

ZHONGXUEWULIWENTI
SIWEIFANGFA

G634.703

中学物理问题 思维方法

许洪生 王铮 主编

陕西科学技术出版

中学物理 问题思维方法

许洪生 王 铮 主编

倪津彬 副主编

陕西科学技术出版社

中学物理问题思维方法

许洪生 王 尊 主编

陕西科学技术出版社出版发行

(西安北大街131号)

新华书店经销 西安向阳印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 8.5印张 18万字

1990年3月第1版 1990年3月第1次印刷

印数：1—7.000

ISBN 7—5369—0392—8/O·12

定 价：2.95元

主 编: 许洪生 王 铮

编写人员: 徐卫东 许 林 陈 仁 许亚平

主 审: 倪汉彬

制 图: 王 权

序 言

在我们过去近二十年的数理教学生涯中，一直追求着一个美好的愿望——把我们所熟悉的数学思维方法注入物理知识的大厦之中，为培养中学生应用数学方法解决物理问题的能力开辟一条小径。今天，《中学物理问题思维方法》一书正式进入中学生课外读物的行列。我们希望，这本书能成为中学生的益友，并陪伴着有志者度过紧张而又美好的中学时光。

《中学物理问题思维方法》一书的编写，应用中学生所熟知的数学方法，对中学物理中的概念描述、规律应用、实验设计进行了广泛探讨与逐步深化。它的编写，旨在为中学物理与数学之间架设一座学科知识之间的桥梁，为结束中学教学中数理分割的状态而进行一些尝试。

在《中学物理问题思维方法》一书的编写过程中，苏州大学物理系副教授倪汉彬审阅了全稿，《江苏教育》杂志社总编陆铭德，以及王增光，金字平、曾俊老师提出了许多宝贵意见，并给予了热情支持，在此一并致谢。

编 者

1989年1月

目 录

序言

第一章	逼近与极限	(1)
第一节	从“即时速度的研究”看物理中的逼近与极限.....	(1)
第二节	三种逼近法.....	(4)
第三节	逼近与极限在物理中的应用.....	(11)
第二章	极值与最值	(41)
第一节	物理中的极值与最值过程.....	(41)
第二节	解物理极值问题的基本方法.....	(48)
第三节	极值方法的应用.....	(66)
第三章	数 列	(91)
第一节	物理过程中的数列.....	(91)
第二节	物理过程中的典型数列.....	(98)
第三节	数列递推方法的应用.....	(110)
第四章	比与比值	(131)
第一节	比、比例.....	(131)
第二节	比例、比例常数.....	(138)
第三节	比与比例方法在物理中的应用.....	(149)
第五章	矢 量	(168)
第一节	中学物理中常见的矢量.....	(168)
第二节	矢量法则的应用.....	(186)

第六章	图 象	(217)
第一节	物理规律的图象描述.....	(217)
第二节	常见物理图象介绍.....	(225)
第三节	图象应用.....	(234)
练习题参考答案		(262)

第一章 逼近与极限

逼近法是数学中研究极限的基本方法，逼近的方法与极限的概念同是我们认识无限变化过程中事物变化趋势的重要概念。是我们从有限中认识无限，从近似中认识精确，从量变中认识质变的重要手段。下面，我们运用逼近的方法与极限的概念，研究一些物理概念，物理规律和物理实验。

第一节 从“即时速度的研究”看 物理中的逼近与极限

平均速度与即时速度是运动学中的两个重要概念。为了研究物体在某一段位移（或某一段时间）过程中运动的快慢情况，我们引进了平均速度的概念，其数学表达式为：

$$\bar{v} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

我们知道，平均速度只能近似地描述这段位移中运动的快慢情况，而不能准确地描述运动物体在某一点或某一时刻的运动快慢情况。为了能准确地描述物体运动的快慢，我们引入了即时速度的概念。那末，即时速度又怎样测量与表达呢？

即时速度的测量，在物理中的基本方法是：用很短时间内的平均速度去代替这一时刻的即时速度，显然，这是一种

近似。用数学的方法来表达，则为：当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时，

$\bar{v} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ 的极限为 v ，记作

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = v$$

在实验中，有两个问题需要解决：

① Δt 很短，究竟应该多短？

②当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时， $\Delta S \rightarrow 0$ ，怎样测量？

