle CBE$，于是三角形 ABC 是等腰三角形.

附注：关于中綫的类似性質可参考習題 39，对于分角綫可参考習題 361 和 361a.

20. 試証，在任意三角形里，大边所对应的高[1] 小于小边所对应的高.

〔**解答**〕 如果 BD 和 CE 是三角形 ABC 的高，在此三角形中 $AB>AC$，因此，$\angle ACB>\angle ABC$，那么將 §35 的定理（如果兩个直角三角形的斜边相等而它們的銳角不相等时，則不相等的銳角所对的边不等，且較大的角必对較大的边）用于三角形 BCD 和 BCE 上，則得到 $BD>CE$.

第五章　平行綫

21. 如果过三角形 ABC 內角 B 和 C 的平分綫交点，引直綫 MN 平行于 BC，和边 AB 及 AC 的交点各为 M 和 N 时，則綫段 MN 等于綫段 BM 与 CN 的和.（証明）

如果过角 B 和 C 外角的平分綫的交点，引平行于 BC 的直綫，这个命題的变化如何；过內角 B 的平分綫和角 C 外角的平分綫的交点，引平行于 BC 的直綫时又如何？

〔**解答**〕 設 I 是角 B 和 C 的平分綫交点（圖 264）. 則 $\angle NCI=\angle ICB=\angle NIC$（內錯角）；三角形 NIC 是等腰三角形，于是 $IN=CN$. 同样，$IM=BM$，由此 $MN=BM+CN$.

如果 I' 是角 B 和 C 的外平分綫交点，$M'I'N'$ 是平行于 BC 的直綫，則三角形

$M'BI'$ 和 NCI' 都是等腰三角形，于是 $M'N'=BM'+CN'$。

最終，如果 I'' 是角 B 的平分綫与角 C 的外角平分綫的交点，并且 $M''I''N''$ 是平行于 BC 的直綫，則三角形 $M''BI''$ 和 $N''CI''$ 都是等腰三角形，于是 $M''N''=M''I''-N''I''=BM''-CN''$。

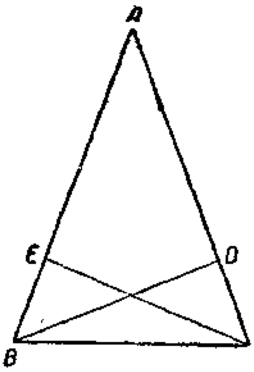


圖 263

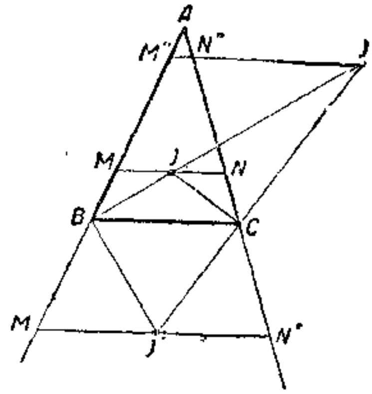


圖 264

多边形內角的和

22. 从多边形內部的一点引直綫將多边形分成三角形，試証明定理44a仍然成立。

〔**解答**〕 假設多边形 $ABCDE$ 是已知的（圖 265）。我們連結多边形內的一点 O 和它的各項点的綫段，把它划分成三角形，个数与边数相同，这些三角形所有角的和是 $2dn$（n是多边形的边数）。为了得到多边形的內角和可以从这个和中減去有頂点O的各角的和，也就是 $4d$。

23. 在任意已知三角形 ABC里，自頂点A 到边 BC 引兩条直綫 AD 和 AE，使其中第一条与 AB 的夾角等于角 C，第二条与 AC 的夾角等于角 B。試証明 ADE是等腰三角形。

〔**解答**〕 如果角 A 是銳角，則和 $\angle B+\angle C$ 大于角 A（圖 266）。由三角形ABD 得到：$\angle ADE=2b-\angle B—\angle C=\angle A$；同样，由三角形 ACE 則有 $\angle AED-2d-\angle B$

