因式分解及其应用

郁李編

新知識出版社

因式分解及其应用

郁　　李編

楊荣祥校

新知識出版社

一九五六年·上海

因 式 分 解 及 其 应 用

郁　　李 編
楊 榮 祥 校

*

新 知 識 出 版 社 出 版
(上 海 湖 南 路 9 号)
上海市書刊出版業營業許可証出 015 号
上海集成印刷厂印刷　新華書店上海發行所总經售

*

開本：787×1092　1/32　印張：3 9/16　字數：81,000
1956年6月第1版　1956年6月第1次印刷
印數：1—75,000 本

統一書号：13076・44
定　　价：(7) 0.32 元

編 者 的 話

因式分解在代數式的恒等变换中占着重要的地位。由于代數式的不同，分解的方法也有所不同。本册主要是給初高中同学及自学靑年作为学習因式分解時課外參考鑽研之用。

本册采用的題材系根据中学數学教学大綱草案所选定，把可以分解因式的代數式分成若干類型，每一類型举出典型的范例，由簡而繁循序前進。關于应用方面也举例較多，說明較詳。所有練習題，希望讀者选擇演算，以确能熟練为止。

編者学識有限，缺點难免，希望讀者予以批評和指正。編寫本册時，承楊棠祥同志提供主要材料和細心校審，謹致謝意。

郁　李　一九五六年三月

目　錄

一 因式分解的作用

从算術 $2\times3\times7=42\cdots\cdots(1)$, $6\times7=42\cdots\cdots(2)$, $14\times3=42\cdots\cdots(3)$ 这样三式中数目的关系，通常把2、3、7、6、14叫做42的因數，用語文表示有如下兩条：

(1) 凡兩个或兩个以上的数目相乘，得積，相乘的每一个数目都是乘積的因数。

又2、3、7、6、14，都能整除42的。

(2) 凡能整除某数的数目，都是某数的因数。

求出42的因数是2、3、7、6、14，叫做因数分解法。

因数分解的作用是：

〔一〕 化簡分数。如 $\dfrac{42}{105}=\dfrac{2\times3\times7}{5\times3\times7}=\dfrac{2}{5}$ 分解分子分母中的因数，約去公因数3和7。

計算分数的乘除法時，通常約去分子分母的公因数，是要用因数分解的。

〔二〕 分母不同的分数，加或減時，先分解分母的因數，求几个分母的小公倍数，通分使分母相同，然后加減分子。

如：
$$\frac{1}{10}+\frac{11}{15}=\frac{1}{2\times5}+\frac{11}{3\times5}=\frac{1\times3+11\times2}{2\times5\times3}$$
$$=\frac{3+22}{30}=\frac{25}{30}=\frac{5}{6}.$$

又如：
$$\frac{11}{70}-\frac{13}{105}=\frac{11}{2\times5\times7}-\frac{13}{3\times5\times7}$$

$$=\frac{11\times3-13\times2}{2\times5\times7\times3}=\frac{33-26}{210}=\frac{7}{210}=\frac{1}{30}.$$

代数因式分解的作用也是这样。当然还有别的作用，我們还会在以后学到。

从 $2a\cdot3a^4\cdot(m+n)=6a^5(m+n)$ 中，$2a$、$3a^4$、$m+n$ 都是 $6a^5(m+n)$ 的因式，而 $2a$、$3a^4$、$m+n$ 都能整除 $6a^5(m+n)$ 的。

又如 $6a$、$3a^2$、$2a^5$、……（这是任意举出的），都能整除 $6a^5(m+n)$，也都是它的因式。

当两个以上的式子相乘，得積，相乘的式子都是乘積的因式，所以某式的因式必能整除某式，凡能整除某式的式子，就是某式的因式。

求出一个式子的因式叫做因式分解法。

分解一个多項式的因式必須分成單項式和不能再分解的多項式。

二　提出公因式（即提單項因式）

設多項式 $a+b-c$ 乘以單項式 m，由乘法分配律，得

$$(a+b-c)\cdot m=am+bm-cm\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(A)}$$

