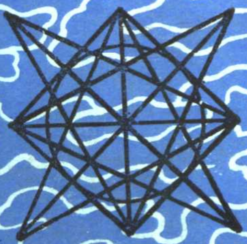
數學古今縱横談



梁之舜 吴伟贤 编著

科学普及出版社广州分社

数学古今纵横谈

梁之舜　吴伟贤　编著

科学普及出版社广州分社

内 容 简 介

数学是一门大家都熟悉但又似乎高深莫测的学科，很多人认为它枯燥无味、艰深难学。实际上，它是最基本的一门学科，是各门自然科学的基础。它在理论上虽然比较抽象，但与日常生活却有着密切的联系，而且是非常有趣的。

本书力图通过若干个古今中外有趣的实际问题或历史事实，从纵的方面阐述数学发展的某些来龙去脉，从横的方面阐述从中可以概括出来的一些普遍性的分析思考方法和较典型的处理方法；本书还通过一些具体例子，介绍数学某些重要分支或新方向的概貌、特点及其重要应用，使读者在不知不觉之中走进了某个近代数学的厅堂。

本书内容翔实，文笔流畅，深入浅出，生动有趣，不失为一本较好的数学普及读物。

数学古今纵横谈

梁之舜　吴伟贤　编著

科学普及出版社广州分社出版

广州市教育北路大华街兴平里2号

广州市红旗印刷厂印刷

广东省新华书店发行

开本：787×1092 1/32　印张：8.75　字数：196千字

1982年12月第一版　　1982年12月第一次印刷

印数：13,000册　统一书号：13051·60134

定价：0.80元

序　言

数学是一门大家都很熟悉但又似乎是高深莫测的学科。从学习文化开始，人们就接触数学，从小学到中学到高考，都不断要和数学打交道。进入大专学校后，可能有些专业或学科过去和数学关系不大，但随着科学技术向纵深方向及从定性到定量的发展，它们又不得不和这门通过数量关系与空间形式反映事物本质的学科结下不解之缘，以至有些本来对数学感到望而生畏的人又无可奈何地与数学“狭路相逢”。另一方面，数学教育对培养科技头脑又是不可缺少的。要生活在现代化的环境中，要了解和掌握现代科学技术，必须懂得一些数学语言，具备一定的运用数学工具的能力和修养。因此，如何认识数学和学好数学应该是很多人都应关心的问题。

其实数学来自丰富多彩不断发展的现实世界，它既不枯燥也不神秘，亦非特别可畏！

目前国内外出版有关数学的科普小册子已经很多。有些从数学趣味或历史出发着重提高读者对数学的兴趣和认识，有些则从介绍某个专门问题或从数学的某个侧面，阐述数学的一般方法与原理。

本书定名《数学古今纵横谈》。以作者学识的浅陋与局限，自不应侈谈中外，妄言今古！我们只是力图通过若干个古今中外有趣的实际问题或历史事实，从纵的方面阐述数学发展的某些来龙去脉，从横的方面阐述从中可以概括出的一些带普遍性的分析思考方法与较典型的处理方法，还力图通过一

些具体例子，介绍数学某些重要分支或新方向的概貌、特点及其重要应用，使读者在不知不觉中走进了某个近代数学的厅堂。

本书的每一节都有一个标题，一个副题，分别指明所讲问题的内容和通过这些内容所介绍的一些数学方法或某个分支。每节末尾附以若干习题及提示，供读者进一步思考。我们力求使只懂得初等数学的人都基本上看得清楚，只有不多几个地方应用到一点高等数学的方法和概念。好在每节都基本上自成独立的单元，如果碰到某些地方一时弄不清楚，完全可以跳过去，把不懂的地方留待以后进一步学习与探讨。

如果读者在阅读本书以后，除了能增加一些对数学的兴趣和了解，减少一些对数学的神秘感之外，还能在改进学习方法，增强学好数学的信心方面有所收益，这将是作者更深切的期望。

