



三导丛书

线性代数

(同济·第四版)

导教 · 导学 · 导考

DAOJIAO DAOXUE DAOKAO

徐仲 陆全 编

- 考点研究
- 重要结论与公式
- 主要方法
- 常考题型及考研典型题精解
- 课后习题全解
- 学习效果两级测试题及答案

西北工业大学出版社

三 导 丛 书

线 性 代 数

(同济·第四版)

导教·导学·导考

徐 仲 陆 全 编

西北工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数(同济·第四版)导教·导学·导考/徐仲,陆全编.
—西安:西北工业大学出版社,2005.1
(三导丛书)
ISBN 7-5612-1851-6

I. 线… II. ①徐… ②陆… III. 线性代数-高等学校-教学参考资料 IV. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 118248 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072

电 话:029-88493844 88491757

网 址:www.nwpup.com

印 刷 者:陕西向阳印务有限公司

开 本:850 mm×1 168 mm 1/32

印 张:9.187 5

字 数:233 千字

版 次:2005 年 1 月第 1 版 2005 年 1 月第 1 次印刷

定 价:13.00 元

前 言

线性代数课程是高等学校普遍开设的一门重要的数学基础课。在全国统一命题的硕士研究生入学数学考试中,线性代数内容占 25% 左右(满分 150 分)。其中“数学一”含三小题、两大题,共 30 分;“数学二”含三小题、两大题,共 33 分;“数学三”和“数学四”均含三小题、两大题,共 38 分。

线性代数这门课程具有理论上的抽象性、逻辑推理的严密性和工程应用的广泛性。读者在学习线性代数时,往往感到抽象难懂,对基本概念及定理结论在理解上感到困难;对如何把所学内容具体应用到解题上感到缺少思路,难以下手;对于课程结束时的考试和考研的相关内容把握不准,迫切需要得到具体指导与帮助。本书就是为解决这些问题而编写的。

本书按照同济大学数学教研室编的最新版《线性代数》(第四版)的自然章编排,每一章由以下六部分内容构成:

一、考点研究——编写该部分的目的主要是使读者明确本章的重点、常考点以及应掌握的程度。编写中参考了《全国硕士研究生入学统一考试——数学考试大纲》和西北工业大学等国内重点高等学校制订的《线性代数教学大纲》,并将其内容加以细化和归纳,使学生能够正确把握教学、学习和考试的要求。

二、重要结论与公式——本部分将相应章节的内容进行了简明扼要的叙述、归纳和总结,部分内容列表或借助框图直观地进行了说明。对于有些内容未按章节顺序给出,这是由于线性代数的知识前后联系紧密,相互渗透,集中给出有利于加深读者对基本概念、公式、定理等重点内容的理解和正确应用。

三、主要方法——本部分给出了相应章节一些主要计算过程的描述,以使读者熟悉具体计算步骤,提高动手能力。

四、常考题型及考研典型题精解——精选了线性代数中具有代表性的部分典型例题,通过对典型例题的解题分析,归纳出线性代数中一些问题的解决方法和技巧,使读者可以举一反三、触类旁通。对于那些需要了解更多典型题的读者,可参阅《线性代数典型题分析解集》(第2版)(西北工业大学出版社,2000)。

五、课后习题全解——本部分给出了《线性代数》(同济大学第四版)各章习题的全部解答。由于线性代数中解题方法的多样性,对于具有多种解法或答案的习题,一般只给出一种解法或答案。

六、学习效果两级测试题及答案——本部分根据线性代数课程考试和考研内容,精选了适量的自测题,并附有答案和部分提示。读者可以通过这些测试题进一步掌握解题要领,巩固和加深对基本概念的理解,增强解决问题的能力,并检验自己对所学知识掌握的程度。

