根据教育部考试中心2005年版《复习考试大纲》编写

北大燕园

全国各类成人高等学校招生考试专用教材

专科起点升本科

高等数学（二）

组　　编：全国各类成人高校入学考试命题研究组

丛书主编：中央财经大学　吴秉坚　副教授

本书主编：中央财经大学　吴秉坚　副教授

（最新版）

全国各类成人高等学校招生考试专用教材

专科起点升本科

高等数学(二)

从书主编　中央财经大学　吴秉坚　副教授
本书主编　中央财经大学　吴秉坚　副教授

學苑出版社

图书在版编目（CIP）数据

全国各类成人高等学校招生考试专用教材（专科起点升本科）.
高等数学（二）/吴秉坚主编. —北京：学苑出版社，2004.3
ISBN 7-5077-2006-3

Ⅰ. 全…　Ⅱ. 吴…　Ⅲ. 高等数学—成人教育：高等教育—升学参考资料　Ⅳ. G724.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 013822 号

责任编辑： 郭　强
特约编辑： 谭伟红
责任校对： 刘宝军
封面设计： 张晓梅
出版发行： 学苑出版社
社　　址： 北京市丰台区南方庄 2 号院 1 号楼
邮政编码： 100078
印 刷 厂： 北京市朝阳印刷厂
开本尺寸： 787mm×1092mm　16 开本
印　　张： 100 印张
字　　数： 2500 千字
版　　次： 2005 年 4 月北京第 1 版
印　　次： 2005 年 4 月北京第 1 次印刷
印　　数： 00001—10000 套
定　　价： 199.00 元（全 8 册）

出版说明

2005 年 1 月，教育部高校学生司和教育部考试中心重新修订颁布了《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲(专科起点升本科)》，新大纲对原有大纲进行了重新调整，增减了有关考核知识点。

成人高等学历教育是我国高等教育的重要组成部分，培养和造就众多的专门人才、全面推进素质教育；面向广大在职从业人员、为地方社会经济发展服务，是成人高等教育的主要任务。而且，成人教育考试普遍受到国家和社会的关注，为有识之才创造了走向成功之路的机会。

为此，我们组织了一批长期工作在成人高等教育的一线教师、专家，编写了本套与新大纲配套的考试辅导用书。

本套丛书将内容讲解与题目训练融于一体，让考生在复习过程中将基础知识抓牢，准确把握考试的方向，提高应试能力，本书将基础知识、应用性和能力型题目紧密结合，并进行详细解答和指导。丛书包括《政治》、《英语》、《大学语文》、《高等数学(一)》、《高等数学(二)》、《民法》、《艺术概论》、《教育理论》共 8 册，每册还配有标准预测试卷和近年真题一套。这体现了我们为考生全面服务的思想。

《高等数学(二)》具有如下特点：

第一部分考试内容与例题讲解　按最新体例分章节进行编写，每章节又包括"考试内容"、"例题讲解"、"同步训练及参考答案"等板块；

第二部分重点与难点题型分析　按选择题、填空题、解答题形式，对每道例题进行详细题解；

第三部分模拟测试题　按最新考试大纲要求设置了三套模拟试题及参考答案，供考生复习训练之用；

第四部分近年试题分析　将 1998 年至 2003 年试题进行详细分析，使考生了解考试方向，更好备考。

在编写过程中，我们虽处处推敲，但由于时间仓促，书中难免有所纰漏，欢迎广大读者批评指正。

编　者

目　录

第一部分　考试内容与例题讲解

第二部分 重点与难点题型分析

第三部分 模拟测试题

第四部分 近年试题分析

附录:

第一部分　考试内容与例题讲解

本部分按照《复习考试大纲》的要求，并结合《高等数学》课程的知识系统与学习特点，按章、节对大纲中规定的全部知识内容进行详细的讲解与说明. 每章各节中均配有一定数量的例题，例题的选择既考虑到读者掌握相应知识内容的需要，也尽量突出对大纲中规定的重点与难点内容的训练. 建议读者在复习过程中对每一道例题都能够达到熟练地进行独立演算的程度，特别是要注意掌握每一道例题的解题过程中所涉及的基本概念、基本方法及公式与技巧. 每节配有同步训练、各章配有综合训练，读者学习本部分可以达到对"专升本"《高等数学(二)》的考试内容进行全面系统复习的目的.