我们用下面的实验来说明这两个问题：

实验：装置如图1—1。小车从光滑的斜面加速滑下，用电磁打点计时器记录小车运动情况。图1—2为记录的纸带。理来研究小车过A点的时即时速度 v_A 。

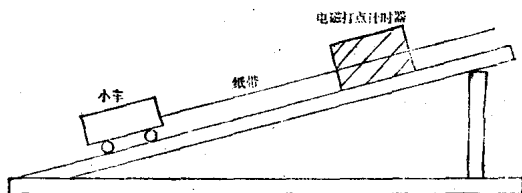


图1—1

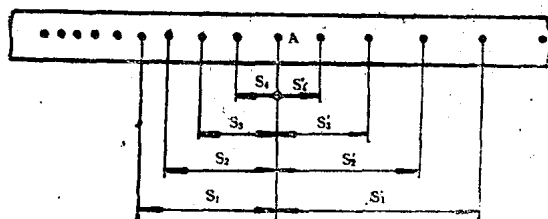


图1—2

现将实验测得的数据填入下表，并将计算所得的 v_1 、 v_2 、 v_3 、 v_4 、 v'_1 、 v'_2 、 v'_3 、 v'_4 描述在数轴上。见图1—3。

时间间隔 \ 物理量	4T	3T	2T	T
S_i (厘米)	3.35	2.6	1.81	0.95
S'_i (厘米)	4.06	3	1.97	0.97
$\bar{v}_A = \frac{\Delta S_i}{\Delta t}$ (厘米/秒)	41.8	43.3	45.3	47.5
$\bar{v}'_A = \frac{\Delta S'_i}{\Delta t'}$ (厘米/秒)	50.8	50	49.25	48.5

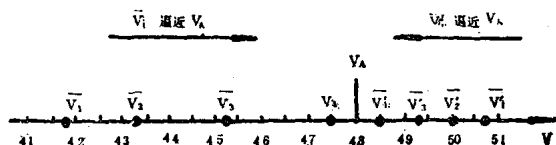


图1—3

其中，取 $\frac{\bar{v}_4 + \bar{v}'_4}{2}$ 为 v_A 的标准值。

从图象中我们可以看到：当 Δt 从 $4T - T$ 的过程中， $\bar{v}_i$ 从左边逼近某一个值， $\bar{v}'_i$ 从右边逼近某一个值，这个值就是我们所要求取的小车通过A点的即时速度 v_A 。为了取得

更精确的结果，我们常用 $\frac{\bar{v}_4 + \bar{v}'_4}{2}$ 或 $\frac{\Delta S_4 + \Delta S'_4}{2T}$ 来表述 v_A ，这就是教科书中所介绍的公式的由来。

上述过程用数学的方式来描述，即当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时，可以认为 Δt 能够无限逼近0，或者认为 Δt 要多短，就可以有多短。此时， $\overline{v_i}$ 或 $\overline{v'_i}$ 可以无限地逼近即时速度 v_A ，其逼近的最终位置为 v_A 。

现在，我们从数学的描述回到物理实验的现实中来，我们可以看到：当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时，实验中却不可能无限地逼近0，而只能是有限地逼近，或者说： Δt 只能是有限短的时间， $\overline{v_i}$ 或 $\overline{v'_i}$ 逼近也只能是有限地逼近，这种逼近要受到测量条件的限制，在上述实验中，由于电磁打点计时器的频率是50赫兹，故 $\Delta t \rightarrow 0$ 可能达到的限度为 $\Delta t = 0.02$ 秒。此时若要求 $\overline{v_i}$ 或 $\overline{v'_i}$ 再逼近一步 v_A ，则必须改善测量仪器的精度，即必须使打点计时器频率提高。由于电磁打点计时器的频率决定于交流电源的频率，因而不可能无限地提高，从而决定了 Δt 只能有限地短， $\overline{v_i}$ 或 $\overline{v'_i}$ 逼近 v_A 只能是有限地逼近。

综上所述：数学中的逼近方法与极限的概念是分析物理问题的重要工具。应该指出：当从抽象的数学回到实际的物理问题中时，必须考虑客观条件的制约，这也是逼近方法与极限概念在应用中必须注意的一个大问题。

第二节 三种逼近法

在物理中，常用的逼近方法有如下几种：

①割线逼近切线；②直线逼近曲线；③矩形逼近梯形。
现以物理问题为例，分别介绍几种逼近的方法。

一、割线逼近切线

我们首先研究下面的实例：

如图1—4，闭合矩形线圈abcd，置于一匀强磁场中。线圈绕垂直于磁感应强度方向的轴 oo' ，以匀角速度 ω 旋转。若起始位置线圈与磁力线平行，则通过线圈平面的磁通量具有如下规律：

$$\phi = \phi_m \sin \omega t$$

其中 $\phi_m = B \cdot S$ [S为矩形线圈面积] 现证明：当通过线圈平面的磁通量为零时，感生电动势达最大值；当通过线圈平面的磁通量达最大值时，感生电动势为零。