为了帮助读者了解并适应考试,书末附录中提供了两套线性代数课程考试真题及解答。建议读者在动手做过习题后,再参阅答案。

本书由徐仲、陆全分工合作完成。书中的疏漏和不妥之处,敬请读者指正。

编 者

2004年11月于西北工业大学

目 录

第一章 行列式	1
一、考点研究	1
二、重要结论与公式	2
三、主要方法	7
四、常考题型及考研典型题精解	8
五、课后习题全解(习题一)	18
六、学习效果两级测试题及答案	33
第二章 矩阵及其运算	37
一、考点研究	37
二、重要结论与公式	39
三、主要方法	43
四、常考题型及考研典型题精解	45
五、课后习题全解(习题二)	54
六、学习效果两级测试题及答案	74
第三章 矩阵的初等变换与线性方程组	79
一、考点研究	79
二、重要结论与公式	81
三、主要方法	84
四、常考题型及考研典型题精解	86
五、课后习题全解(习题三)	97
六、学习效果两级测试题及答案	120

第四章 向量组的线性相关性	126
一、考点研究	126
二、重要结论与公式	128
三、主要方法	131
四、常考题型及考研典型题精解	135
五、课后习题全解(习题四)	147
六、学习效果两级测试题及答案	178
第五章 相似矩阵及二次型	187
一、考点研究	187
二、重要结论与公式	190
三、主要方法	195
四、常考题型及考研典型题精解	199
五、课后习题全解(习题五)	210
六、学习效果两级测试题及答案	245
第六章 线性空间与线性变换	255
一、考点研究	255
二、重要结论与公式	256
三、主要方法	257
四、常考题型及考研典型题精解	258
五、课后习题全解(习题六)	263
六、学习效果两级测试题及答案	271
附录 线性代数考试真题	274
考试真题 A	274
考试真题 B	276
考试真题 A 解答	277
考试真题 B 解答	282

第一章 行 列 式

行列式是线性代数中的重要工具,在求解线性方程组、求逆矩阵、判断向量组的线性相关性、求矩阵的特征值、判断二次型的正定性等方面都要用到.

一、考 点 研 究

1. 考试内容与考试要求

考试内容	行列式的概念和基本性质 行列式按行(列)展开定理
考试要求	(1) 了解 n 阶行列式的概念,掌握行列式的性质. (2) 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式. (3) 会用克拉默(Cramer)法则.

2. 考点分析

行列式是代表某个数的一个记号.计算行列式即是把这个记号所代表的数具体计算出来.行列式的计算方法很多,技巧性较强,有关行列式的习题也可以编得很难,但这不一定是考点.在考研试题的线性代数部分中,纯粹考行列式的题很少,且以低阶行列式的计算为主,少数的 n 阶行列式也容易计算.因此,读者应该以熟悉行列式的性质、掌握行列式的基本计算方法为重点,对于 3,4

阶行列式能熟练计算,而一般 n 阶行列式计算只要适当要求即可,不必很难.

二、重要结论与公式

1. 排列的性质

性质 1	交换排列中任意两个数,将改变排列的奇偶性.
性质 2	n 个数 $1, 2, \dots, n$ 可以构成 $n!$ 个不同的 n 阶排列,其中奇、偶排列的个数各占 $\frac{n!}{2}$.
性质 3	任一 n 阶排列 $p_1 p_2 \dots p_n$ 与标准排列 $12 \dots n$ 都可以经过一系列对换互变,且所做对换的次数与排列 $p_1 p_2 \dots p_n$ 有相同的奇偶性.

2. 对角线法则

对于 2 阶与 3 阶行列式,可以采用对角线法则来记它们所代表的数:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underline{a_{11}a_{22}} - \underline{a_{12}a_{21}}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{a_{11}a_{22}a_{33}} + \underline{a_{12}a_{23}a_{31}} + \underline{a_{13}a_{21}a_{32}} - \underline{a_{13}a_{22}a_{31}} - \underline{a_{12}a_{21}a_{33}} - \underline{a_{11}a_{23}a_{32}}$$

即实线上 2 个(3 个)元素的乘积取正号,虚线上 2 个(3 个)元素的乘积取负号,再求其代数和就是行列式的值.

