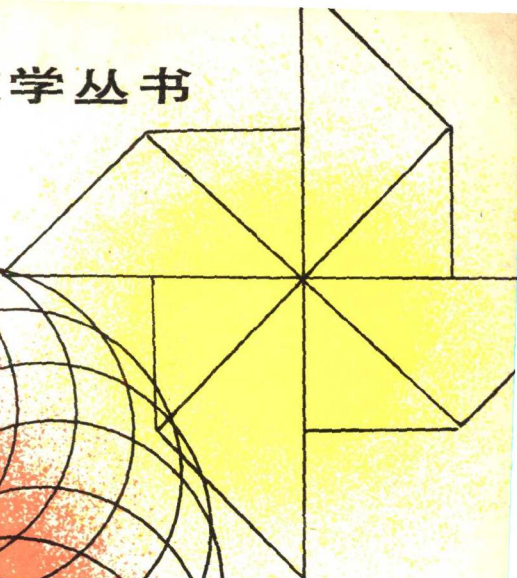
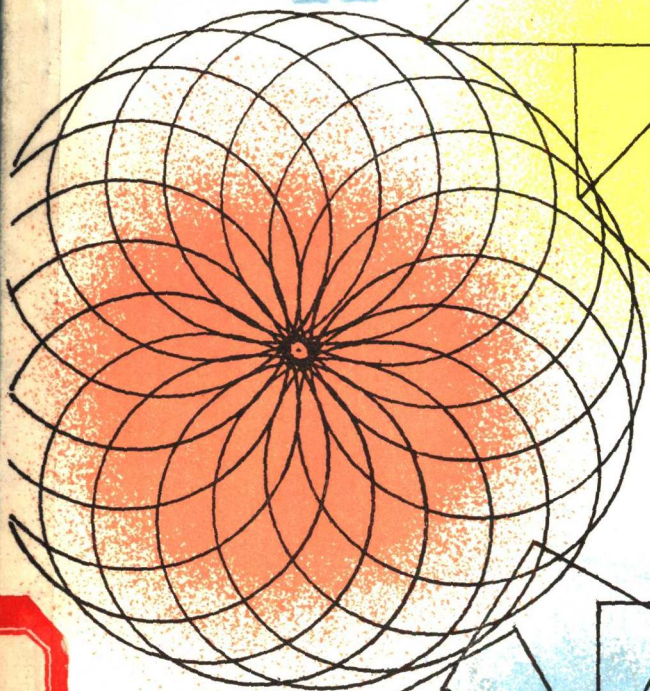


日本中学生数学丛书

11



空间与坐标

47 16
116

日本中学生数学丛书(11)

空间与坐标

[日] 平冈 忠 著

王家彦 译 马忠林 校

吉林人民出版社

内 容 介 绍

本书是根据日本横地 清编“中学生的数学”
⑪平冈 忠著“空间与坐标”一书译出。书中内容概括为三部分：第一部分是从事的角度概述几何学的产生和发展；第二部分是笛卡尔的坐标几何；第三部分是图形的变换。本书通过中学生能看懂的素材，通俗的阐述了数学的发生发展以及怎样学习和研究的思想方法，对中学生来说是一本较好的课外参考书。

日本中学生数学丛书(11)

空 间 与 坐 标

(日)平冈忠 著

王家彦 译 马忠林 审校

*

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行

长春新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 4印张 67,000字

1981年7月第1版 1981年7月第1次印刷

印数：1—10,090

书号：13091·60 定价：0.53元

出 版 说 明

为了解国外教学情况，我们组织翻译出版了由日本山梨大学教授横地 清主编的一套中学生数学丛书共十二卷，它是日本中学生数学课外读物。这套丛书是以近代数学的观点和方法，系统地阐述初等数学中的一些重要专题，对我国广大中学生和中学数学教师在理论上和思考分析问题的方法上均有参考价值。

