北京市高等教育精品教材立项项目

高职高等数学系列教材

Gaozhi Jiaoyu

主　编　刘书田

微积分

第二版

编著者　冯翠莲

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

北京市高等教育精品教材立项项目

高职高等数学系列教材

微 积 分

（经济类、管理类）

（第二版）

主 编 刘书田
编著者 冯翠莲

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

微积分/冯翠莲编著. —2 版. —北京：北京大学出版社，2004.6
(北京市高等教育精品教材立项项目)
(高职高等数学系列教材)
ISBN 7-301-07436-0

Ⅰ.微…　Ⅱ.冯…　Ⅲ.微积分-高等学校：技术学校-教材　Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 041330 号

书　　名：微积分(经济类、管理类)(**第二版**)
著作责任者：冯翠莲　编著
责 任 编 辑：刘　勇
标 准 书 号：ISBN 7-301-07436-0/O·0593
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn
电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021
电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者：北京大学印刷厂
经　销　者：新华书店
787mm×960mm　16 开本　12.75 印张　250 千字
2002 年 11 月第 1 版　2004 年 6 月第 2 版
2004 年 8 月第 2 次印刷(总第 3 次印刷)
印　　数：10101－13200 册
定　　价：19.00 元

内 容 简 介

本书被北京市教委列为“高等教育精品教材立项项目”，是高等职业、高等专科教育经济类、管理类“微积分”课程的教材. 该书根据教育部制定的高职高专“经济数学基础课程教学基本要求”，并结合作者多年来为经济类、管理类高职学生讲授“微积分”课所积累的丰富教学经验编写而成. 全书共分六章，内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，多元函数微分学等. 每章按节配置 A 组、B 组两类习题，每章配置总习题. A 组习题是基本题，B 组习题是综合题和提高题. 书末附有各节 A 组、B 组习题和各章总习题的答案或提示，并在本教材的配套辅导教材《微积分学习辅导》中，给出了全部 B 组习题和各章总习题的详细解答，以供教师和学生参考.

本书针对学生的接受能力、理解程度按教学基本要求讲述“微积分”课的基本内容，叙述通俗易懂、例题丰富、图形直观、富有启发性，便于自学，强调经济概念的引入和微积分在经济中的应用，注重对学生基础知识的训练和综合能力的培养.

本书可作为高等职业、高等专科经济类、管理类学生“微积分”课一学期使用的教材，也可作为参加自学考试、成人教育、职大师生讲授和学习“微积分”课程的教材或学习参考书.

高职教育高等数学系列教材
出版委员会

高职高等数学系列教材

高等数学（第二版）	刘书田等编著	定价 29.00 元
微积分（第二版）（经济类、管理类）	冯翠莲　编著	定价 19.00 元
线性代数（第二版）	胡显佑等编著	定价 16.00 元
概率统计（第二版）	高旅端等编著	定价 16.00 元
高等数学学习辅导（上册）	刘书田等编著	定价 13.00 元
高等数学学习辅导（下册）	刘书田等编著	定价 11.00 元
微积分学习辅导（经济类、管理类）	冯翠莲等编著	定价 13.50 元
线性代数学习辅导	胡显佑等编著	定价 10.00 元
概率统计学习辅导	高旅端等编著	定价 10.00 元

第二版序言

为满足迅速发展的高职教育的需要，我们于2001年1月编写了《高职高等数学系列教材》.这套教材包括《高等数学》、《微积分》、《线性代数》和《概率统计》，供高职教育工科类、经济类和管理类不同专业的学生使用.本套教材的出版受到广大教师和学生的好评，受到同行专家、教授的赞许.2003年，本套教材被北京市教委列入“北京市高等教育精品教材立项项目”.为了不断提高教材质量，适应当前高职教育的发展趋势，我们根据三年多来使用本套教材的教学实践和读者的反馈意见，对第一版教材进行了认真的修订.