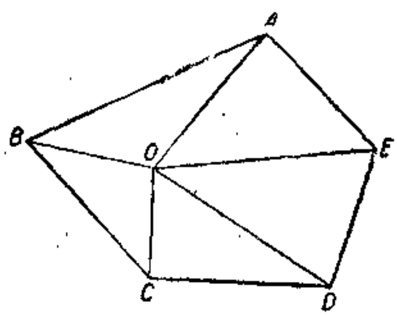


圖 265

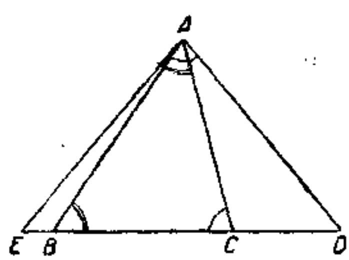


圖 266

$-\angle C=\angle A$，由此 $\angle ADE=\angle AED$。

如果角 A 是鈍角，則 $\angle B+\angle C<\angle A$（圖 267）。由三角形 ABD 和 ACE 則有：$\angle ADE=\angle B+\angle C$；$\angle AED=\angle B+\angle C$，由此 $\angle ADE=\angle AED$。

如果角 A 是直角，点 D 和 E 重合，因为角 A 等于和 $\angle B+\angle C$。

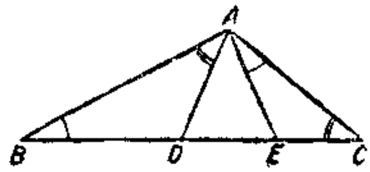


圖 267

24. 在任意三角形 ABC 里：

1）角 A 的平分綫和从点 A 所作的高的夾角，等于角 B 和 C 的差的一半。

2）角 B 和 C 的平分綫所構成的鈍角等于直角与角 $\frac{A}{2}$ 的和。

3）角 B 和 C 外角的平分綫所構成的鈍角，与角 $\frac{A}{2}$ 互为余角。

〔**解答**〕 1° 設 AE 是平分綫，AH 是高并且 $AB>AC$，那么角 B 是銳角（圖 262）。此时 $\angle EAH=\angle BAH-\angle BAE=(90°-\angle B)-\frac{1}{2}\angle A=90°-\angle B-\frac{1}{2}(180°-\angle B-\angle C)=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$。

2° 如果 I 是角 B 和 C 的平分綫交点（圖 264），則 $\angle BIC=180°-(\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C)=180°-\frac{1}{2}(180°-\angle A)=90°+\frac{1}{2}\angle A$。

3° 如果 I' 是 B 和 C 的外角平分綫交点，則 $\angle BI'C=180°-\frac{1}{2}(180°-\angle B)-\frac{1}{2}(180°-\angle C)=\frac{1}{2}(180°-\angle A)=90°-\frac{1}{2}\angle A$。

25. 在凸四边形里：

1）相鄰的兩个角的平分綫所構成的銳角，等于其他兩个角的和的一半。

2）相对的兩个角的平分綫所構成的角，与其他兩个角的差的一半互补。

〔**解答**〕 1°. 如果 AE 和 BE 是角 A 和 B 的平分綫（圖 268），則从三角形 ABE 則：$\angle AEB=180°-\frac{1}{2}\angle A-\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C+\angle D)-\frac{1}{2}\angle A-\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{2}(\angle C+\angle D)$。

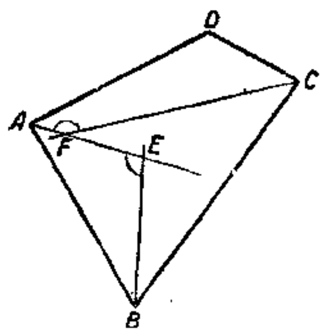


圖 268

2°. 如果 AF 和 CF 是角 A 和 C 的平分綫，从四边形 $ADCF$（我們假定兩个四边形中的 $ADCF$ 是凸的，如圖 268）則有：$\angle AFC=360°-\angle D-\frac{1}{2}\angle A-\frac{1}{2}\angle C=360°-\angle D-\frac{1}{2}(360°-\angle B-\angle C)=180°-\frac{1}{2}(\angle D-\angle B)$。

