国家自然科学基金研究专著
NATIONAL NATURAL SCIENCE FOUNDATION OF CHINA

# 格序决策

郭耀煌　刘家诚　刘常青
郭　强　　　　　张明善　著

Management

上海科学技术出版社

国家自然科学基金研究
NATIONAL NATURAL SCIENCE FOUNDATION OF CHINA

# 格序决策

上海科学技术出版社

## 内 容 提 要

本书简要介绍了序与格的基本概念，说明了期望效用理论的理性行为公理体系，分析了各等价公理体系之间的关系，对理性行为公理的弱化进行了系统研究，构建了格序偏好关系及格序决策行为公理体系，分析了基于格序决策行为公理体系的效用函数，提出了带概率分布的区间数的概念和排序方法，创立了格序决策理论体系并研究了格序决策在多目标决策和群决策中的应用，最后还研究了基于有理数概率的效用理论。

本书可供管理类专业、系统工程专业、应用数学专业的研究生、教师、科学工作者和从事决策科学研究与应用的有关人员阅读，也可作为大学有关专业研究生的教材和教学参考书。

**图书在版编目（CIP）数据**

格序决策／郭耀煌等著．—上海：上海科学技术出版社，2003.6
（国家自然科学基金研究专著）
ISBN 7－5323－7023－2

Ⅰ.格...　Ⅱ.郭...　Ⅲ.①格—应用—决策②序—应用—决策　Ⅳ.C934

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 023134 号

上海科学技术出版社出版发行
（上海瑞金二路 450 号　邮政编码 200020）
上海新华印刷有限公司印刷　新华书店上海发行所经销
2003 年 7 月第 1 版　2003 年 7 月第 1 次印刷
开本 787×1092　1/16　印张 7　插页 4　字数 158 000
印数 1—1 200　定价：19.00 元

# 前　言

人类的活动离不开决策,如何才能做出科学合理的决策一直是决策者和决策科学界十分关心和孜孜探讨的一个重要课题。

一般来说,决策时往往有若干个决策方案可供参考,决策者通过比较选取自己认为好的方案。建立在 John von Neumann - Oskar Morgenstern 决策行为公理体系之上的期望效用理论认为:(1)决策者以自己的偏好为依据,可对任何两个决策方案的优劣加以比较和判定(称完全性或连通性);(2)由决策者的偏好所决定的决策方案之间的优劣关系具有传递性。基于上述两点,可将所有决策方案按优劣关系排成一个序列,这种全序关系为决策者进行方案抉择提供了依据和方便。然而,很多决策者的决策行为并非这么理想化,他们受事物本质属性表露程度和自身认知能力的限制,往往会表现出对不同方案难分仲伯和犹豫不决的矛盾心理。基于对人们实际决策行为和理论合理性的考虑,不少学者,如 Savage、Raiffa、Howard、Fishburn,从不同角度出发,对 John von Neumann - Oskar Morgenstern 的理性行为公理和相应的决策理论进行了讨论,提出了修改、补充和改进。到目前为止,这些研究主要集中在对 John von Neumann - Oskar Morgenstern 的独立性公理和传递性公理的弱化,而对连通性公理的研究则很少。由于对方案排序未突破原来的序结构,因而很难得到根本性的进展。

本书作者注意到以往研究工作的局限性,特别是考虑到决策者理性的非完全性,运用格论这一数学工具,将对方案排序的全序刻画拓展为格序刻画,创建了格序行为公理体系。此外,本书还纳入了作者在该方面的其他研究成果,包括格序决策效用函数、带概率分布的区间数及其排序方法、格序决策在多目标决策和群决策中的应用等。作者在该书中创建了格序决策的理论框架,提出了一种新的决策理论和方法,为决策科学开辟了一个新的研究方向和领域。

本书是作者在完成国家自然科学基金资助项目《格序决策理论研究》(批准号 79870034)的基础上撰写的。作者衷心感谢国家自然科学基金委员会对本书及其相关研究工作的支持。