修订教材的宗旨是：以高职教育的总目标——培养高素质应用型人材——为出发点，遵循“加强基础、培养能力、突出应用”的原则，力求实现基础性、实用性和前瞻性的和谐与统一.具体体现在：

(1) 适当调整了教材体系.在注意数学系统性、逻辑性的同时，对数学概念和基本定理，着重阐明它们的几何意义、物理背景、经济解释以及实际应用价值.有些内容重新改写，使重点突出、难点分散；调整了部分例题、练习题，使之更适合高职教育的总目标.

(2) 在教材内容的取舍上，删减了理论性较强的内容，减少了理论推导，增加了在工程、物理、经济方面具有实际应用的内容，立足实践与应用，使在培养学生应用数学知识解决实际问题能力方面得到进一步加强.

(3) 兼顾教材的前瞻性.本次修订汲取了国内高职数学教材的优点，注意到数学公共课与相关学科的联系，为各专业后续课打好坚实的基础.

本套教材在修订过程中，得到北京市教委，同行专家、教授的大力支持，在此一并表示诚挚的感谢.

我们期望第二版教材能适合高职数学教学的需要，不足之处，恳请读者批评指正.

编　者

2004年5月于北京

前　言

为了适应我国高等职业教育、高等专科教育的迅速发展，满足当前高职教育高等数学课程教学上的需要，我们依照教育部制定的高职、高专数学课程教学基本要求，为高职、高专工科类及经济类、管理类学生编写了本套高等数学系列教材. 本套书分为教材四个分册：《高等数学》(上、下册)、《微积分》、《线性代数》、《概率统计》，配套辅导教材四个分册：《高等数学学习辅导》(上、下册)、《微积分学习辅导》、《线性代数学习辅导》、《概率统计学习辅导》，总共 8 分册. **书中加“ * ”号的内容**，对非工科类学生可不讲授.

编写本套系列教材的宗旨是：以提高高等职业教育教学质量为指导思想，以培养高素质应用型人材为总目标，力求教材内容“涵盖大纲、易学、实用”. 本套系列教材具有以下特点：

1. 教材的编写紧扣高职、高专数学课程教学基本要求，慎重选择教材内容. 既考虑到高等数学本学科的科学性，又能针对高职班学生的接受能力和理解程度，适当选取教材内容的深度和广度；既注重从实际问题引入基本概念，揭示概念的实质，又注重基本概念的几何解释、物理意义和经济背景，以使教学内容形象、直观，便于学生理解和掌握，并达到“学以致用”的目的.

2. 教材中每节配有 A 组(基本题为主)和 B 组(综合题和提高题为主)习题，每章配有总习题. 书后附有全书习题的答案与解法提示. 每节的 B 组习题和各章总习题的详细解答编写在配套的辅导教材中.

3. 为使学生更好地掌握教材的内容，我们编写了配套的辅导教材，教材与辅导教材的章节内容同步，但侧重点不同. 辅导教材每章按照教学要求、内容解析与解题指导、各节 B 组习题及每章总习题解答、自测题与参考解答四部分内容编写. 教学要求指明学生应掌握、理解或了解的知识点；内容解析把重要的定义、定理、性质以及容易混淆的概念给出进一步解释和剖析，解题指导是通过典型例题的点评、分析与说明，给出解题方法的归纳与总结；配置自测题的目的是检测学生独立解题的能力. 教材与辅导教材相辅相成，同步使用.

4. 本套教材叙述通俗易懂、简明扼要、富有启发性，便于自学；注意用语确切，行文严谨.

本套系列教材的编写和出版，得到了北京大学出版社的大力支持和帮助；在本书的编写过程中，参加讨论和审稿的有李平和葛作维等专家和教授，在此一并致谢！

限于编者水平，书中难免有不妥之处，恳请读者指正.