第一章　函数、极限和连续

第一节　函　数

考试内容

1. 函数的概念

【函数的定义】设在某个变化过程中有两个变量 x 与 y，当变量 x 在给定范围内取任意值时，变量 y 按照某一确定的法则有一确定的值与 x 相对应，那么称变量 y 为变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$；其中 x 称为自变量，函数 y 称为因变量或函数值；自变量 x 的变化范围称为函数的定义域，而函数值的范围称为函数的值域；由自变量 x 确定函数值 y 的对应法则 f 称为函数关系.

【注】(1) 对于函数 $y=f(x)$，当 x 取定义域内某一确定值时，通过函数关系 f 惟一确定一个函数值 y，称 $y=f(x)$ 为单值函数，在本课程中讨论的均为单值函数；另一方面，如果通过函数关系 f 可确定多个函数值 y，则 $y=f(x)$ 为多值函数.

(2) 函数定义的"两要素"是：定义域与函数关系. "两要素"的含义是指：当定义域相同且函数关系也相同时，即使表示变量的字母不同，也是相同的函数，例如：

$y=f(x)=\sin x$ 和 $s=g(t)=\sin t$，

这两个函数虽然表示变量的字母不同，但是它们的定义域均为全体实数且函数关系也完全相同，因而表示的是同一个函数. 又如：

$y=f(x)=e^{\ln x}$ 和 $y=g(x)=x\cdot(\sin^2x+\cos^2x)$，

这两个函数的函数关系虽然相同，均为 $y=x$，但是 $y=f(x)$ 的定义域为正实数而 $y=g(x)$ 的定义域为全体实数，由于它们的定义域不同，所以是不同的函数.

(3) 对于给定的函数表达式 $y=f(x)$，函数的定义域就是使函数表达式有意义的自变量 x 的范围，例如函数

$$y=f(x)=\frac{1}{x^2+2x-3}=\frac{1}{(x-1)(x+3)}$$

的定义域为使 $x\neq 1$ 和 $x\neq -3$ 的所有实数,用区间表示为 $(-\infty,-3)\cup(-3,1)\cup(1,+\infty)$;又如函数

$$y=f(x)=\sqrt{1-x^2}$$

的定义域为使 $1-x^2\geqslant 0$ 的所有实数,即 $x^2\leqslant 1$,用区间表示为 $[-1,1]$.

【分段函数】如果函数 $y=f(x)$ 的定义域可分成若干部分,在不同部分上由自变量 x 确定函数值 y 的表达式也不同,则称 $y=f(x)$ 为分段函数. 例如函数

$$y=f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$$

和函数

$$y=g(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ 0, & x=0\\ x-1. & x>0\end{cases}$$

都是分段函数.

【复合函数】设 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 是两个函数,如果 $u=g(x)$ 的值域被包含在 $y=f(u)$ 的定义域之中,则在 $u=g(x)$ 的定义域中任取自变量 x,由函数关系 g 可以惟一确定一个值 u,再由函数关系 f 可以唯一确定一个值 y,因此由 x 可以惟一确定变量 y 的一个值,称 y 为 x 的复合函数,记作 $y=f[g(x)]$;其中 u 为中间变量.

例如,$y=f(u)=e^u$,$u=\varphi(x)=x^2+x+1$,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]=e^{x^2+x+1}$.

【注】复合函数的概念可以由两个函数作复合推广到有限多个函数作复合,例如:

$y=f(u)=\arctan u$,$u=g(v)=1+v^2$,$v=\varphi(x)=\ln x$ 的复合函数为

$y=f\{g[\varphi(x)]\}=\arctan(1+\ln^2 x)$.

2. 函数的性质

【单调性】设函数在区间 (a,b) 上有定义,且对于 (a,b) 内的任两个值 x_1 与 x_2 当 $x_1>x_2$ 时总有不等式 $f(x_1)>f(x_2)$ 成立,则称 $f(x)$ 是区间 (a,b) 上的单调增函数;反之,当 $x_1>x_2$ 时总有不等式 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立,则称 $f(x)$ 是区间 (a,b) 上的单调减函数. 单调增函数与单调减函数可以统称为单调函数. 而区间 (a,b) 称为函数 $f(x)$ 的单调区间.