由于作者学识与水平的局限，希望各方学者不吝赐教。

编著者

1981年9月1日

目　　录

一、观察、归纳、论证、运用
——研究问题的一般过程……………………………… 1
二、扑克排牌的奥妙
——反推法的运用……………………………………… 9
三、在火柴游戏中取胜的秘诀
——二进制数…………………………………………14
四、巧猜年龄的秘密
——最简单的信息传输和编码…………………………19
五、印度国宝
——刻苦自学的数学预言家拉玛努贾…………………24
六、“韩信点兵”数学原理的探讨
——中国的剩余定理……………………………………29
七、牛顿提出的“牛吃草问题”
——不定方程趣谈………………………………………34
八、三次方程 $x^3+mx=n$ 解法的发明权属谁？
——从高次方程的求解到方程式论的建立……………43
九、人类感觉与数学的关系
——等比数列、对数和指数……………………………53
十、神奇的菲波纳斯数列
——递推方程的一种解法………………………………61

十一、正五边形和黄金分割
——方程式的迭代解法……68
十二、优选法和0.618
——最优化数学……78
十三、河图、洛书和魔方
——线性方程组……88
十四、自己动手去测量地球的直径
——几何学的实际应用……100
十五、剪摺纸也能证明几何定理
——浅谈数学机械化……106
十六、“数学之王”高斯墓碑上的正十七边形
——正n边形的作图问题……114
十七、扑克游戏中为什么“同花顺”最大
——事件的概率计算……124
十八、如何估计湖中鱼的数目？
——最大似然估计方法……130
十九、π值的古代计算方法
——逼近理论……135
二十、π值的近代计算方法
——级数的妙用……145
二十一、用抛针试验也能求出π值
——蒙特卡罗方法……154
二十二、连续利率的计算

——e和$e^{i\pi}+1=0$ ……………………………………160

二十三、无理数的发现

——数学在克服危机中前进 ……………………………166

二十四、集合论中的罗素悖论："宇宙是不存在的"

——悖论对数学的影响 ………………………………173

二十五、直角三角形斜边上的点多还是直角边上的点多？

——无限集的奇异性质 ………………………………180

二十六、自然数多还是有理数多？有理数多还是无理数多？

——连续统假设 ………………………………………186

二十七、用集合论的方法解决一些趣题

——温氏(Venn)图解法 ……………………………191

二十八、从一条考题谈起

——白鸽笼原理 ………………………………………196

二十九、群、变换与几何学

——变中求不变 ………………………………………203

三十、黑箱模型

——抽象数学模型的建立 ……………………………210

三十一、生活小题发展成新分支

——图论 ………………………………………………214

三十二、四色问题

——电子计算机在纯粹数学中的作用 ………………223

三十三、浅谈电子计算机诊病的数学原理

——统计评分方法 ……………………………………229

三十四、人和熊的过河问题
——矩阵的运用 ……236
三十五、餐桌上的占位问题
——产品质量控制中的游程理论 ……245
三十六、商业系统的顾客转移和稳定
——马氏过程在社会经济学中的应用 ……250
三十七、从美国营救人质的失败谈起
——提高可靠性的数学方法 ……256
三十八、经理必须知道的数学
——数学规划理论 ……260
三十九、从自动分信谈起
——模糊数学的崛起 ……265

一、观察、归纳、论证、运用

——研究问题的一般过程

对于一个科学工作者来说，善于观察是十分重要的。著名化学家阿伦尼乌斯(Arrhenius)曾经批评他的学生不善于观察，这些学生不服气，纷纷要求阿伦尼乌斯提出证据。阿伦尼乌斯当即拿出一瓶化学物品，伸一只手指入瓶中沾了一些液体，并放入口中品尝。然后对学生讲：你们依照我的样子尝一下这种液体的味道。每个学生都轮流品尝，由于这种液体的味道十分不好受，当阿伦尼乌斯看到最后一个学生品尝完毕后，哈哈大笑，对学生们说："你们都没有注意到，我放入瓶中的是食指，而放入口中的却是中指！"这或许只不过是一件趣谈，但说明有不少人在观察事物时是粗枝大叶的。