参加这套丛书翻译工作的共有十二名同志，并由吉林师大数学系马忠林同志审校。这套丛书将从一九八〇年起陆续出版发行。

吉林人民出版社 一九八〇年五月

目 录

第 I 章 几何学的产生和发展

§1 几何学的起源	1
(1) 古代的数学	1
(2) 几何学的产生	3
§2 希腊以及亚历山大时代的几何学	4
(1) 希腊的几何学	4
(2) 亚历山大时代的几何学	9
§3 欧几里德几何学的诞生	11
(1) 欧几里德的『几何学原本』	11
(2) 平行线公设	14
§4 非欧几里德几何学的发现	15
(1) 罗巴切夫斯基—波里埃的 非欧几里德几何学	15
(2) 黎曼的非欧几里德几何学	17

第Ⅱ章 空间和图形

§1 从物体的形到图形	19
§2 空间	20
§3 研究空间和图形的方法	22
(1) 欧几里德学派的方法	22
(2) 利用坐标的方法	24
(3) 利用向量的方法	24
(4) 利用变换的方法	25
§4 空间的性质 (Ⅰ)	25
(1) 在空间中存在什么	25
(2) 空间具有什么性质	26
§5 空间的性质 (Ⅱ)	30
(1) 现实空间是欧几里德空间?	30
(2) 希尔伯特的『几何学基础』	30
§6 图形的性质	36

第Ⅲ章 坐标的几何学

§1 图形与数式的统一	38
(1) 笛卡尔的思想	38

(2)	图形与数式的统一	39
§2	坐标	41
(1)	直线上点的坐标	41
(2)	平面上点的坐标	48
§3	平面上的直线	55
(1)	平面上的直线方程	55
(2)	直线的位置关系	61
§4	以直线为边界的平面区域	66
(1)	分数大小的比较	66
(2)	以直线为边界的区域	69
§5	圆	74
(1)	圆的方程	75
(2)	圆与直线的交点	78
(3)	圆的切线	79

第Ⅳ章 向量

§1	向量	82
(1)	向量	82
(2)	向量图	84
§2	向量的分量	89
(1)	向量的分量	89

(2) 分量表示	91
§3 向量的内积	94
(1) 向量的内积	94
(2) 向量的内积在图形上的表现	96

第V章 图形的生成

§1 由运动所产生的图形	98
(1) 移动	98
(2) 由运动所产生的图形	100
§2 作为点的轨迹的图形	101
(1) 轨迹	102
(2) 作为点的轨迹的直线和圆	104
(3) 作为点的轨迹的曲线	106
§3 函数的象的图形	108
(1) 关于图形的函数关系	108
(2) 由变换所作成的图形	110

[后记]

第 I 章 几何学的产生和发展

§1 几何学的起源

(1) 古代的数学

我们很难确切地了解数学是什么时候产生的，但是产生数学的基础是，古代人类数物体的个数以及计算等等而考虑到必要的数的概念。

在古代，文化开化较早的国家应当提出的如埃及、巴比伦（米索波达米亚地方）、中国、印度等，在这些国家中数学也还是很发达。如从图 1 ~ 图 3 可以看到，它们所在的地区都是大河流域。因为大河的流域，地势平坦而且水陆交通方便、土地肥沃，适于人类居住，尤其适宜于农业生产。

人类为了生活从事农业生产，为了确定播种和收获农作物的时间，需要历法和天文，又为了计算农业、狩猎和渔业所得的数量以及物资交换，尤其是测定耕地和土地的面积和建筑等而需要测量。

从这些事实可想而知在数学中，历法、天文学、数与计算以及测量学很早就发展起来。

在埃及以及巴比伦，大约在纪元400~500年时已有历法。那时据说在埃及，已把一年定为365日，而在巴比伦，一年定为360日。这样在巴比伦把一年用一个圆来表示，把圆周象图4那样，用半径