左边 $a+b-c$ 和 m 都是右边 $am+bm-cm$ 的因式，可以互換(A)式左右兩边的式子寫成

$$am+bm-cm=(a+b-c)\cdot m.$$

由乘法交換律：交換被乘数和乘数的位置，乘積之值不变。

$$\because\qquad (a+b-c)\cdot m=m\cdot(a+b-c).$$

$$\therefore\qquad am+bm-cm=m(a+b-c).$$

例一　分解 $am+bm-cm$ 的因式。

式中各項都有 m，就是公有的單項因式 m，提出寫于括号的

外面，用 m 來除各項，如 $(am+bm-cm)\div m=a+b-c$，所得的商 $a+b-c$ 寫于括号的里面，分解本題的因式如下：

$$am+bm-cm=m(a+b-c).$$

例二　分解 $18x^5-12x^4y+6x^3$ 的因式。

取数字系数的最大公約数，联合各項公有文字中次数最低的文字，就是單項式的公因式。

本題各項数字系数 18、12、6 的最大公約数是 6，可以整除三个系数。各項公有文字 x^5、x^4、x^3，其中次数最低的是 x^3，可以整除三項文字。联合成 $6x^3$，可知 $6x^3$ 是这个式子的公因式。用 $6x^3$ 除各項。

分解本題的因式如下：

$$18x^5-12x^4y+6x^3=6x^3(3x^2-2xy+1).$$

注意：分解 a^3-ab+a 的因式。

$a^3-ab+a=a^3-ab+1\cdot a=a(a^2-b+1)$………对的。

如果 $a^3-ab+a=a(a^2-b)$ 就錯了。末項 a 除以 a 应該得 1，今沒有 1，是減去 a 了。初学者要特别留心。

例三　分解 $4a(m-n)+(m-n)$ 的因式。

本題兩个括号 $(m-n)$，文字和符号都同，作为一个因式，則題式为 $4a$ 个 $(m-n)$ 加 1 个 $(m-n)$，等于 $(4a+1)$ 个 $(m-n)$，即 $(4a+1)(m-n)$，或 $(m-n)(4a+1)$.

分解本題的因式如下：

$$4a(m-n)+(m-n)=4a(m-n)+1\cdot(m-n)$$

$=(4am-4an)$

$$=(m-n)(4a+1).$$

例四　分解 $a(x-2)+b(x-2)+(2-x)$ 的因式。

本題与例三相類似。式中三个括号，文字数字都同，但 $(2-x)$ 和 $(x-2)$ 符号完全不同。可把 $(2-x)$ 換成 $-(x-2)$，因为 $+(2-x)=-x+2=-1\cdot(x-2)=-(x-2)$，

即$+(2-x)=-(x-2)$. 所以文字和數字都同而符号不同，只要括号前变号，即可換成相同。

如果是$-(2-x)$，則換成 $+(x-2)$。

因为$-(2-x)=-1\cdot(2-x)=-2+x=+x-2=+(x-2)$.

分解本題的因式如下：

$$a(x-2)+b(x-2)+(2-x)=a(x-2)+b(x-2)-1\cdot(x-2)$$
$$=(x-2)(a+b-1).$$

例五 分解 $24x^{5n+3}-40x^{n+2}$ 的因式。

本題提出公因式 $8x^{n+2}$，用它除 $24x^{5n+3}$. 除法是同文字的指數相減，从被除式 x 的指數 $5n+3$ 减去除式 x 的指數 $n+2$，得 $4n+1$. 合成 $3x^{4n+1}$.

分解本題的因式如下：

$$24x^{5n+3}-40x^{n+2}=8x^{n+2}(3x^{4n+1}-5).$$

練 習 一

分解下列各式的因式：

1. (1) $an-bn+cn$; (2) $ax+ay-az$.

$=n(a-b+c)$　　$=a(x+y-z)$

2. (1) $12a^5-18a^3b-6a^2$; (2) $3m-15m^2+6m^4$;

$=6a^2(2a^3-3ab-1)$　　$=3m(1-5m+2m^3)$

(3) $x^3y^2+x^2y+y$; (4) $ay-aby-acy$.

$=y(x^3y+x^2+1)$　　$=ay(1-b-c)$

3. (1) $6a(m-n)+(m-n)$; (2) $6a(m+n)-(m+n)$;

$=(m-n)(6a+1)$　　$=(m+n)(6a-1)$

(3) $2(m+n)-3a(m+n)$; (4) $(m+n)+7a(m+n)$.