西南交通大学理学院的黄天民教授和宋振明教授在百忙中审阅了本书,并提出了改进意见,作者对他们表示衷心感谢。

由于作者水平有限,书中疏漏和错误之处在所难免,敬请读者和专家批评指正。

作　者

2002 年 5 月于蓉城

# 符　号　表

| | |
|---|---|
| $\mathbf{N}$ | 自然数集合 |
| $\mathbf{R}$ | 实数集合 |
| $\boldsymbol{R}^n$ | $n$ 维欧氏空间 |
| $\boldsymbol{P}$ | 混合集、展望空间、方案集合 |
| $\boldsymbol{R}_0^+$ | 正锥 |
| $\boldsymbol{R}^+$ | 严格正锥 |
| $\varnothing$ | 空集 |
| $\infty$ | 无穷大 |
| $\overline{A}$ | 集合 $A$ 的余集(补集) |
| $2^A$ | 集合 $A$ 的所有子集的集合 |
| $\forall$ | 对任意的 |
| $\in$ | 属于 |
| $\notin$ | 不属于 |
| $\exists$ | 存在 |
| $\mid$ | 整除 |
| $\parallel$ | 与……不可比较 |
| $\subseteq$ | 包含于 |
| $\cup$ | 集合并 |
| $\cap$ | 集合交 |
| $\sim$ | 等价于 |
| $\leqslant$ | 不优于 |
| $\geqslant$ | 不劣于 |
| $\prec$ | 劣于 |
| $\succ$ | 优于 |
| $-\!\!\!\prec$ | 下邻 |
| $\succ\!\!\!-$ | 上邻 |
| $\sim_\theta$ | $\theta$-等价于 |
| $>_\theta$ | $\theta$-优于 |
| $<_\theta$ | $\theta$-劣于 |
| $[a]$ | $a$ 的等价类 |
| $f\circ g$ | 映射 $f$ 与 $g$ 的合成 |
| $[a,\rightarrow)$ | $a$ 的上节 |

| | |
|---|---|
| $(a,\rightarrow)$ | $a$ 的严格上节 |
| $(\rightarrow,a]$ | $a$ 的下节 |
| $(\rightarrow,a)$ | $a$ 的严格下节 |
| $\lvert A\rvert$ | 集合 $A$ 中元素的个数 |
| $\max A$ | 偏序集 $A$ 的最大元 |
| $\min A$ | 偏序集 $A$ 的最小元 |
| $\top$ | 顶元素 |
| $\perp$ | 底元素 |
| $S^{\mathrm{u}}$ | 集合 $S$ 的上界 |
| $S^{\mathrm{l}}$ | 集合 $S$ 的下界 |
| $\bigvee S$(或 $\sup S$) | 集合 $S$ 的上确界 |
| $\bigwedge S$(或 $\inf S$) | 集合 $S$ 的下确界 |
| $\bigvee_A S$ | 集合 $S$ 在 $A$ 中的上确界 |
| $\bigwedge_A S$ | 集合 $S$ 在 $A$ 中的下确界 |
| $l(A)$ | 集合 $A$ 的长度 |
| $w(A)$ | 集合 $A$ 的宽度 |
| $P^*(T)$ | 集合 $T$ 的上概率 |
| $P_*(T)$ | 集合 $T$ 的下概率 |

# 目　　录

# 第 1 章　绪　　论

## 1.1　决策理论的发展

决策理论最初是在行政学和统计学的基础上发展起来的，主要研究包括决策机理、决策规则、决策模型以及决策方法等方面的内容。

自有人类社会以来，人们一直都没有离开过决策，而且一直都在努力探索着怎样或者应该怎样作出科学决策的途径。决策理论的发展可以追溯到 18 世纪上半叶效用值概念的提出。Nicholas Bernoulli(1713 年)设计了著名的 St. Petersburg 悖论，生动地说明了以期望收益值作为决策准则与实际决策行为之间存在矛盾，从而对风险报酬应根据其期望报酬评价(期望收益极大化原则)的传统观念提出了挑战。Daniel Bernoulli(1738 年)还进一步论述了效用值的概念以及效用函数的可能形式[106]，提出了基于财富水平的风险展望应根据其期望主观值加以衡量的思想，并指出了财富的边际效用递减的原理。19 世纪下半叶，效用作为一个专用术语被人们广为接受，当时其主要含义专指 19 世纪新古典经济学中的商品效用。经济学家们利用 Daniel Bernoulli 的边际效用递减原理研究了消费者需求理论，进一步发展了 19 世纪新古典学派的商品效用思想，逐渐形成了传统意义上的效用理论。但是在进入 20 世纪以后，效用理论发展缓慢，其主要原因之一就是传统的效用理论还不具有直观的数量意义。虽然有学者一直致力于研究基于偏好差的效用测量，但收效甚微。