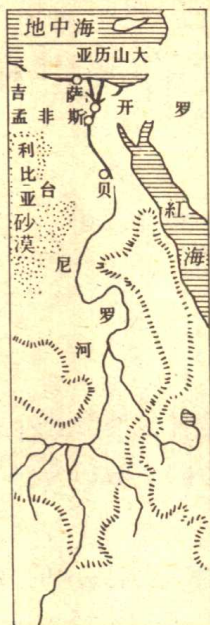


图1 埃及地方



图2 巴比伦地方



图3 中国地方

长来截，能将圆周六等分，每一等分代表60日，而产生60进位法的思想，现在在表示时间以及角度时仍在使使用。在巴比伦，表示数时也曾用60进位法。

(2) 几何学的产生

埃及的尼罗河每年雨季，河水泛滥，而且从上游冲来大

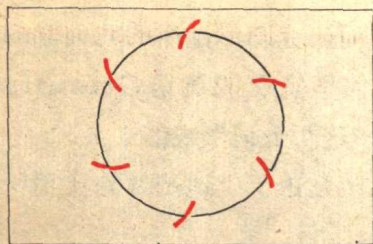


图4 圆周用半径来截

量泥砂。这些泥砂冲毁耕地的地界，居民为了预知泛滥时间，历法是必要的，并且为了重新恢复泛滥前的地界，还必须进行土地测量。

在当时，人们主要是利用绳子来测量土地，利用太阳的阴影定出东西和南北的方向，以确定地点的位置。

又如图6，以长度为3, 4, 5的比的绳索所张成的三角形则得到一个直角，被后来叫作毕达哥拉斯定理（三平方定理）（勾股定理），这时由实践已经知道了。

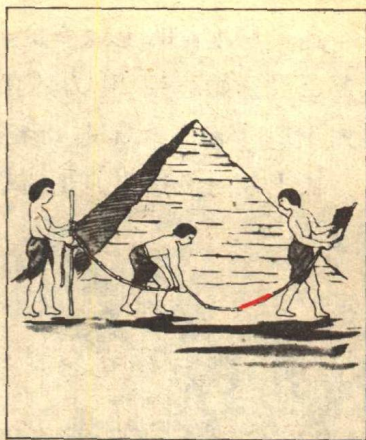


图5 埃及的测量

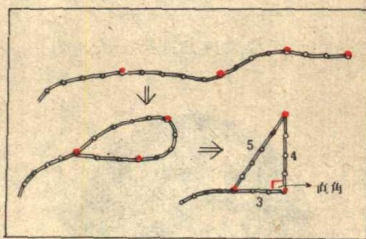


图6 用3:4:5的长度作直角

著名的吉萨的金字塔大约是在公元前 270 年修建的，到现在已有两千二百多年，它说明了当时测量以及天文的发展的实例之一。

这样从埃及的土地测量，进而研究图形性质的几何学的学问已经开始萌芽。作为具有几何学意义的英语 Geometry 是由土地 (geo) 测量 (metria) 这两个词形成的。

象上面所说过的，几何学大致是由于土地测量的实用所产生的。



图7 希腊以及亚历山大地方



图 8 托列斯

§2 希腊以及亚历山大时代的几何学

(1) 希腊的几何学

《希腊的数学家》在气候好并且无天灾之忧的希腊，人们承认自然的合理性，对事物的观点和思想方法的合理性和可知性，也引起重视。喜欢钻研学问和武术，把由埃及以及巴比伦所产生的实用知识作理论上的发展。

在希腊的数学家中，首先应提到希腊数学的祖师的希腊七贤之一的托列斯(B. C. 640 ~ 546)。他在埃及学习数学，他测定了金字塔的高度(图9)、测定了从海岸到船只的距离(图10)曾使当时人们感到震惊。