科学家都是敏于观察问题的。有一次爱因斯坦询问一位朋友的电话号码，那位朋友说："我家的电话号码很不好记，是24361"。爱因斯坦当即说："这很好记嘛，两打(2×12)19的平方"。印度数学家拉玛奴贾*也是十分善于观察的。有一次，当著名数学家哈地到医院看望他时，坐的汽车号码是1729。拉玛奴贾说："这是能用两种不同方法分解成二个整数的立方和中的最小整数。"即 $1729=1^3+12^3=9^3+10^3$。

光是观察还不够，还要把观察到的结果进行分析归纳，得到更概括性的东西，也即是一些理论性的公式或猜想。但

---

* 参看"印度国宝"一节

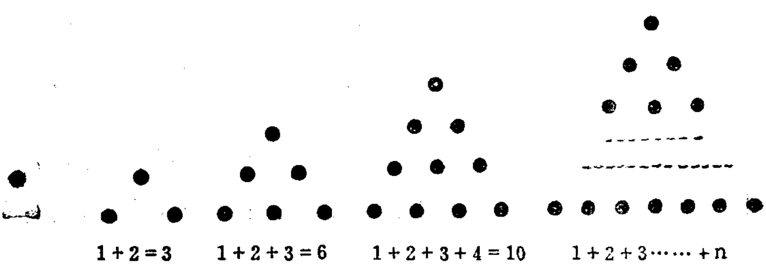
这些公式或猜想是否正确，还要进一步加以严格的论证。若能证明猜想是正确的，就得到一些定理或一种新的理论。当然有时在论证中也会发现原来的猜想是错误的。到此人们认识自然界的思维活动就可告一段落，但并不就是终结。因为我们不仅要认识世界，更重要的是改造世界。所以我们还要把得到的理论运用来解决生产实践或科学研究上的问题。下面举一些数学领域的例子来说明。

高斯八岁时在一个乡村小学读书。一天，老师想捉弄一下学生，要他们从 1 加到 100，做不出来的，不准回家吃午饭，小学生们都赶紧动手从 1 加 2 加 3 的逐个计算，小高斯却没有急于动手去计算，而是细心进行观察，他发现 $1+100=101$，$2+99=101$，$3+98=101$，……，$50+51=101$，总共有 50 个 101 。故他立刻得到

$$1+2+3+\cdots\cdots+98+99+100=50\times101=5050$$

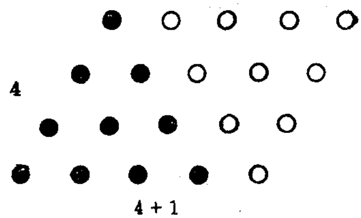
当然，这对于学过等差数列的人来说是十分容易的。但对一个年仅八岁的小学生，能有这样超人的观察力，不能不令人佩服！

古希腊数学家毕达哥拉斯是用十分形象的办法去解决上述的求和问题。他们按小石子所能排列而成的形状，把自然



图一　三角数

数分成所谓三角形数、正方形数、五边形数等等。为了计算三角数的一般表达式，他们把同一个三角数倒转加到原来的三角数上，构成一个一边有 n 个点而另一边有 n + 1 个点的平行四边形。