1944 年，John von Neumann 和 Oskar Morgenstern 出版了在决策科学上具有划时代意义的巨著——《Theory of Games and Economic Behavior》，提出了一组看起来似乎是合乎“理性”的决策行为公理，即 von Neumann - Morgenstern 理性行为公理体系，证明了在决策行为满足这一公理体系的前提下，决策者可以对决策问题的各种决策方案的后果设定效用值，并根据期望效用值的大小来确定自己喜爱的决策方案[249]，从而说明了期望效用值可以作为决策的理性标准，解决了长期悬而未决的如何遵循理性决策规则求得 Bernoulli 首先提出的效用值的问题。Von Neumann - Morgenstern 理性行为公理体系的建立，标志着现代决策理论的开端，也为规范型决策理论奠定了基石。半个多世纪以来，决策理论得到了飞速的发展，围绕着该公理体系——从公理体系本身的不断改善到其上的效用表示的研究与应用，在理论和实用上都取得了丰硕的研究成果，直到现在，von Neumann - Morgenstern(线性)期望效用理论仍然在现代决策理论中占有重要的地位[106]。

上世纪 50 年代，Wald 和 Leonard J. Savage 在 von Neumann - Morgenstern 决策理论的基础之上，研究了统计决策问题，并建立了相应的决策理论体系[256]。

60 年代，R. A. Howard、H. Raiffa 以及 W. Edwards 进一步发展了统计决策理论，系统地研究了 Beyes 决策理论付诸实施的具体步骤，考虑了通过试验收集新的信息以改进决策分析方法的可能性[270]。

与规范型决策理论(理性决策理论)研究的角度不同，W. Edwards 和 M. Allais 考虑了理

性决策理论在实际决策行为中的真实性问题,即人们的实际决策行为是否与Von Neumann-Morgenstern 理论或者 Leonard J. Savage 理论相符,由此引发了人们对描述型决策理论(行为决策理论)的研究。心理学家 W. Edwards 曾经致力于决策分析中信息的处理过程的研究,他发现规范型决策理论模型中隐含了许多难以避免的系统性偏差,由于人们认知错觉的普遍存在,在没有智能性或者实物性的辅助工具的引导之下所作出的直观判断往往会出现失误[27]。经济学家 M. Allais 认为概率的判定过程应该与效用值无关,而且效用值的计算也应该不受事件出现概率大小的影响,他建议概率和效用值应该组合成一个有别于数学期望值的优先度指标。

在 Von Neumann - Morgenstern 理性行为公理体系中,受到来自描述型决策理论派学者攻击最多的是独立性公理。首先,Allais(1953 年,1979 年)设计了著名的 Allais 悖论,指出独立性公理并不是经常都能得到满足的,以后,Morrison(1967 年)、MacCrimmon(1968 年)、MacCrimmon 和 Larsson(1969 年)、Hagen(1979 年)、Kahneman 和 Tversky(1979 年,1981 年)更是系统地提供了违背独立性公理的例证[106]。

Flood(1951 年)、May(1954 年)、MacCrimmon 和 Larsson(1979 年)在研究多目标决策问题的时候,指出了"克星循环"现象的普遍存在性,对传递性公理也提出了质疑。

此外,Georgescu(1954 年)、Thrall(1954 年)和 Chipman(1960 年)利用人们的决策行为所具有的确定性效应,设计出了可能存在"无限好"或者"无限坏"的备选方案的决策问题,从而也对连续性公理提出了有力的挑战。

在 Von Neumann - Morgenstern 理性行为公理体系中,唯有连通性公理(该公理假设备选方案集合中的元素可以成对比较)还没有人提出太多异议。然而我们发现在实际决策问题中,由于决策环境的复杂性以及决策者理性的有限性,人们并不是总能分辨每对决策方案的优劣,即连通性公理也不是总能得到保证的。