为了证明直观起见，我们作 $\phi-t$ 图象，如图1—5。

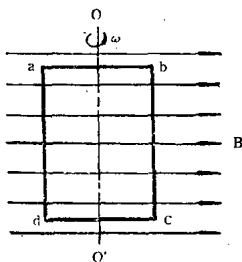


图1—4

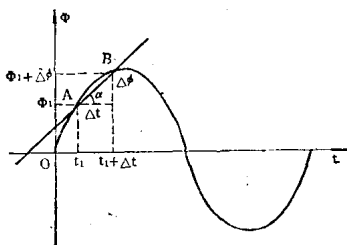


图1—5

在曲线上任取一点 $A(t_1, \phi_1)$ 及 A 附近一点 $B(t_1 + \Delta t, \phi_1 + \Delta \phi)$ 。

下面，我们来考察割线斜率的物理意义：

$$k = \tan \alpha = \frac{\Delta \phi}{\Delta t}$$

根据楞次定律：感生电动势 $\overline{\varepsilon} = \frac{\Delta \phi}{\Delta t}$ ，显然，割线斜率即为线圈在 Δt 时间内的平均电动势，若要求 t_1 时刻的即时电

动势,则必须使 $\Delta t \rightarrow 0$,此时割线AB将绕A点旋转,其极限位置即为通过A点的切线。该切线斜率 k' 即为线圈在 t_1 的即时电动势,用数学方法表述为:

$$\varepsilon = k' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta t}$$

下面我们来计算 ε 的值:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\phi_m \sin \omega(t_1 + \Delta t) - \phi_m \sin \omega t_1}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\phi_m \sin \omega t_1 \cos \omega \Delta t + \phi_m \cos \omega t_1 \sin \omega \Delta t - \phi_m \sin \omega t_1}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\phi_m \sin \omega t_1 (\cos \omega \Delta t - 1) + \phi_m \cos \omega t_1 \sin \omega \Delta t}{\Delta t} \end{aligned}$$

$$= \phi_m \sin \omega t_1 \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\cos \omega \Delta t - 1}{\Delta t} +$$

$$\phi_m \cos \omega t_1 \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \omega \Delta t}{\Delta t}$$

$$\text{因 } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \omega \Delta t}{\omega \Delta t} = 1,$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\cos \omega \Delta t - 1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{\omega}{2} \cdot 2 \sin^2 \frac{\omega \Delta t}{2}}{\frac{\omega \Delta t}{2}} = 0$$

$$\text{故 } \varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \phi_m \omega \cos \omega t_1$$

当线圈平面通过的磁通量为零时,即:

$$\omega t_1 = n\pi \quad (n \text{ 为 } 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$\varepsilon = \phi_m \omega \rightarrow \varepsilon_m$$

当线圈平面通过的磁通量达最大值 ϕ_m 时,即:

$$\omega t_1 = \frac{n\pi}{2}, \quad (n \text{ 为 } 1, 3, 5, \dots)$$

$$e = \phi_m \omega \cos \omega t_1 = 0 \rightarrow e_{m1}$$

上述命题得证。

由上述的证明过程可知：采用割线逼近切线的方法解决物理问题的一般步骤为：

1. 将所研究的物理问题用函数的形式表达出来，并作出对应的函数图象；

2. 过曲线上任意两点 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 作一条割线，当 $x_2 \rightarrow x_1$ 时，割线将绕点 (x_1, y_1) 旋转，其极限位置即为过 (x_1, y_1) 点的切线；

3. 在割线绕点 (x_1, y_1) 旋转的过程中，其割线各量将发生相应的变化，其各量所表述的物理意义将相应地变化，从而完成对特定物理问题的研究。

二、直线逼近曲线

下面我们以曲线运动问题为例来研究直线逼近曲线问题。

当一电子以速度 v 飞入一匀强磁场（见图1—6）。由左手定则可以判定，电子将受到如图所示的洛伦兹力作用作匀速圆周运动。试证明：洛伦兹力在电子运动的过程中不作功。

由功的意义可知： $W = F \cdot S \cdot \cos \alpha$

其中 α 为 F 、 S 之间的夹角。

上述公式是由直线运动推导

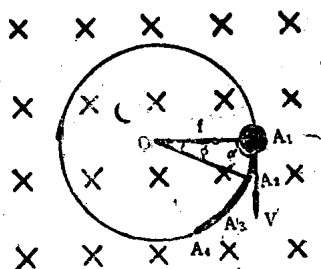


图1—6

而得。当电子在洛伦兹力作用下作匀速圆周运动时，电子的运动路径为一曲线。问题归结为：如何应用直线运动所得的功的公式来处理曲线运动过程中力的做功问题。

我们将电子运动的轨迹分成 n 等份，各分点分别为 A_1 、 A_2 、 A_3 ……，分别连接 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_2A_3}$ 、 $\overline{A_3A_4}$ ……。当 $n \rightarrow \infty$ 时，各分点将足够密集，则弦 $\overline{A_1A_2}$ 将逼近弧 $\widehat{A_1A_2}$ ，弦 $\overline{A_2A_3}$ 将逼近弧 $\widehat{A_2A_3}$ ……。故电子沿直线 $\overline{A_1A_2}$ 运动所作的功 ΔW 将逼近电子沿曲线 $\widehat{A_1A_2}$ 运动所作的功 $\Delta W'$ 。