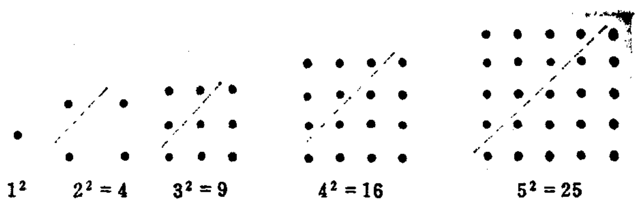


图二

故有 $2\times(1+2+3+\cdots\cdots+n)=n\times(n+1)$

即 $$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$$

正方形数是



图三

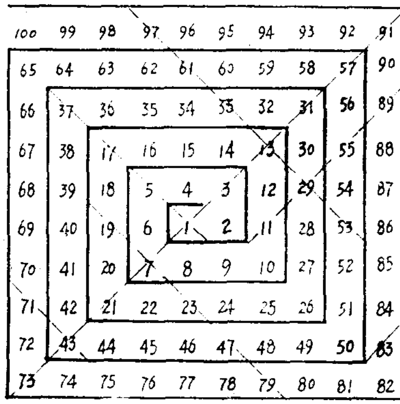
从图三不难看出两个相邻的三角形数之和刚好是一个正方形数，即

$$\frac{n\cdot(n+1)}{2}+\frac{(n+1)\cdot n}{2}=n^2$$

我国古代数学家杨辉也得到上述的结果。

更有趣的例子是素数分布的所谓“乌兰现象”的发现经过。美国著名数学家乌兰教授 (S. Ulam)，有一次他参加一个科学报告会，但他对报告的内容不感兴趣，为了消磨时间，

他在一张纸上把1，2，3，……，100按反时针的方式排成一种螺旋形式。如图四所示。



图四

他把从1到100中的全部素数都划出来，突然他发现这些素数都成一条直线形式。他进一步猜想对于超过100的整数是否仍然具有这种现象？散会后，他就用电子计算机把1到65000这些整数排成反时针螺旋式，并打印出来。他发现这些素数仍然具有排成一条直线的特性。这种现象后来在数学上称为“乌兰现象”。后来，数学家从“乌兰现象”中找到了素数不少的有趣性质。

法国数学家费马(Fermat 1601—1665)恐怕是猜想最多的数学家。其中最著名的猜想是“费马最后定理”（更确切应称为费马猜想）* “$x^n+y^n=z^n$ 对于 $n\geqslant 3$ 没有整数解”。费马绝大多数的猜想都是正确的。但也有个别的猜想后来被证明是错误的。例如，他观察式子 $F(n)=2^{2^n}+1$ 的值。

当 $n=0$，$F(0)=2^{2^0}+1=2^1+1=3$

$n=1$，$F(1)=2^{2^1}+1=2^2+1=5$

$n=2$，$F(2)=2^{2^2}+1=2^4+1=17$

$n=3$，$F(3)=2^{2^3}+1=2^8+1=257$

* 参看“牛顿提出的牛吃草问题”一节

$$n=4,\ F(4)=2^{2^4}+1=2^{16}+1=65537$$

由于3，5，17，257，65537都是素数，费马就根据这些特殊的情况，猜想对一切自然数n，$F(n)=2^{2^n}+1$都是素数。但到了1732年，数学家欧拉算出当$n=5$时$F(5)=2^{2^5}+1=2^{32}+1=4294967297$是能被641整除，其商数是6700417。故$F(5)$就不是素数。由于费马猜想是要求对一切自然数$n$，$F(n)$都是素数，故只要找到一个反例：$F(5)$不是素数，就推翻了费马这个猜想。

另外一个最著名的猜想就是“哥德巴赫猜想”。在1742年哥德巴赫(Goldbach)写了一封信给当时的大数学家欧拉，信中说，他观察了大量的大于2的偶数，发现都可以分解为两个素数的和，例如：

$$4=2+2,\ 6=3+3,\ 10=5+5,\ 100=71+29$$

因此，他相信：“任何一个大于2的偶数都能分解为两个素数的和”。但他本人不能证明，希望欧拉能帮助他证明。若用“2”来表示一个大于2的偶数，用“1”表示一个素数，则这就是有名的“2＝1＋1”的猜想。直到目前为止，世界上还未能解决这个问题。若想推翻这个猜想，则只要找到一个大于2的偶数，说明它不能被分解为两个素数之和。但目前还未有人能找到这样的偶数，估计永远也不能找到。若要证明这个猜想是正确的，由于大于2的偶数是无限多个，我们不能逐个加以验证，所以是十分困难的。目前我国数学家陈景润的成绩在这个问题上处于世界领先地位。他证明了：