编　者

2002 年 8 月于北京

目　　录

第一章　函数·极限·连续 …… (1)
§1.1　函数 …… (1)
一、函数概念 …… (1)
二、函数的几何特性 …… (4)
三、反函数 …… (7)
习题 1.1 …… (9)
§1.2　初等函数 …… (9)
一、基本初等函数 …… (9)
二、复合函数 …… (12)
三、初等函数 …… (14)
习题 1.2 …… (14)
§1.3　极限概念与性质 …… (15)
一、数列的极限 …… (15)
二、函数的极限 …… (16)
三、无穷小与无穷大 …… (20)
四、极限存在定理 …… (22)
习题 1.3 …… (23)
§1.4　极限运算 …… (23)
一、极限运算法则 …… (23)
二、两个重要极限 …… (26)
三、无穷小的比较 …… (31)
习题 1.4 …… (32)
§1.5　函数的连续性 …… (33)
一、连续性概念 …… (33)
二、初等函数的连续性 …… (36)
三、闭区间上连续函数的性质 …… (36)
习题 1.5 …… (37)
§1.6　曲线的渐近线 …… (38)
习题 1.6 …… (39)
总习题一 …… (39)

第二章 导数与微分 …… (41)
§2.1 导数概念 …… (41)
一、引出导数概念的实例 …… (41)
二、导数概念 …… (43)
习题 2.1 …… (48)
§2.2 导数公式与运算法则 …… (49)
一、基本初等函数的导数公式 …… (49)
二、导数的运算法则 …… (49)
习题 2.2 …… (53)
§2.3 隐函数的导数·高阶导数 …… (55)
一、隐函数的导数 …… (55)
二、高阶导数 …… (57)
习题 2.3 …… (59)
§2.4 函数的微分 …… (59)
一、微分概念 …… (59)
二、微分计算 …… (62)
习题 2.4 …… (63)
总习题二 …… (64)
第三章 微分中值定理·导数应用 …… (65)
§3.1 微分中值定理 …… (65)
一、罗尔定理 …… (65)
二、拉格朗日中值定理 …… (66)
习题 3.1 …… (67)
§3.2 洛必达法则 …… (67)
一、$\frac{0}{0}$ 型与 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式 …… (67)
二、$0\cdot\infty$ 型与 $\infty-\infty$ 型未定式 …… (69)
习题 3.2 …… (70)
§3.3 函数的单调性与极值 …… (70)
一、函数单调性的判别法 …… (70)
二、函数的极值 …… (72)
三、最大值与最小值问题 …… (75)
习题 3.3 …… (77)
§3.4 曲线的凹向与拐点·函数作图 …… (78)
一、曲线的凹向与拐点 …… (78)
二、函数作图 …… (80)

习题 3.4 …… (82)

§3.5 微分学在经济中的应用 …… (83)

一、经济中常见的几个函数 …… (83)

二、边际概念 …… (86)

三、函数的弹性及其经济意义 …… (87)

四、增长率 …… (89)

五、极值应用问题 …… (90)

习题 3.5 …… (94)

总习题三 …… (96)

第四章 不定积分 …… (98)

§4.1 不定积分概念与性质 …… (98)

一、不定积分概念 …… (98)

二、不定积分的性质 …… (100)

三、基本积分公式 …… (101)

习题 4.1 …… (103)

§4.2 换元积分法 …… (103)

一、第一换元积分法 …… (103)

二、第二换元积分法 …… (108)

习题 4.2 …… (110)

§4.3 分部积分法 …… (111)

习题 4.3 …… (115)

§4.4 一阶微分方程 …… (115)

一、微分方程基本概念 …… (115)

二、可分离变量的微分方程 …… (118)

三、一阶线性微分方程 …… (119)

四、微分方程经济应用举例 …… (122)

习题 4.4 …… (126)

总习题四 …… (126)

第五章 定积分及其应用 …… (128)

§5.1 定积分概念与性质 …… (128)

一、引出定积分概念的实例 …… (128)

二、定积分概念 …… (131)

三、定积分的性质 …… (134)

习题 5.1 …… (136)