但是，托列斯的业绩中最伟大的是，他首先把由经验得知的事实，给出逻辑的证明。例如，从图11中所给出的事实

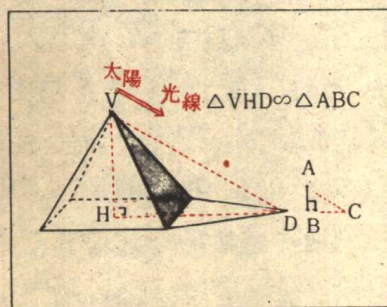


图9 利用相似三角形测定金字塔的高度

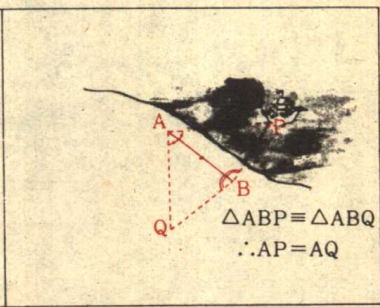


图10 利用三角形合同测定距离

出发，证明了一些其它的事实。

这些图形的事实虽然大部分已经是埃及和巴比伦人们所熟悉的，但是托列斯以“证明”的形式阐述它们的正确性为其最大的特征。托列斯这种伟大的业绩，被德国大哲学家康德(1724 ~ 1804)称赞为「思想方

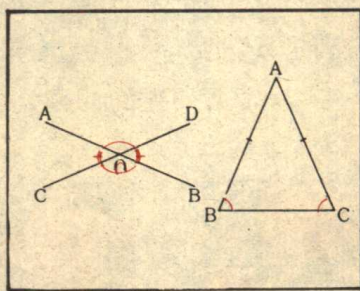


图11 「对顶角相等」「等腰三角形的两底角相等」

法的革命」。从埃及以及巴比伦以来的，在经验上已知而且在

实际上已经应用的有关图形的知识，是由托列斯把它们作为几何学的学问而构成理论的系统。也就是，奠定了今天几何学中所使用的定义、定理、证明等形式的基础。

其次，是我们所熟悉的毕达哥拉斯定理(三平方定理)的

的毕达哥拉斯 (B. C. 582 ~493) 也到埃及以及巴比伦去学习，归国后在南意大利开办学校，教了很多学生。他相信数、图形、音乐、宇宙之间有一种美的调和，他创造了音乐的毕达哥拉斯音阶，他又树立了「万物都是



图 12 毕达哥拉斯 (右图左侧是非洛劳斯)

数」的思想，重视数 (自然数) 在自然界应起到的作用。奇数、偶数、互质的数，毕达哥拉斯数 (例如 3, 4, 5; 5, 12, 13 等, 满足 $a^2 + b^2 = c^2$ 的三个自然数 a, b, c 数组叫毕达哥拉斯数) 等等, 他所研究的问题是多方面的。他注意由所取的调和

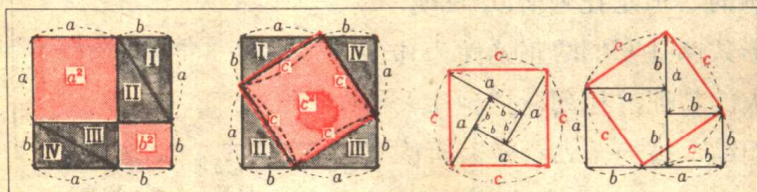


图 13 毕达哥拉斯定理 (三平方定理) $a^2 + b^2 = c^2$

点而排成美丽的图形所表示的数。图14的三角数以及图15的四角数等都是典型的实例。

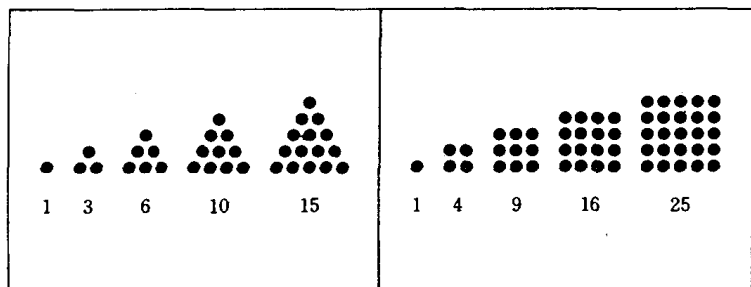


图 14 三角数

图 15 四角数

有名的毕达哥拉斯定理这个事实，已经在巴比伦时代就被人们所熟知，而这个定理的证明大概也是毕达哥拉斯首先提出的。他的证明大约是象图13的左边那两个。

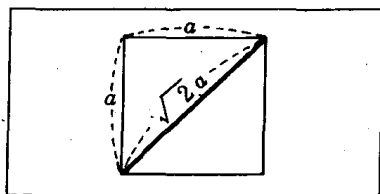


图 16 正方形一边与对角线的比
 $1 : \sqrt{2}$

在当时，所谓数就是理解为自然数和表示两个自然数比的数，即有理数，希腊人重视比和比例的重要意义。因此，认为任何线段长度的比都可以表示为自然数的比。但是，当知道如图16的正方形的一边长度与对角线长度之比不能用自然数的比来表示时，惊讶不已。