第六章　平行四边形、平行移动

26. 平行四边形內角的平分綫構成一个矩形。外角的平分綫也構成一个矩形。（証明）

〔**解答**〕 如果 AN 和 BN 是平行四边形 $ABCD$ 的角 A 和 B 的平分綫（圖 269）．則 $\angle ANB=180°-\frac{1}{2}\angle A-\frac{1}{2}\angle B=180°-90°=90°$，因为平行四边形的相鄰兩角的和等于 $180°$；如果 AP 和 BP 是角 A 和 B 的外角平分綫，則 $\angle APB=180°-\frac{1}{2}\angle XAB-\frac{1}{2}YBA=90°$。同样可以証明，四边形 $KLMN$ 和 $PQRS$ 的其余各角也是直角。

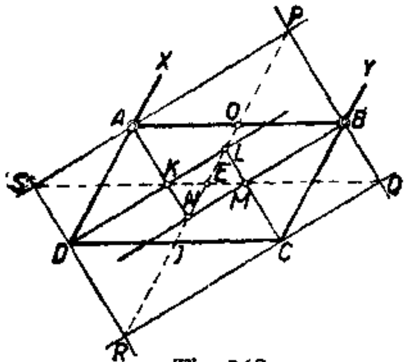


圖 269

27. 过平行四边形对角綫交点的任意直綫，被它的兩个对边所截取的綫段，被对角綫交点所平分。（証明）

由于这个事实，平行四边形对角綫的交点，叫做平行四边形的中心。

〔**解答**〕 如果 O 是平行四边形的对角綫交点（圖 270），并且 MN 是通过点 O 的任意直綫，則三角形 AOM 和 CON 相等（$AO=OC$；$\angle MAO=\angle NCO$；$\angle AOM=\angle CON$），由此 $OM=ON$。

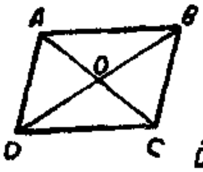


圖 50

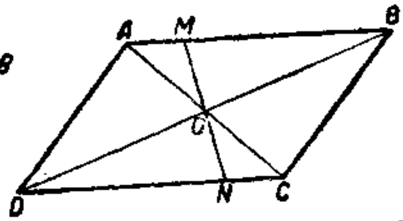


圖 270

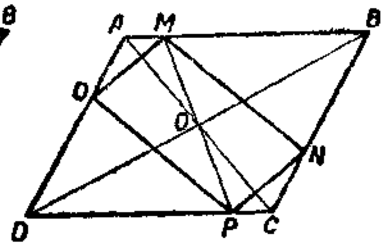


圖 271

28. 如果一个平行四边形內接于另一个平行四边形．換句話說，就是前一个的頂点在后一个的四个边上时，則这兩个四边形有共同的中心．（証明）

〔**解答**〕 設 O 是已知平行四边形 $ABCD$ 內接平行四边形 $MNPQ$ 对角綫 MP 的中点（圖 271）．三角形 AMQ 和 CPN 是相等的，因为 $MQ=PN$ 和 $\angle AMQ=\angle CPN$ $\angle AQM=\angle CNP$（具有反方向的平行边的角）．因此，$AM=CP$．其次，三角形 AOM 和 COP 相等，因为 $AM=CP$；$OM=OP$；$\angle AMO=\angle CPO$ 由此得出，$\angle AOM=\angle COP$ 和 $OA=OC$，这就是說 AOC 是直綫（習題3），而 O 是平行四边形 $ABCD$ 的对角綫 AC 的中点。

29. 如果三角形的一边小于、等于或大于它对应中綫的二倍时，則它所对的角就是銳角，直角，或鈍角．（証明）

〔**解答**〕 如果 BO 是三角形 ABC 的中綫，并且 $BO=OD$（見原書50圖），那么对于三角形 ABC 和 ABD 应用兩組对应边相等其夾角不等的定理（§28）．依据 $AC<2OB$，$AC=2OB$，或 $AC>2OB$ 則有 $AC<BD$，$AC=BD$，或 $AC>BD$，因此 $\angle ABC<\angle BA$