§5.2 定积分的计算 …… (137)

一、微积分学基本定理 …… (137)
二、定积分的换元积分法 …… (141)
三、定积分的分部积分法 …… (143)
习题5.2 …… (144)
§5.3 无限区间的广义积分 …… (144)
习题5.3 …… (147)
§5.4 定积分的应用 …… (147)
一、平面图形的面积 …… (147)
二、已知边际函数求总函数 …… (150)
习题5.4 …… (152)
总习题五 …… (153)
第六章 多元函数微分学 …… (155)
§6.1 多元函数的基本概念 …… (155)
一、空间直角坐标系 …… (155)
二、平面区域 …… (156)
三、多元函数的基本概念 …… (157)
习题6.1 …… (160)
§6.2 偏导数 …… (161)
一、偏导数 …… (161)
二、高阶偏导数 …… (163)
习题6.2 …… (165)
§6.3 多元函数的极值 …… (165)
一、多元函数的极值 …… (165)
二、条件极值 …… (169)
三、最小二乘法 …… (172)
习题6.3 …… (174)
总习题六 …… (175)
附录 初等数学中的常用公式 …… (177)
习题参考答案与提示 …… (181)

第一章　函数·极限·连续

函数、极限和连续都是微积分学的基本概念.函数是微积分学研究的对象;函数的极限和连续性的基本知识是研究微分学和积分学所必须具备的.

本章讲述函数概念、函数的特性和初等函数;介绍极限概念及其运算;讨论函数连续性概念和连续函数的性质.

§1.1　函　　数

一、函数概念

1. 函数定义

在我们的周围,变化无处不在.所有的事物都在变化.有一些变化着的现象中存在着两个变化的量,简称**变量**.两个变量不是彼此孤立,而是相互联系、相互制约,当其中一个量在某数集内取值时,按一定的规则,另一个量有惟一确定的值与之对应,变量之间的这种数量关系就是**函数关系**.

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的**非空数集**[①].若对于每一个数 $x\in D$,按照某一确定的**对应法则** f,变量 y 总有惟一确定的数值与之对应,则称 **y 是 x 的函数**,记作

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中 x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,数集 D 称为该函数的**定义域**.

定义域 D 是自变量 x 的取值范围,也就是使函数 $y=f(x)$ 有意义的数集.由此,若 x 取数值 $x_0\in D$ 时,则称该函数在 x_0 **有定义**,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 的**函数值**,记作

$$f(x_0)\quad 或\quad y|_{x=x_0}.$$

当 x 遍取数集 D 中的所有数值时,对应的函数值全体构成的数集

$$Z=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$$

称为该函数的**值域**.若 $x_0\overline{\in} D$,则称该函数在点 x_0 没有定义.

由函数的定义可知,决定一个函数有**三个因素**:定义域 D,对应法则 f 和值域 Z.注意到每一个函数值都可由一个 $x\in D$ 通过 f 而惟一确定,于是给定 D 和 f,则 Z 就相应地被确

---

① 本书所说的“数”均为实数.

定了;从而 D 和 f 就是决定一个函数的**两个要素**.当两个函数用不同的解析式表示时,这两个函数相等的充要条件是定义域相同且对应法则相同.

通过下面的例题来理解函数定义和函数的表示方法.

例 1　圆的面积 A 由圆的半径 r 决定.只要 r 取定一个正数值,面积 A 就有一个确定的值与之对应,且 A 与 r 之间有关系式

$$A=\pi r^2 \quad (r>0).$$

上述公式表明了变量 r 和 A 之间的函数关系.

这种用数学表达式表示两个变量之间函数关系的方法称为**公式法**或**解析法**.

例 2　在气象观测站,气温自动记录仪把某一天的气温变化描绘在记录纸上,如图 1-1 所示的曲线.曲线上某一点 $P_0(t_0,\theta_0)$ 表示时刻 t_0 的气温是 θ_0.观察这条曲线,可以知道在这一天内,时间 t 从 0 点到 24 点气温 θ 的变化情形.时间 t 和气温 θ 都是变量,这两个变量之间的函数关系是由一条曲线确定的.