苏格拉底(B.C. 469~399)的弟子伯拉图(B.C. 429~347)

也是哲学家，为了对数学的研究，在阿克德米亚的森林中修建了学校，培育很多学者。在证明等方面所用的由三段论法开始而构成的逻辑学，首先由亚里斯多德(B.C. 384 ~ 322)提出，他也是伯拉图的学生。

【希腊时代的三大难题】 在萨拉米斯海战中希腊打败了波斯，希腊的文化中心迁移到雅典，在那里集聚了很多学者。在这些学者中出现了所谓索非斯学派，他们教辩论术和研究数学。索非斯学派提出的几何学问题中有“仅以直尺圆规解下列问题”。

- ① **角的三等分问题：**三等分已给的任意角。
- ② **立方体倍积问题：**作立方体，它的体积等于已知立方体体积的二倍。
- ③ **圆积问题：**作正方形，使它的面积等于已知圆的面积。

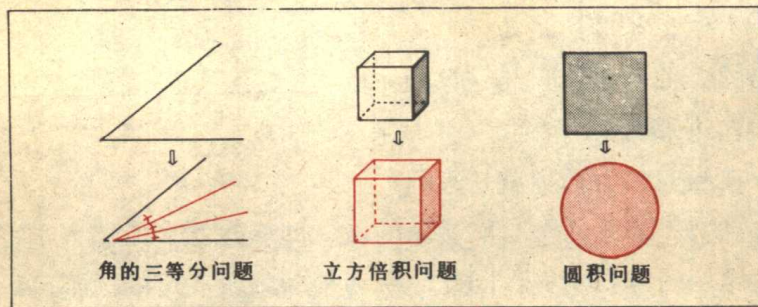


图 17 希腊时代的三大难题

这个问题，对于想求解的数学家们是个长期困惑没有得到解决的问题，到19世纪，才知道这三个问题，仅限于用直

尺、圆规是不能作图的问题。

《切能的悖理》毕达哥拉斯等人也考虑了线段是很小的点的集合,这个想法从根本上动摇了有名的切能的悖理(B.C. 约490~430)。下面是它的一个例子。阿克雷斯与龟的赛跑:

「跑的很快的阿克雷斯追不上龟」

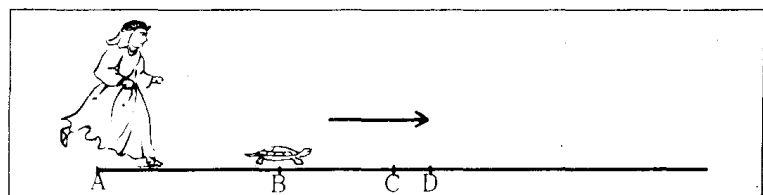


图 18 阿克雷斯与龟赛跑

如图 18, 设阿克雷斯从 A 出发追在他前方 B 处的龟。当阿克雷斯到达 B 时, 龟已经前进到 C, 然后当阿克雷斯到达 C 时, 龟又已经前进到 D, …… , 这样结果阿克雷斯追不上龟。

(2) 亚历山大时代的几何学

希腊的繁荣的文化也以伯拉图时代为顶点而逐渐衰落, 文化的中心转移到亚历山大, 在这里有很多学者对学术进行了研究。

著名的欧几里德就是其中的一个人, 关于他将在后面再来叙述。

为了研究王冠所用的阿基米德原理而著名的阿基米德(B.C. 287? ~212) 他首先研究物理, 天文和力学, 关于数学如