$=(m+n)(2-3a)$　　$=(m+n)(1+7a)$

4. (1) $m(n-2)+p(n-2)+(2-n)$;

$=(n-2)(m+p+1)$

(2) $x(p-a)+y(a-p)-z(p-a)$.

$=(p-a)(x-y-z)$

√ **5.** (1) $24x^{3n+4}-30x^{2n+1}$; (2) $9x^{2m-3}+18x^{m-1}$;

$=6x^{2n+1}(4x^{n+3}-5)$　　$=9x^{m-1}(x^{m-2}+2)$

(3) $7a^{n+2}+35a^n$; (4) $a^nb^{2n}-a^nb^n$.

$=7a^n(a^2+5)$　　$=a^nb^n(b^2-1)$

答 案

1. (1) $n(a-b+c)$; (2) $a(x+y-z)$.

2. (1) $6a^2(2a^3-3ab-1)$; (2) $3m(1-5m+2m^3)$;

(3) $y(x^3y+x^2+1)$; (4) $ay(1-b-c)$.

3. (1) $(m-n)(5a+1)$; (2) $(m+n)(6a-1)$;

(3) $(m+n)(2-3a)$; (4) $(m+n)(1+7a)$.

4. (1) $(n-2)(m+p-1)$; (2) $(p-a)(x-y-z)$.

5. (1) $6x^{2n+1}(4x^{n+3}-5)$; (2) $9x^{m-1}(x^{m-2}+2)$;

(3) $7a^n(a^2+5)$; (4) $a^nb^n(b^n-1)$.

三　分羣分解法

如果一个式子有四項或六項，而每兩項或三項有公因式，那末每兩項或三項加括号为一群，分成兩群或三群，再由各群提出公因式。

分群時，常常要插入+(　)或-(　)，插入+(　)，各項不变号；但是**插入**-(　)，各項要变号："+"**变成**"-"，"-"**变成**"+"，切不可只变第一項，不变以后各項。試看下面的式子：

數字式　$-9-5+3=-14+3=-11$.

插入-(　)　$-9-5+3=-(9+5-3)$

$=-(11)=-11$. ……………对的

如　果　$-9-5+3=-(9-5+3)$

$=-(7)=-7$. ………………錯的

文字式　$-a-b+c=-(a+b-c)$. ……………对的

如　果　$-a-b+c=-(a-b+c)$. ……………錯的

初学者当插入-(　)時，常常只变第一項的符号，不把各項完全变号，因而發生錯誤，必須特別留心。

例一　分解 $3ax-6bx-ay+2by$ 的因式。

本題有四項，順次分兩項为一群。

如　$3ax-6bx$ 中，有公因式 $3x$，可分成 $3x(a-2b)$.

又　$-ay+2by$ 中，有公因式 y，可分成 $-y(a-2b)$.

所以得分解本題的因式如下：

$$\begin{aligned}3ax-6bx-ay+2by&=(3ax-6bx)-(ay-2by)\\&=3x(a-2b)-y(a-2b)\\&=(a-2b)(3x-y).\end{aligned}$$

又式：如果交換第二項第三項，也可進行分解如下：

$$\begin{aligned}3ax-6bx-ay+2by&=3ax-ay-6bx+2by\\&=(3ax-ay)-(6bx-2by)\\&=a(3x-y)-2b(3x-y)\\&=(3x-y)(a-2b).\end{aligned}$$

例二　$$\begin{aligned}a^2-ab+b-a&=(a^2-ab)+(b-a)\\&=a(a-b)+1\cdot(b-a)\\&=a(a-b)-1\cdot(a-b)\\&=(a-b)(a-1).\end{aligned}$$

$(b-a)$与$(a-b)$文字同而符号不同，要变号使它相同。

有時候要把第二項向右調动，才能得到結果，如下例：

例三　分解 $21a^2+10xy-35ax-6ay$ 的因式。

本題有四項，順次分兩項为一群，如 $21a^2+10xy$……(A)沒有公因式，而 $-35ax-6ay$ 可分成 $-a(35x+6y)$，括号中与(A)式不同，得不到結果。只要把第二項 $+10xy$ 調到右面第四項，就能分成兩群可提公因式。

$$\begin{aligned}21a^2+10xy-35ax-6ay&=21a^2-35ax-6ay+10xy\\&=(21a^2-35ax)-(6ay-10xy)\\&=7a(3a-5x)-2y(3a-5x)\\&=(3a-5x)(7a-2y).\end{aligned}$$