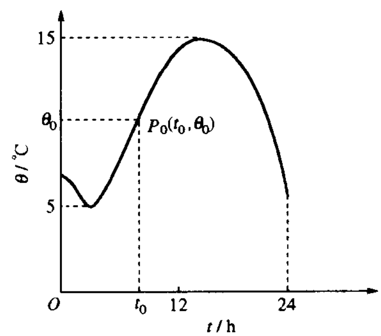

图　1-1

这种用几何图形表示两个变量之间函数关系的方法,称为**图形法**.

例 3　为了预测某种商品的市场销售情况,调查了该商品 1～6 月份的销售数量,列表如下:

月份 t	1	2	3	4	5	6
销量 Q(千件)	100	105	110	115	111	120

上表表示了月份 t 与销量 Q 之间的函数关系.t 每取定表中列出的一个值,就有惟一确定的 Q 值与之对应,这种用表格表示两个变量之间函数关系的方法,称为**列表法**.

若用公式法表示函数,且仅给出一个数学式子,没给出自变量的取值范围,而要求确定该函数的定义域,这时,应考虑两种情况:其一是,确定使这一式子有意义的自变量取值的全体;其二是,对实际问题还应根据问题的实际意义来确定.

例 4　求函数 $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{9-x^2}}+\ln(x+2)$ 的定义域.

解　该函数由两项和构成,其定义域应是各项自变量取值范围的公共部分,每项分别讨论.

第一项是分式,其分子 x 可取任意值;对分母 $\sqrt{9-x^2}$,因偶次根的根底式应非负,所以有 $9-x^2\geqslant 0$,又注意到分母不能为零,所以,只能有 $9-x^2>0$,即 $-3<x<3$,写成区间则是 $(-3,3)$.

第二项 $\ln(x+2)$,因对数符号下的式子应为正,所以有

$$x+2>0,\quad 即\quad x>-2,$$

写成区间则是$(-2,+\infty)$.

上述两个区间之交是区间$(-2,3)$,这就是所求函数的定义域.

例 5 设 $y=f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $f(1)$,$f(0)$,$f(-1)$,$f(x_0)$,$f(-x)$,$f(f(x))$.

解 这是已知函数的表达式,求函数在指定点的函数值. 易看出该函数对 x 取任何数值都有意义.

$f(1)$是当自变量 x 取 1 时函数 $f(x)$的函数值. 为求 $f(1)$,需将 $f(x)$的表示式中的 x 换为数值 1,得

$$f(1)=\left.\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|_{x=1}=\frac{1}{\sqrt{1+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$f(1)$也可记作

$$y|_{x=1}=\left.\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|_{x=1}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

同理可得

$$f(0)=\left.\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|_{x=0}=0\quad 或\quad y|_{x=0}=\left.\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|_{x=0}=0,$$

$$f(-1)=\left.\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|_{x=-1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

或

$$y|_{x=-1}=\left.\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|_{x=-1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

为求 $f(x_0)$,需将 $f(x)$的表示式中的 x 换为 x_0,得

$$f(x_0)=\left.\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|_{x=x_0}=\frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}}.$$

同理,将 x 换为$-x$,得

$$f(-x)=\frac{-x}{\sqrt{1+(-x)^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

将 $f(x)$的表示式中的 x 换为 $f(x)$的表示式,得

$$f(f(x))=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

2. 分段函数

两个变量之间的函数关系有的要用两个或多于两个的数学式子来表达,即对一个函数,在其定义域的不同部分用不同数学式子来表达,称为**分段函数**.

例 6 设函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & -1\leqslant x<0, \\ 0, & x=0, \\ 2^x, & x>0, \end{cases}$ 求(1) 定义域； (2) $f(-1),f(0),f(1)$.