R. J. Aumann(1962 年)完全放弃连通性公理而研究部分序展望空间上的效用表示理论,证明了基于独立性公理以及弱连续性公理的(线性)效用函数的存在性定理。但是,由于部分序展望空间的概念过于普遍,Aumann 条件不能保证(线性)效用函数的相对唯一性,事实上难以为实际决策问题提供有效的分析依据。因此,寻求弱化连通性公理的适当条件,以满足效用函数的相对唯一性已成为规范型决策理论研究的又一重要内容。

实际生活中的决策过程往往不是单个决策者的行为,而是有多个人组成的群体共同参与决策的群体行为。每一项决策都应该尽量满足这个群体中的每一个成员的意愿和要求,因此如何集中群体中的各个成员的意见以形成整个群体的意见就显得十分重要。群决策和社会选择理论是决策理论的重要内容之一,K. J. Arrow 为此做出了非常突出的贡献,他的不可能性定理指出:在符合一组"理性"原则的条件之下,不存在能集结群体中(社会中)所有成员的偏好而形成该群体的(社会的)一个统一偏好的社会福利函数[14]。该定理对群决策理论和社会选择理论的贡献犹如能量守恒定理对物理学的贡献一样重大。

历史上包括 Von Neumann、Morgenstern 以及 Allais 在内的许多管理学家都曾力求建立一个既能满足描述的精确性,又能满足规范的合理性要求的决策理论,然而 A. Tversky 和 D. Kahneman 的研究结果表明,没有一种理论能同时满足这两方面的要求[270]。他们认为,规范模型所需遵循的必要条件和充分条件,从描述的观点来看却往往是不真实的;而以描述性研究为主要内容的描述型决策理论不仅是规范型决策理论的先行阶段,而且是不可替代的、独

立的研究领域。规范型决策理论与描述型决策理论相辅相成，彼此促进，构成了现代决策理论研究的基本格局。

正是由于规范型决策理论(理性决策理论)与实际决策行为之间存在着诸多差异，才促使规范型决策理论与描述型决策理论研究的继续深入发展，并在短短几十年之间取得了丰硕的研究成果，这包括 S. H. Chew 和 K. R. MacCrimmon(1979 年)的权重效用值理论、M. J. Machina 的局部效用函数理论、J. L. Becker 和 R. K. Sarin 的事态体关联效用理论、P. C. Fishburn 的双线性(SSB)效用理论，以及贾建民和 James S. Dyer 的风险价值理论等[174]。然而迄今为止，对于许多有重大实际意义的决策问题，仍然缺少非常有效的分析方法。

## 1.2 格序决策理论的提出

长期以来，管理学家和经济学家都认为理性决策者的偏好关系应该满足连通性公理，即要求决策者能够确定备选方案集合中每对元素的优劣次序，这似乎是理所当然的，因为“有比较才有鉴别”。然而，在现实生活中却并非如此。对于很多决策问题，尤其是重大决策问题，决策者往往会表现出“犹豫不决”、“不知所措”的复杂心理，这表明人们并不是总能分辨每对备选方案的优劣，也就意味着决策者的偏好关系并不一定满足连通性公理。之所以出现这种现象，主要是因为决策环境的复杂性以及决策者理性的有限性所导致的，这是人们难以避免的困难，因而研究不满足连通性公理的决策行为就显得特别重要。

20 世纪 30 年代，人们开始研究一类较为普遍的序结构——格，这种序结构并不要求偏序集中的每对元素都可以比较，即不要求偏好关系满足连通性条件，而只要求偏序集中的任意两个元素都存在“上确界”和“下确界”。这样，既因为格结构放弃了连通性公理而具有更为普遍的意义，还因为它保证了任意两个元素(决策方案)之间的必要联系而避免了那种决策者毫无比较信息的“抛骰子”式无可奈何的决策手段，因而是一类完美的序结构。

1996 年，徐扬在他的博士学位论文《$l^*$-模理论及格值对策理论的研究》中，对格理论在对策论中的应用作出了有益的尝试，给出了格值矩阵对策解的确定方法及其相关性质，获得了重要的研究成果[278]。