例四　分解 $ax^2-bx^2+bx-ax-a+b$ 的因式。

本題有六項，順次每兩項为一群，分解如下：

$$
\begin{aligned}
& ax^2-bx^2+bx-ax-a+b \\
&= (ax^2-bx^2)+(bx-ax)-(a-b) \\
&= x^2(a-b)+x(b-a)-(a-b) \\
&= x^2(a-b)-x(a-b)-1\cdot(a-b) \\
&= (a-b)(x^2-x-1).
\end{aligned}
$$

又式：如果把有 a 字的三項合作一群，有 b 字的三項合作一群，也可分解如下：

$$
\begin{aligned}
& ax^2-bx^2+bx-ax-a+b \\
&= (ax^2-ax-a)-(bx^2-bx-b) \\
&= a(x^2-x-1)-b(x^2-x-1) \\
&= (x^2-x-1)(a-b).
\end{aligned}
$$

練　習　二

分解下列各式的因式：

1. (1) $2ax-6bx-ay+3by$;
   $=2x(a-3b)-y(a-3b)=(a-3b)(2x-y)$
   (2) $2ax-bx-6ay+3by$;
   $=2a(x-3y)-b(x-3y)=(2a-b)(x-3y)$
   (3) $ax-ay-x+y$;
   $=a(x-y)-(x-y)=(x-y)(a-1)$
   (4) $ac+bc+ad+bd$.
   $=c(a+b)+d(a+b)=(a+b)(c+d)$

2. (1) $a^2-ab-b+a$;
   $=a(a-b)-(b-a)=(b-a)(a-1)$
   (2) $x-y-xy+x^2$;
   $=(x-y)-x(y-x)$
   (3) $ax-3a-3b+bx$;
   $=x(a+b)-3(a+b)=(a+b)(x-3)$
   (4) $x-ax-ay+y$.
   $=-a(x+y)(x+y)=(x+y)($

3. (1) $10a^2+21xy-15ax-14ay$;
   $=5a(2a-3x)+7y(3x-2a)$
   (2) $6a^2-35xy+10ay-21ax$;
   $=7x(5y-3a)($
   (3) $m^2+n-m-mn$;
   $=m(m-n)(n-m)=(m-n)(m-1)$
   (4) $a-bx-ax+b$.
   $=-x(b+a)(a+b)=(a+b)(1-x)$

4. (1) $ax^2-bx^2+bx-ax+a-b$;
   $=x^2(a-b)-x(b-a)(a-b)=(a-b)(x^2-x+1)$
   (2) $ax^2+bx^2-bx-ax-a-b$;
   $=x^2(a+b)-x(b+a)-1(a+b)=(a+b)(x^2-x-1)$
   (3) $ax^2-bx^2-bx+ax+a-b$;
   $=x^2(a-b)+x(b+a)+1(a-b)=(a+b)(x^2+x+1)$
   (4) $ax^2-bx^2+ax-bx+b-a$.
   $=x^2(a-b)+x(a-b)+1(b+a)=(a+b)(x^2+x+1)$

答　　案

1. (1) $(a-3b)(2x-y)$;　　(2) $(2a-b)(x-3y)$;
   (3) $(x-y)(a-1)$;　　(4) $(a+b)(c+d)$.
2. (1) $(a-b)(a+1)$;　　(2) $(x-y)(1+x)$;
   (3) $(x-3)(a+b)$;　　(4) $(1-a)(x+y)$.
3. (1) $(2a-3x)(5a-7y)$;　　(2) $(3a+5y)(2a-7x)$;
   (3) $(m-1)(m-n)$;　　(4) $(1-x)(a+b)$.
4. (1) $(a-b)(x^2-x+1)$;　　(2) $(a+b)(x^2-x-1)$;
   (3) $(a-b)(x^2+x+1)$;　　(4) $(a-b)(x^2+x-1)$.