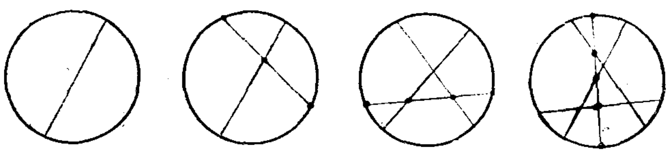
任何一个大于2的偶数＝一个素数＋不多于二个素数乘积

即通常简称为：2＝1＋2

但要注意，左边的2是表示大于2的偶数；而右边的2是表示不多于2个素数的乘积。现在的目标是要把右边的2

变成1。

作为一个观察和归纳的有趣例子，我们考虑一个切蛋糕的问题：有一个圆形的生日蛋糕，只准垂直地向下切，不准水平横切，也不准移动旦糕，试问切8刀最多能有多少块（不必等分）？然后推广到切 n 刀最多能有多少块？这个问题相当于用 n 条直线去分割平面的问题。切一刀有2块；切二刀最多有4块这是显然的。是否就能猜想：每多切一刀所得的块数是原来块数的2倍？即切三刀有 $2\times4=8$ 块；切4刀有 $2\times8=16$ 块？这是不对的。因为从图五(3)(4)知道，切三刀最多只能得7块；切四刀最多只能得11块。这是什么道理呢？



(1)　　(2)　　(3)　　(4)

图五

假设切 n 刀，最多能有 $f(n)$ 块。即有 $f(0)=1$，$f(1)=2$，$f(2)=4$，……。如何去求 $f(n)$ 的一般表达式？

当已经切了两刀时，就有2条直线。若希望第三刀能切得尽量多块，则要求第三刀（第3条直线）尽可能与前面两条直线相交。但第3条直线最多与前2条直线相交2点（重合无效），连圆周边界上2点共有4个点，有3段新切痕都把原来的一小块分为2小块，所以增加了3小块，即

原来二刀，$f(2)=4$　则

第三刀最多与前二刀相交2点，得3段新切痕，增加3小块

故　$f(3)=f(2)+3=4+3=7$

同理　原来3刀，$f(3)=7$　则

第四刀最多与前3刀相交3点，得4段新切痕，增加4小块

故　$f(4)=f(3)+4=7+4=11$

由此推出：设原来已有$n-1$刀，$f(n-1)$块，则

第n刀最多与前$n-1$刀相交$n-1$个点，得n段切痕，增加n小块，故

$$f(n)=f(n-1)+n$$

从上述递推公式如何求出$f(n)$的一般表达式？一般的方法是：

$$\begin{aligned}
f(0)&=1\\
f(1)&=f(0)+1\\
f(2)&=f(1)+2\\
&\vdots\\
f(n-1)&=f(n-2)+(n-1)\\
f(n)&=f(n-1)+n \qquad (+\\
\hline
f(n)&=1+(1+2+\cdots\cdots+n)
\end{aligned}$$

故　$f(n)=1+\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n^2+n+2}{2}$

所以　$f(8)=1+\dfrac{8(8+1)}{2}=37$块

练　　习

1．费马曾研究过的问题

(1) 首先证明 $\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2\times1}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3\times2\times1}$

(2) 猜想并证明 $\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)(k+2)}{3\times2\times1}=?$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)\cdots\cdots(k+p-1)}{p\times(p-1)\times\cdots\cdots\times2\times1}=?$$

(3) 从上述的公式推出 $\sum_{k=1}^{n}k^2$，$\sum_{k=1}^{n}k^3$，$\sum_{k=1}^{n}k^4$ 的公式。

2. 以 9 去乘任一自然数 n，然后把所得乘积的每一个数相加。例如

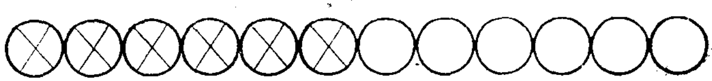
$9\times2=18$　　　$1+8=9$

$9\times32=288$　　　$2+8+8=18$

由此你能得到一个什么结论？运用你得到的结论去判别下面哪一个数可以被 9 整除：

477，　648，　8766。

3. 两种颜色的棋子各有六只，排列如下（图6），试移动 6 次变成颜色相间的连续的排列。



图六