格理论也可为决策理论的研究提供一种崭新的数学工具。

自 Von Neumann - Morgenstern 理性行为公理体系建立以来，以 Savage、Raiffa、Howard、Fishburn 为首的许多学者，对决策理论中的偏好理论、效用理论、风险理论作了大量的研究，这方面的工作一直是决策理论研究的一个热点，目前已经取得了许多成果，我们不难从中看出，整个决策理论研究都涉及一个最基本的数学概念——序。很显然，在理性决策中，序结构的应用十分重要，因为决策者所获得的最终决策结果无一例外都是在“比较”中产生的，这种“比较”抽象到数学中就是用“序”来刻画的，它可以是基数形式的，也可以是序数形式的。在决策过程中，决策者对决策后果的偏爱程度(或者满意程度)时常是模糊的、不清晰的，但使用格序结构后，可以将其合理地有序化、结构化，并在此基础之上进行科学的系统分析和理性推断。同时我们注意到，建立在传统理性行为公理体系之上的偏好理论和效用理论具有很大的局限性，往往与实际决策行为并不相符，其根本原因在于，传统理性行为公理体系中的连通性公理和传递性公理要求所有的决策后果对于偏好关系成对优劣可比并具有传递性，这实际上硬性地将偏好关系构造成了一个全序关系，这个条件太强，与实际决策情形相

去很远。

20 世纪 80 年代，Fishburn，Bell 以及 Aumann 曾对决策公理体系作过一些修正，但仍未实现实质性的进展。本书作者在完成国家自然科学基金项目《格序决策理论研究》的工作中，运用现代数学理论，尤其是借助格理论，研究了弱化连通性公理的适当途径，将 Von Neumann - Morgenstern 理性行为公理体系中的全序刻画推广为格序刻画，并相应地弱化连续性公理，建立了格序决策行为公理体系，证明了基于该公理体系的(线性)效用函数的存在唯一性定理，并由此研究了相应的偏好理论、效用理论和决策方法，构建了格序决策理论框架。格序决策理论的创立，填补了格理论在决策科学中应用的空白，同时开创了决策科学的一个研究方向，它进一步提高了决策的科学化水平和实用性，丰富和完善了决策理论，对决策科学的发展具有十分重要的意义。

# 第2章 序关系与格

客观世界及研究客观世界的各种学科(包括社会科学、自然科学、工程技术)中都普遍蕴涵着序的特征——大与小、高与矮、多与少、新与旧、优与劣、好与恶等,这些都是序的表现形式,即便是貌似无序的混沌(chaos)系统,实际上也蕴涵着许多有序的特征。决策科学更是以序关系为主线,通过研究和应用科学的决策方法,以实现从若干个备选方案中寻找最优方案或者满意方案的最终目标。格是序的一种完美体现,在实际决策过程中,决策者的决策行为只具有有限理性——而不是完全理性,对某些备选方案的偏好程度往往是模棱两可的,经常表现出偏好关系的格特征。格理论与决策科学的结合,既展示了格理论广阔的应用前景,也为决策科学提供了崭新的研究手段。

本章说明序关系和格的相关概念及其代数性质,以及偏序集的 Hasse 图表示,这些内容是阅读本书以后各章所必需的基础知识,有关结论的证明可以参见相关的代数学著作[37,264,268]。

## 2.1 二元关系

所谓二元关系,是指两个元素之间存在的某种关系,这种关系可以是大小关系、从属关系,也可以是因果关系、位置关系等。下面说明二元关系的概念以及一些基本的二元关系。

**定义 2.1** 若 $A$ 是一个集合,$R\subseteq A\times A$,则称 $R$ 为 $A$ 上的一个二元关系。如果 $(a,b)\in R$,则称 $a,b$ 具有关系 $R$,记为 $aRb$;如果 $(a,b)\notin R$,则称 $a,b$ 不具有关系 $R$,记为 $aR'b$,或者非 $aRb$。

实际上 $R'$ 是 $R$ 在 $A\times A$ 中的余集 $A\times A\setminus R$,当然是 $A\times A$ 的一个子集,所以 $R'$ 也是 $A$ 上的一个二元关系,而且对于任意的 $(a,b)\in A\times A$,$a$ 与 $b$ 要么具有关系 $R$,要么具有关系 $R'$,即 $aRb$ 与 $aR'b$ 两者必居其一。此外,二元关系是有序对的集合,$(p,q)$ 一般与 $(q,p)$ 不相同(除非 $p=q$),因此,如果 $R$ 是 $A$ 上的一个二元关系,而且 $p$、$q\in A$,那么下述四种情形有且仅有一种成立:

(1) $(pRq, qRp)$;

(2) ($pRq$,非 $qRp$);

(3) (非 $pRq$, $qRp$);

(4) (非 $pRq$,非 $qRp$)。

显然,如果 $R$ 是 $A$ 上的一个二元关系,并不要求 $A$ 中的任意两个元素都具有关系 $R$,而且一个集合上可能有多种二元关系。

**例 2.1** 设 $\mathbf{R}$ 表示所有实数构成的集合,$N$ 表示所有自然数构成的集合,记

$$R_1=\{(a,b)\mid (a,b)\in \mathbf{R}\times\mathbf{R}, a>b\};$$

$$R_1' = \{(a,b) \mid (a,b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}, a \leqslant b\};$$
$$R_2 = \{(a,b) \mid (a,b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}, a^2 + b^2 = 1\};$$
$$R_2' = \{(a,b) \mid (a,b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}, a^2 + b^2 \neq 1\};$$
$$R_3 = \{(a,b) \mid (a,b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}, a \mid b\}。$$

那么 $R_1$ 即实数集 $\mathbf{R}$ 上的"大于"关系，是 $\mathbf{R}$ 上的一个二元关系；$R_1'$ 即实数集 $\mathbf{R}$ 上的"小于或等于"关系，也是 $\mathbf{R}$ 上的一个二元关系，而且对于任意的 $(a,b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$，要么 $a > b$，要么 $a \leqslant b$，两者必居其一；当 $(a,b)$ 在单位圆上时，$a, b$ 具有关系 $R_2$，否则 $a, b$ 具有关系 $R_2'$；$R_3$ 是自然数集 $\mathbf{N}$ 上的整除关系。

对于集合 $A$ 上的二元关系 $R$ 可以定义以下的性质：

**定义 2.2** 设 $R$ 是集合 $A$ 上的二元关系，称 $R$ 具有

(1) 自反性：如果对任意的 $a \in A$，$aRa$，则称 $R$ 是自反的；

(2) 非自反性：如果对任意的 $a \in A$，非 $aRa$，则称 $R$ 是非自反的；

(3) 对称性：如果对任意的 $a, b \in A$，$aRb \Rightarrow bRa$，则称 $R$ 是对称的；

(4) 非对称性：如果对任意的 $a, b \in A$，$aRb$，但是非 $bRa$，则称 $R$ 是非对称的(asymmetric)；

(5) 反对称性：如果对任意的 $a, b \in A$，$aRb, bRa \Rightarrow a = b$，则称 $R$ 是反对称的(anti-symmetric)；

(6) 传递性：如果对任意的 $a, b, c \in A$，$aRb, bRc \Rightarrow aRc$，则称 $R$ 是传递的；

(7) 连通性(或完全性)：如果对任意的 $a, b \in A$，要么 $aRb$，要么 $bRa$，两者必居其一，则称 $R$ 是连通的(或完全的)；

(8) 逆传递性：如果对任意的 $a, b, c \in A$，非 $aRb$ 以及非 $bRc \Rightarrow$ 非 $aRc$，则称 $R$ 是逆传递的。

由定义 2.2 可以直接推出下面的结论：

**定理 2.1** (1) 非对称的二元关系是非自反的；

(2) 一个非自反的传递的二元关系是非对称的；

(3) 一个二元关系 $R$ 具有逆传递性的充分必要条件是：对任意的 $p$、$q$、$r \in A$，如果 $pRr$，那么 $pRq$ 或 $qRr$。

容易验证，在例 2.1 中，$R_1$ 是 $\mathbf{R}$ 上非自反、非对称、传递、连通、逆传递的二元关系；$R_1'$ 是 $\mathbf{R}$ 上自反、反对称、传递、连通、逆传递的二元关系；$R_2$ 与 $R_2'$ 是 $R$ 上对称的二元关系；$R_3$ 是 $N$ 上自反、反对称、传递、非连通的二元关系。