四　完全三項平方式　兩数平方的差

算術数的平方，如 7^2 或 $7\times7=49$，通常把 49 叫做 7 的平方，把 7 叫做 49 的平方根。

一数自乘的乘積叫做这数的平方，自乘的数叫做乘積的平方根。

一位数的平方表

數	1	2	3	4	5	6	7	8	9
平　方	1	4	9	16	25	36	49	64	81

二项式的平方

(一)

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

(二)

$$\begin{array}{r} a-b \\ a-b \\ \hline a^2-ab \\ -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

兩数和与差的乘積

$a_n=a_1(n-1)d$

(三)

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2\qquad\quad -b^2 \end{array}$$

$(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2$

$(a-b)(a+b)=a^2-ab+ab-b^2$

00158

由是得公式如下:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2.$$

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2.$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

二項式的平方,如 $a^2\pm2ab+b^2$,叫做**完全三項平方式**。

倒轉上面的式子,寫成分解完全三項平方式的因式如下:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)(a+b)=(a+b)^2.$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)(a-b)=(a-b)^2.$$

$$a^2-b^2\qquad=(a+b)(a-b).$$

或寫成三个公式: $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$. …………**公式一**

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$. …………**公式二**

兩数平方的差　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. …………**公式三**

(1) 如果三項式有兩項是兩数平方的和, 又一項是加(或減)該兩数乘積的兩倍,就是完全三項平方式,可分解为該兩数之和(或差)的平方。

(2) 如果二項式是兩数平方之差, 可分解为該兩数之和与差的乘積。

例一　分解 $16x^2+56xy+49y^2$ 的因式。

本題有 $16x^2=(4x)^2$, $49y^2=(7y)^2$, $+56xy=+2(4x)(7y)$,这是完全三項平方式。

得分解因式如下:

$$16x^2+56xy+49y^2=(4x)^2+2(4x)(7y)+(7y)^2$$
$$=(4x+7y)^2.$$

例二　分解 $25x^6-90x^5+81x^4$ 的因式。

本題有　$25x^6=(5x^3)^2$,　$81x^4=(9x^2)^2$,

$$-90x^5=-2(5x^3)(9x^2),$$

这是完全三項平方式。

得分解因式如下:

$$25x^6-90x^5+81x^4=(5x^3)^2-2(5x^3)(9x^2)+(9x^2)^2$$
$$=(5x^3-9x^2)^2.$$

例三 分解 $64x^6-9y^4$ 的因式。

本題有 $64x^6=(8x^3)^2$, $-9y^4=-(9y^4)=-(3y^2)^2$, 这是兩数平方之差。

得分解因式如下:

$$64x^6-9y^4=(8x^3)^2-(3y^2)^2=(8x^3+3y^2)(8x^3-3y^2).$$

二項式是平方差,有一項是平方数,另一項是括号的平方,或二項都是括号的平方,可把括号看作一个文字。如下例:

例四 $100-(3a+7b)^2=(10)^2-(3a+7b)^2$

$$=[10+(3a+7b)][10-(3a+7b)]$$
$$=(10+3a+7b)(10-3a-7b).$$

注意: 脱去$-(\ \ )$,各項要变号,如$-(3a+7b)=-3a-7b$.

例五 $49(3x-2y)^2-25(x+y)^2$

$$=[7(3x-2y)+5(x+y)][7(3x-2y)-5(x+y)]$$
$$=[21x-14y+5x+5y][21x-14y-5x-5y]$$
$$=(26x-9y)(16x-19y).$$

練 習 三

分解下列各式的因式:

1. (1) $9x^2+24xy+16y^2$;
$=(3x)^2+2\times3x\times4y+(4y)^2=(3x+4y)^2$
(2) $36x^2+60xy+25y^2$.
$=(6x+5y)^2$

2. (1) $25a^6-70a^4+49a^2$;
$=(5a^3-7a)^2$
(2) $81a^4-36a^5+4a^6$.
$=(9a^2-2a^3)^2$

3. (1) $49x^4-64y^4$;
$=(7x^2+8y^2)(7x^2-8y^2)$
(2) $4x^6-25y^6$
$=(4x^3+5y^3)(4x^3-5y^3)$

4. (1) $36-(2x+5y)^2$.
$=(6+2x+5y)(6-2x-5y)$
(2) $9a^2-(4b-7c)^2$.
$=(3a+4b-7c)(3a-4b+7c)$

5. (1) $4(3m-5n)^2-9(m+n)^2$;
$=[2(3m-5n)+3(m+n)][2(3m-5n)-3(m+n)]=(9m-7n)(3m$ [illegible]$)$
(2) $25(2m+3n)^2-16(m-n)^2$.
$=[5(2m+3n)+4(m-n)][5(2m+3n)-4(m-n)]$
$=[10m+15n+4m-4n][10m+15n-4m+4n]$
$=(14m+11n)(6m+19n)$

6. (1) $ab-bc-ad+cd$;

$= b(a-c)-d(a-c)=(a-c)(b-d)$

(2) $ax-b+a-bx$;

$= x(a-b)+(a-b)=(a-b)(x+1)$

(3) $3ax-3a+2b-2bx+cx-c$;

$= 3a(x-1)+2b(1-x)+c(x-1)=(3a-2b+c)(x-1)$

(4) $mn+2-2m+pn-2p-n$.