解 这是分段函数，因为是用三个数学式子表示一个函数，$x=0$ 是分段函数的分段点.

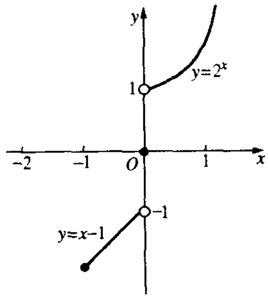

图 1-2

(1) 分段函数的定义域是各段自变量取值范围之总和，依题设是$[-1,+\infty)$.

(2) 该函数的对应法则是：若自变量 x 在区间 $[-1,0)$内取值，则相对应的函数值用 $y=x-1$ 计算；若 x 取 0，则对应的函数值是 $y=0$；若 x 在$(0,+\infty)$内取值，则对应的函数值用 $y=2^x$ 计算(图 1-2). 由上述对应法则，所以

$$f(-1)=(x-1)|_{x=-1}=-2,$$

$$f(0)=0,\quad f(1)=2^x|_{x=1}=2.$$

二、函数的几何特性

1. 函数的奇偶性

由图 1-3 看到，曲线 $y=x^3$ 关于坐标原点对称，即自变量取一对相反的数值时，相对应的一对函数值也恰是相反数，这时称 $y=x^3$ 为奇函数. 图 1-4 表明，曲线 $y=x^2$ 关于 y 轴对称，即自变量取一对相反的数值时，相对应的函数值却相等，这时，称 $y=x^2$ 为偶函数. 一般情况是：

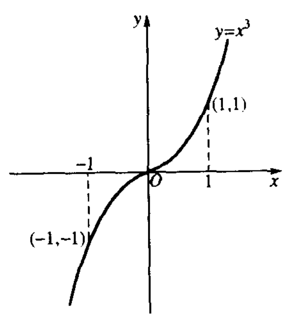

图 1-3

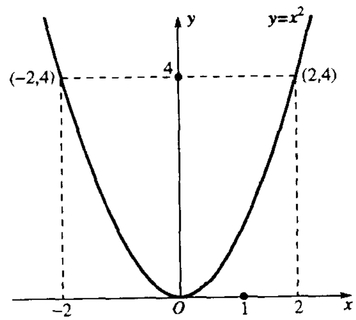

图 1-4

设函数 $y=f(x)$的定义域 D 关于**原点对称**，若对任意 $x\in D$，有

(1) $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为**奇函数**；

(2) $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为**偶函数**.

奇函数的图形关于**坐标原点对称**；偶函数的图形**关于 y 轴对称**.

例 7 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=2x^4+3x^2+1$； (2) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$； (3) $f(x)=x^3+\cos x$.

解 用奇偶函数的定义判断函数的奇偶性，应先算出 $f(-x)$，然后与 $f(x)$ 对照.

(1) 函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$. 因为

$$f(-x)=2(-x)^4+3(-x)^2+1=2x^4+3x^2+1=f(x),$$

所以 $f(x)$是偶函数.

(2) 可以算得该函数在$(-1,1)$内有意义，对任意的 $x\in(-1,1)$，由于

$$f(-x)=\ln\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\ln\frac{1+x}{1-x}=-\ln\frac{1-x}{1+x}=-f(x),$$

所以 $f(x)$是奇函数.

(3) 函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$. 对任意的 x，有

$$f(-x)=(-x)^3+\cos(-x)=-x^3+\cos x.$$

由于 $$f(-x)\neq -f(x),\quad f(-x)\neq f(x),$$

所以该函数既不是奇函数，也不是偶函数.

2. 函数的单调性

观察函数 $y=x^3$ 的图形(图 1-3)，若从左向右看(沿着 x 轴的正方向)，这是一条上升的曲线，即函数值随着自变量的值增大而增大. 这样的函数称为单调增加的. 在区间$(-\infty,0)$内，观察函数 $y=x^2$ 的图形(图 1-4)，我们会看到，情况完全相反，这是一条下降的曲线，即函数值随自变量的值增大而减少. 这时，称函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,0)$内是单调减少的.