## 2.2 序关系及其代数性质

### 2.2.1 序关系

一般的序关系都要求其二元关系具有传递性，这是序关系的本质特征。在例 2.1 中的 $R_1$、$R_1'$ 可作为实数集 $\mathbf{R}$ 上的序关系，但是 $R_2$、$R_2'$ 不能作为序关系。

传递性加上其他的条件就构成了各种不同性质的序关系，下面定义几种常用的序关系：

**定义 2.3** 设 $R$ 是集合 $A$ 上具有传递性的二元关系，称 $R$ 为

(1) 拟序(或预序),如果 $R$ 还是自反的;

(2) 弱序(或全预序),如果 $R$ 还是自反和连通的;

(3) 偏序,如果 $R$ 还是自反的和反对称的;

(4) 线性序(或简单序),如果 $R$ 还是自反的、反对称的和连通的;

(5) 严格偏序,如果 $R$ 还是非自反的;

(6) 严格序(或强序),如果 $R$ 还是非自反的和连通的;

(7) 全序,如果 $R$ 还是连通的。

容易验证,在例 2.1 中,$R_1$ 是 $\mathbf{R}$ 上的严格序,$R_1'$ 是 $\mathbf{R}$ 上的线性序,$R_1$ 与 $R_1'$ 都是 $\mathbf{R}$ 上的全序。

各种序之间的关系如图 2.1 所示。

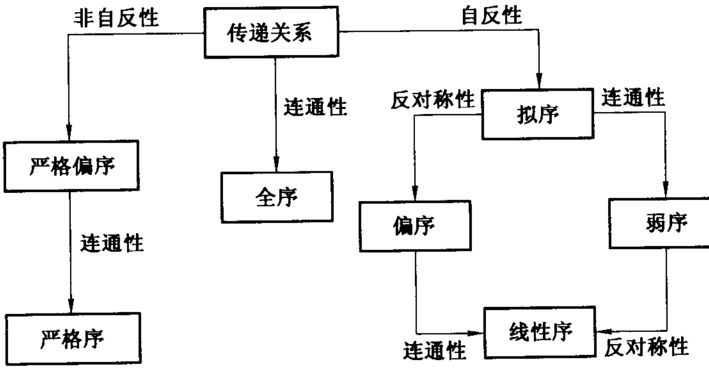


**图 2.1　各种序之间的关系**

**定义 2.4**　集合 $A$ 上具有自反性、对称性和传递性的二元关系"~"称为 $A$ 上的等价关系。

**例 2.2**　设 $R_4 = \{(a, b) \mid (a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}, a = b\}$,则 $R_4$ 是实数集 $\mathbf{R}$ 上的相等关系,由于它同时具有自反性、对称性以及传递性,因而是 $\mathbf{R}$ 上的一个等价关系,而例 2.1 中的二元关系都不是等价关系。

集合的等价关系与集合的分类有着密切的联系。

设"~"是集合 $A$ 上的一个等价关系,$a \in A$,令

$$[a] = \{x \mid x \in A, x \sim a\}$$

则$[a]$是 $A$ 的一个非空子集,称作 $A$ 上的一个等价类,$a$ 是等价类$[a]$的一个代表元素。

显然,因为等价关系"~"是对称的传递的二元关系,所以等价类与其代表元素的选取无关。

设 $A$ 是一个集合,$2^A$ 表示 $A$ 的所有子集构成的集合,$I$ 表示一个指标集合(对于任意的 $i \in I$, $A_i \in 2^A$),如果对任意的 $i, j \in I (i \neq j)$,满足:

(1) $A = \bigcup_{i \in I} A_i$;

(2) $A_i \cap A_j \neq \varnothing$,

则称$\{A_i \mid i \in I\}$是 $A$ 的一个分类。$\{A_i \mid i \in I\}$中的每一个元素($A$ 的子集)称作 $A$ 的一个类,每个类中的任何一个元素都可以作为该类的一个代表元素。

**例 2.3**　在复数集 $\mathbf{C}$ 中,令 $A_\alpha$ 表示模长为$\alpha$(非负实数)的所有复数组成的集合,则$\{A_\alpha \mid$

$\alpha \in [0,\infty)\}$ 是 $\mathbf{C}$ 的一个分类，其中每一类 $A_\alpha$ 就是以原点为中心、以 $\alpha$ 为半径的圆周上的所有复数构成的集合，该圆周上的任何一个点都可以作为 $A_\alpha$ 的代表元素。