$=$

答　　案

1. (1) $(3x+4y)^2$;　　(2) $(6x+5y)^2$.

2. (1) $(5a^3-7a)^2$;　　(2) $(9a^2-2a^3)^2$.

3. (1) $(7x^2+8y^2)(7x^2-8y^2)$;　　(2) $(2x^3+5y^3)(2x^3-5y^3)$.

4. (1) $(6+2x+5y)(6-2x-5y)$;

(2) $(3a+4b-7c)(3a-4b+7c)$.

5. (1) $(9m-7n)(3m-13n)$;

(2) $(14m+11n)(6m+19n)$.

6. (1) $(a-c)(b-d)$;　　(2) $(x+1)(a-b)$;

(3) $(x-1)(3a-2b+c)$;　　(4) $(n-2)(m+p-1)$.

四項式如下例六，有三項是完全平方，加括号，使成二項式的平方，而另一項是"－"号，絕对値是平方数，即得兩式平方的差。看下面例題：

例六　分解 $9a^2-30ab+25b^2-49c^2$ 的因式。

本題把 $-30ab$ 配合 $9a^2+25b^2$，可成二項式的平方。

$$\begin{aligned}
&9a^2-30ab+25b^2-49c^2\\
&\quad=(9a^2-30ab+25b^2)-49c^2\\
&\quad=(3a-5b)^2-(7c)^2\\
&\quad=(3a-5b+7c)(3a-5b-7c).
\end{aligned}$$

例七　分解 $100x^2-36y^2+12yz-z^2$ 的因式。

本題把 $+12yz$ 配合 $-36y^2-z^2$，可成二項式的平方。

$$
\begin{aligned}
&100x^2-36y^2+12yz-z^2\\
&\quad=100x^2-(36y^2-12yz+z^2)\\
&\quad=(10x)^2-(6y-z)^2\\
&\quad=[10x+(6y-z)][10x-(6y-z)]\\
&\quad=(10x+6y-z)(10x-6y+z).
\end{aligned}
$$

六項式如下例八，可以合成兩个完全三項平方式，加括号，第二括号前是“—”号，即得兩个二項式平方的差。看例八。

例八 分解 $x^2+y^2-9z^2-1-2xy-6z$ 的因式。

本題把 $-2xy$ 配合 x^2+y^2，把 $-6z$ 配合 $-9z^2-1$，可成二項式的平方。

$$
\begin{aligned}
&x^2+y^2-9z^2-1-2xy-6z\\
&\quad=x^2-2xy+y^2-9z^2-6z-1\\
&\quad=(x^2-2xy+y^2)-(9z^2+6z+1)\\
&\quad=(x-y)^2-(3z+1)^2\\
&\quad=[(x-y)+(3z+1)][(x-y)-(3z+1)]\\
&\quad=(x-y+3z+1)(x-y-3z-1).
\end{aligned}
$$

例九 分解 $a^2-a+b-b^2$ 的因式。

本題順次分兩項為一群，$a^2-a+b-b^2=a(a-1)+b(1-b)$，得不到結果；如果把 $-b^2$ 調到第二項，就能得到結果。

$$
\begin{aligned}
a^2-a+b-b^2&=a^2-b^2-a+b\\
&=(a^2-b^2)-(a-b)\\
&=(a+b)(a-b)-(a-b)\\
&=(a-b)(a+b-1).
\end{aligned}
$$

例十 $xz+yz-x^2-2xy-y^2$

$$
\begin{aligned}
&\quad=(xz+yz)-(x^2+2xy+y^2)\\
&\quad=z(x+y)-(x+y)^2\\
&\quad=(x+y)[z-(x+y)]\\
&\quad=(x+y)(z-x-y).
\end{aligned}
$$