在函数 $f(x)$有定义的区间 I①上，对于任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，若总有

(1) $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在 I 上是**单调增加的**；

(2) $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在 I 上是**单调减少的**.

单调增加的函数和单调减少的函数统称为**单调函数**. 若 $f(x)$在区间 I 上是单调函数，则称 I 是该函数的**单调区间**.

若沿着 x 轴的正方向看，单调增加函数的图形是**一条上升的曲线**；单调减少函数的图形是**一条下降的曲线**.

例 8 判断函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在区间$(0,+\infty)$内的单调性.

解 在区间$(0,+\infty)$内任取两点 x_1,x_2，且设 $x_1<x_2$. 由于

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{x_1-x_2}{x_1\cdot x_2}<0,$$

所以 $f(x_2)<f(x_1)$，即函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$内是单调减少的(图 1-5).

---

① 若我们所讨论的问题在任何一种区间(有限区间：(a,b)，$[a,b]$，$(a,b]$，$[a,b)$或无限区间：$(a,+\infty)$，$[a,+\infty)$，$(-\infty,b)$，$(-\infty,b]$，$(-\infty,+\infty)$)都成立时，将用字母 I 表示这样一个泛指的区间.

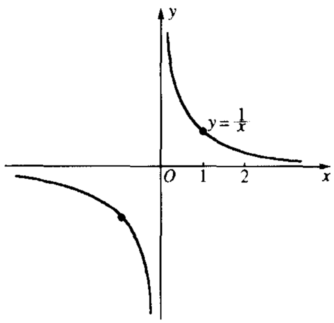

图　1-5

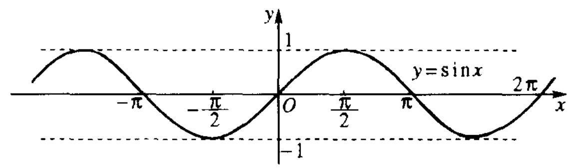

图　1-6

3. 函数的周期性

我们已经知道，正弦函数 $y=\sin x$ 是周期函数，即有

$$\sin(x+2n\pi)=\sin x,\quad n=\pm 1,\pm 2,\cdots,$$

即 $\pm 2\pi,\pm 4\pi,\cdots$ 都是函数 $y=\sin x$ 的周期，而 2π 是它的最小正周期，一般称 2π 为正弦函数的周期(图 1-6).

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在一个非零常数 T，对于 D 内所有 x，有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 是**周期函数**，称 T 是它的一个**周期**.

若 T 是函数的一个周期，则 $\pm 2T,\pm 3T,\cdots$ 也都是它的周期. 通常，称周期中的**最小正周期**为周期函数的**周期**.

周期为 T 的周期函数，在长度为 T 的各个区间上，其函数的图形**有相同的形状**. 对正弦函数 $y=\sin x$，在长度为 2π 的各个区间上，其图形的形状显然是相同的.

4. 函数的有界性

在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上，函数 $y=\sin x$ 的图形(图 1-6)介于两条直线 $y=-1$ 和 $y=1$ 之间，即有 $|\sin x|\leqslant 1$，这时称 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界函数. 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内，函数 $y=x^3$ 的图形(图 1-3)向上、向下都可以无限延伸，不可能找到两条平行于 x 轴的直线，使这个图形介于这两条直线之间，这时称 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是无界函数.

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在正数 M，使得对任意的 $x\in I$，有

$$|f(x)|\leqslant M\quad(\text{可以没有等号}),$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上是**有界函数**；否则称 $f(x)$ 是**无界函数**.

有界函数的图形必**介于两条平行于 x 轴的直线** $y=-M(M>0)$**和** $y=M$ **之间**.

例如，反正切函数 $y=\arctan x$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的(图 1-7)：

$$|\arctan x|<\frac{\pi}{2}.$$