集合上的等价关系可用以确定集合的分类。

**定理 2.2** 设"$\sim$"是集合 $A$ 上的一个等价关系，对任意的 $a \in A$，设 $[a]=\{x \mid x \in A, x \sim a\}$，则

$$\pi_\sim(A) = \{[a] \mid a \in A\}$$

是 $A$ 的一个分类。

在定理 2.2 中，由等价关系"$\sim$"确定的 $A$ 的分类 $\pi_\sim(A)$ 叫做 $A$ 对于等价关系"$\sim$"的商集，记作 $A/\sim$。$A$ 的子集 $[a]$ 称作由 $a$ 确定的等价类。

称映射

$$\nu: A \to A/\sim$$
$$\nu(a) = [a]$$

是 $A$ 到商集 $A/\sim$ 的自然映射。

反过来，集合的一个分类也可以确定一个等价关系。

**定理 2.3** 设 $\pi(A)$ 是集合 $A$ 上的一个分类，如下规定 $A$ 上的一个二元关系 $\sim_\pi$：对任意的 $a,b \in A$，$a \sim_\pi b \Leftrightarrow a,b$ 属于 $\pi(A)$ 中的同一类。则 $\sim_\pi$ 是 $A$ 上的一个等价关系。

由于 $\sim_\pi$ 满足自反性、对称性和传递性，故该定理成立。

**例 2.4** 设"$\sim$"是整数集 $\mathbf{Z}$ 上的模 $n$ 同余关系（$n$ 为某一给定的自然数），那么由"$\sim$"决定的 $\mathbf{Z}$ 的分类（即商集 $\mathbf{Z}/\sim$）包括 $n$ 个不同的等价类，即：

$$\mathbf{Z}/\sim = \{[0],[1],[2],\cdots,[n-1]\},$$

其中 $[k]=\{an+k \mid a \in \mathbf{Z}\}$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$。反过来，由上述分类 $\mathbf{Z}/\sim$ 决定的 $\mathbf{Z}$ 上的等价关系就是模 $n$ 同余关系。

利用等价关系，可以把任何一个映射分解为两个映射的合成。

**定理 2.4**（代数基本定理） 设 $f$ 是集合 $A$ 到集合 $B$ 的任意一个映射，在 $A$ 中定义如下的二元关系"$\sim$"：

$$a \sim b \Leftrightarrow f(a) = f(b), \quad \text{对任意的 } a,b \in A,$$

那么(1)"$\sim$"是 $A$ 的一个等价关系；

(2) 设 $g$ 是 $A$ 到商集 $A/\sim$ 上的自然映射，则存在唯一的从 $A/\sim$ 到 $B$ 的映射 $f^*$，使得 $f=f^* \circ g$（见图 2.2）；

(3) $f^*$ 是单射，而且当且仅当 $f$ 是满射时，$f^*$ 是双射。

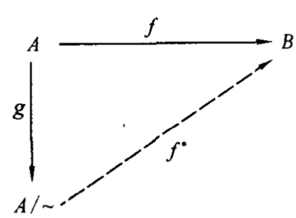


图 2.2 代数基本定理示图

证明：(1) 显然"$\sim$"满足自反性、对称性和传递性，因而是 $A$ 上的等价关系。

(2) 注意到对任意的 $a,b \in A$，$[a]=[b]$ 当且仅当 $f(a)=f(b)$。

由 $f^*:[a] \to f(a)$，对任意的 $a \in A$，易见 $f^*$ 定义合理，而且 $f^* \circ g = f$。

假若另外有映射 $h: A/\sim \to B$，满足 $h \circ g = f$，那么对任意的 $[a] \in A/\sim$ $(a \in A)$ 有 $h([a]) = h(g(a)) = h \circ g(a) = f(a) = f^*([a])$，因而 $h = f^*$，即 $f^*$ 是唯一的。因此结论(2)成立。

(3) 因为 $f^*([a]) = f^*([b])$ 当且仅当 $[a]=[b]$（即 $f(a)=f(b)$），所以 $f^*$ 是单射。