3. 一些特殊行列式的值

(1) 上(下)三角行列式等于其主对角线上元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

(2) 次三角行列式的值等于次对角线元素的乘积并添加适当符号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \ddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

(3) 分块三角行列式可化为低阶行列式的乘积

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} & * & \cdots & * \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} * & \cdots & * & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{nm} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

(4) 范德蒙(Vandermonde)行列式直接套用公式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{\substack{n \geq i > j \geq 1}} (x_i - x_j) =$$

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \times$$

$$(x_3 - x_2) \cdots (x_n - x_2) \times$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \times$$

$$(x_n - x_{n-1})$$

4. 行列式的基本性质

性质 1 行列式与其转置行列式的值相等.

性质 2 行列式中某一行(列)如果有公因数 k , 则 k 可以提到行列式符号外. 特别地, 若行列式中某行(列)元素全是零, 则行列式的值为零.

性质 3 对换行列式中某两行(列)的位置, 行列式的值改变符号. 特别地, 如两行(列)元素对应相等或成比例, 则行列式的值是零.

性质 4 如果行列式中某行(列)的每个元素都是两个数的和, 则这个行列式可以拆成两个行列式的和, 这两个行列式分别以

这两组数作为行(列),其余各行(列)与原行列式相同.

性质 5 把行列式某行(列)的 k 倍加至另一行(列),行列式的值不变.(在行列式计算中,往往先用这条性质作恒等变形,以期简化计算.)

5. 行列式按行(列)展开公式

$$\text{设 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ 则}$$

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

其中

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是 a_{ij} 的代数余子式.

6. 有关行列式的重要公式

行列式一行(列)元素与另一行(列)元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j)$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j)$$

7. Cramer 法则

定理 对于 n 个未知数 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

如果系数行列式 $D = |a_{ij}| \neq 0$, 则方程组有惟一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中 D_j 是把 D 中第 j 列换成常数项所得到的行列式, 即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

推论 含 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解 (即无穷多解) 的充分必要条件是它的系数行列式 $D = 0$.

注 该推论的充分性由克拉默法则即得, 而必要性由第三章的齐次线性方程组有无穷多解的判定条件得到.

三、主要方法

除了较简单的行列式可以利用定义直接计算外, 一般行列式

计算的基本方法是：

方法一 利用行列式的性质对行列式做恒等变形化为上(下)三角行列式或次三角行列式,从而直接求得其值.

方法二 利用按行(列)展开定理降低行列式的阶数.但在展开之前往往先通过对行列式恒等变形,使得新行列式的某一行(列)中有较多的零,再按该行(列)展开.

在计算行列式时,应根据行列式的特点和元素的规律性,采取适当的次序和步骤来进行,因此,首先观察和研究行列式元素的规律性是重要的.

计算行列式的常用技巧有三角化法、升阶(或加边)法、递推法、数学归纳法等.

四、常考题型及考研典型题精解

例 1-1 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ & a_2 & b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & & & & a_n \end{vmatrix}$$

分析 对于形如  的所谓两条线的行列式,可直接展开降阶,再利用三角或次三角行列式的结果直接

计算.

解 按第 1 列展开得

$$D_n = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & a_n \end{vmatrix} + b_n (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} b_1 & & & \\ a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n + (-1)^{n-1} b_1 b_2 \cdots b_n$$

例 1-2 计算 $2n$ 阶行列式

$D_{2n} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

分析 这是形如 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的所谓两条线行列式, 可直接展开得到递推公式.

解 按第 1 行展开得

$$\begin{aligned}
 D_{2n} &= a \begin{vmatrix} a & & & & b & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \\ 0 & & & & & d \end{vmatrix} + \\
 &b(-1)^{1-2n} \begin{vmatrix} 0 & a & & & & b \\ & & \ddots & & & \ddots \\ & & & a & b & \\ & & & c & d & \\ & c & & & & \ddots \\ & & & & & d \\ c & & & & & 0 \end{vmatrix} = \\
 &ad \begin{vmatrix} a & & & & b \\ & \ddots & & & \ddots \\ & & a & b & \\ & & c & d & \\ & \ddots & & & \ddots \\ c & & & & & d \end{vmatrix} - \\
 &bc(-1)^{(2n-1)-1} \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & & \ddots \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix} = \\
 &(ad - bc)D_{2n-2}
 \end{aligned}$$