D，$\angle ABC=\angle BAD$，或$\angle ABC>\angle BAD$。因为$\angle ABC+\angle BAD=2d$，所以$\angle ABC<d$，$\angle ABC=d$，或$\angle ABC>d$。

30. 如果直角三角形的一个銳角，等于另一个銳角的二倍时，則它的一个垂边等于斜边的一半。（証明）

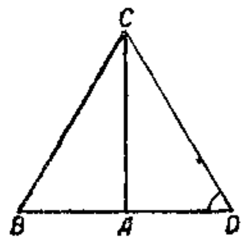


圖 272

〔**解答**〕 假設在三角形 ABC（圖 272）中角B等于角C的兩倍。如果在边AB的延長綫上截取綫段$AD=BA$，則三角形BCD各角都相等，因此$BC=BD=2BA$

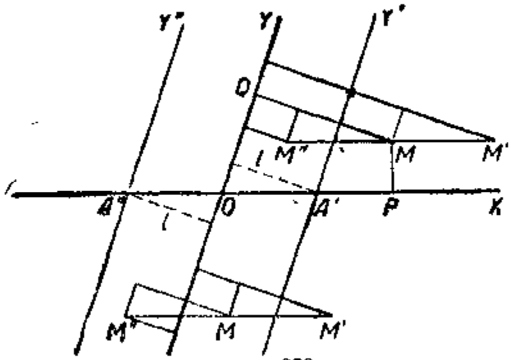
31. 求到兩条已知直綫距离的和或差，等于已知長的点的軌迹。

〔**解答**〕 假設相交直綫 OX 和 OY 是已知的（圖 273）用 A' 和 A'' 表示直綫 OX 与平行于 OY 的直綫 $A'Y'$ 和 $A''Y'$ 的交点，与 OY 这兩条直綫的距离等于 l。

設 M 是平面上任意一点，MP 和 MQ 是它到直綫 OX 与 OY 的距离。利用由綫段 OA' 和 OA'' 的大小和方向所确定的兩个平移，从点 M 得到兩个新的点 M' 和 M''，它們到直綫 OX 的距离等于 MP，而到 OY 的距离等于 $MQ+l$ 和 $l-MQ$ 或者 $MQ+l$ 和 $MQ-l$，这要看点 M 是否在直綫 $A'Y'$ 和 $A''Y''$ 之間这兩种情形（表示在圖 273 里）。

現在假設对于平面上的一点 M，它滿足条件 $MP+MQ=l$，$MP-MQ=l$，$MQ-MP=l$ 中的一个，也就是滿足条件 $MP=l-MQ$；$MP=MQ+l$；$MP=MQ-l$ 中的一个，在这种情形下，利用前面所說的平移，由点 M 得到的点 M' 或 M'' 到已知直綫 OX 和 OY 的距离相等。相反地，由此得出：利用平移 OA' 和 OA'' 由已知直綫等距离的点便得到滿足題設的点 M。

因为到已知与直綫 OX 和 OY 等距离的点的軌迹是已知直綫夾角的一对平分綫 p 和 q，那么到已知直綫 OX 和 OY 距离的和或差常等于 l 的点 M 的軌迹也是利用前面的平移，由 p 和 q 得到的兩对直綫 p',q' 和 p'',q''（圖 274）。



Черт 273.

圖 273

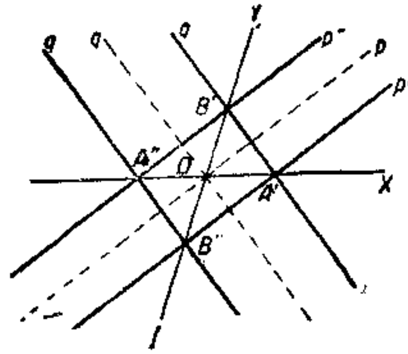


圖 274