$$\Delta W = f \cdot \overline{A_1A_2} \cdot \cos\alpha$$

$$\text{当 } \widehat{A_1A_2} \rightarrow 0 \text{ 时, } \quad \angle\phi \rightarrow 0, \quad \angle\alpha = \frac{\pi - \phi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2},$$

$$\cos\alpha \rightarrow 0.$$

$$\text{则 } \Delta W' = \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} f \cdot \overline{A_1A_2} \cdot \cos\alpha = 0$$

由上述推导可知，电子在 $\widehat{A_1A_2}$ 段洛伦兹力所作的功为零。同理，在 $\widehat{A_2A_3}$ 、 $\widehat{A_3A_4}$ ……所作的功也均为零。故可得如下结论：

在电子作圆周运动的过程中，洛伦兹力不作功。

从上述过程可知：在研究曲线运动问题时，常常应用直线逼近曲线的方法，其基本步骤如下：

1. 将曲线无限细分，则两分点之间所连直线将无限逼近曲线，在极限状态下直线与曲线等价。
2. 物体在每一微段中，直线运动的规律将适用于曲线运

动。无限小段的总和即为整个曲线运动过程中的结论。

三、矩形逼近梯形

下面我们以物体运动的位移问题为例，研究矩形逼近梯形的思想方法。

1. 匀速直线运动

当物体作匀速直线运动时，其速度 $v = \text{常量}$ 。其 $v-t$ 图象表示为平行于 t 轴的一条直线。我们知道：匀速直线运动的位移为 $S = v \cdot t$ ，在图象上表现为直线与 t 轴之间打斜线部分的面积（见图1—7）。

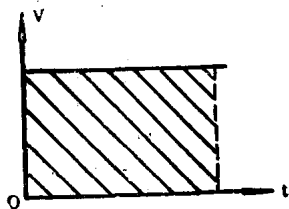


图1—7

下面我们进一步探索变速运动的位移问题。

2. 变速直线运动

为了方便起见，我们先研究匀变速直线运动的位移问题。由匀变速直线运动的速度公式 $v_t = v_0 + at$ 作 $v-t$ 图象。由图象可知，其规律为一倾斜的直线。直线在 t 轴上的截距为初速度 v_0 。现在我们假设物体作这样一种运动：物体以初速度 v_0 开始在 Δt 时间内作匀速直线运动，然后速度跳跃到 v_1 再作匀速直线运动，经 Δt 时间后，速度再跳跃到 $v_2 \dots \dots$ ，直至时刻 t ，速度增大到 v_t ，其 $v-t$ 规律见图

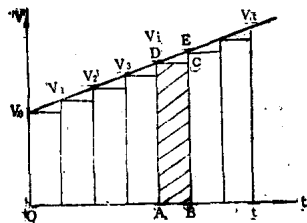


图1—8

1—8。

显然：在 Δt 时间内，因物体作匀速直线运动，故位移可表示为 $S_i = v_i \cdot \Delta t$ 。在图象上表达为矩形 ABCD 的面积

在0—t时间内，作速度为跳跃性匀速运动的物体发生的总位移为：

$$\begin{aligned} S &= v_0 \Delta t + v_1 \Delta t + v_2 \Delta t + \cdots + v_t \Delta t \\ &= (v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_t) \Delta t \end{aligned}$$

其中： $v_1 = v_0 + a \Delta t$

$$v_2 = v_1 + a \Delta t = v_0 + 2a \Delta t$$

$$v_3 = v_2 + a \Delta t = v_0 + 3a \Delta t$$

.....

$$v_t = v_0 + na \Delta t \quad (n \text{ 为 } t \text{ 轴所分段数})$$

$$\begin{aligned} \text{则 } S &= (v_0 + v_0 + a \Delta t + v_0 + 2a \Delta t + \cdots + \\ &\quad v_0 + na \Delta t) \Delta t \end{aligned}$$

$$= (nv_0 + \frac{n^2 + n}{2} a \Delta t) \Delta t$$

$$= n \Delta t v_0 + \frac{n^2 a \Delta t^2}{2} + \frac{na \Delta t^2}{2}$$

由图象可知： $n \Delta t = t$

$$\text{当 } \Delta t \rightarrow 0 \text{ 时, } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{na \Delta t^2}{2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} at \Delta t = 0$$

$$\text{故 } S = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$\text{或者 } S = \frac{v_0 + v_t}{2} t \quad \text{此式在 } v-t \text{ 图象中为一梯形}$$

面积。

上述推导过程的数学意义如下：