例如,函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$,当 $a>1$ 时是定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调增函数;当 $a<1$ 时是定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调减函数. 又如,函数 $y=\sin x$ 在区间 $(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2})$ 上是单调增函数;在区间 $(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2})$ 上是单调减函数,此处 k 为整数.

【奇偶性】设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称,如果对于定义域内的任意 x,恒有

$f(-x)=f(x)$,

则称 $f(x)$ 为偶函数;如果对于定义域内的任意 x,恒有

$f(-x)=-f(x)$,

则称 $f(x)$ 为奇函数.

【注】奇函数的图形关于原点对称;偶函数的图形关于 y 轴对称.

例如,令 $f(x) = e^x + e^{-x}$,则 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$;对任意实数 x,有

$f(-x) = e^{-x} + e^x = e^x + e^{-x} = f(x)$,

因此 $f(x)$ 是偶函数;又如,令 $f(x) = e^x - e^{-x}$,则 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,对任意实数 x 有

$f(-x) = e^{-x} - e^x = -(e^x - e^{-x}) = -f(x)$,

因此 $f(x)$ 是奇函数.

【有界性】设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义,如果存在一正数 M,对于 (a,b) 内的任意 x 有 $|f(x)| \leq M$ 成立,则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上有界.

【注】如果一个函数在定义域内有界,则称为有界函数. 例如 $f(x) = \sin x$,在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内,对一切 x 有 $|\sin x| \leq 1$,因而 $y = \sin x$ 是有界函数. 但是,函数 $f(x)$ 在某一区间上有界则不一定是有界函数. 例如,$f(x) = \frac{1}{x}$,在区间 $(1,2)$ 上满足 $|f(x)| \leq 1$,因而在区间 $(1,2)$ 上有界,但是在定义域 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上无界,因而不是有界函数.

【周期性】设函数 $y = f(x)$,如果存在正数 a,对于 $f(x)$ 的定义域内任意 x,$f(x)$ 在 $x + a$ 有定义并且满足

$f(x + a) = f(x)$

则称 $f(x)$ 为周期函数.

【注】如果 $f(x)$ 为周期函数且 $f(x + a) = f(x)$. 则对任意自然数 n 有

$$
\begin{aligned}
f(x + na) &= f[x + (n-1)a + a] = f[x + (n-1)a] \\
&= f[x + (n-2)a + a] = f[x + (n-2)a] \\
&= \cdots \\
&= f(x),
\end{aligned}
$$

所以满足 $f(x) = f(x + a)$ 的正数 a 有无穷多个,将满足 $f(x) = f(x + a)$ 的正数 a 中的最小者记作 T,称 T 为周期函数 $f(x)$ 的周期. 例如,$y = \tan x$ 的周期为 π;而 $y = \sin x$ 的周期为 2π.

3. 反函数

【函数关系的反关系】设 $y = f(x)$ 是给定函数,其定义域为 D,值域为 R,任取 R 中的实数 y,一定存在 D 中的 x 使得 $f(x) = y$,将 y 对应于 x 的对应法则称为函数关系 f 的反关系,记作 f^{-1}.

【注】在单值函数的意义下,函数关系的反关系不一定是一个函数关系. 例如 $y = f(x) = x^2$,定义域 $D = (-\infty, +\infty)$,值域为 $[0, +\infty)$;对于 $y = 1$,有 $x = \pm 1$ 在函数关系下对应于 $y = 1$,因而在单值函数意义下其反关系不是一个函数关系. 由于本课程讨论的都是单值函数,所以函数关系的反关系不一定是函数关系.

【反函数的定义】设 $y = f(x)$ 是给定函数,其定义域为 D、值域为 R,如果函数关系 f 的反关系 f^{-1} 可以确定一个以 R 为定义域的函数,则这个新的函数称为函数 $y = f(x)$ 的反函数,记作 $x = f^{-1}(y)$.

【注】(1) 一个函数 $y = f(x)$ 有反函数的条件是:对于值域 R 中的每一个 y,都仅有定义域 D 中惟一的 x,使得 $f(x) = y$. 因此对于定义域上的单调函数 $y = f(x)$,一定有反函数 $x = f^{-1}(y)$.

(2) 由于习惯上用 x 表示自变量，y 表示函数，因此一般将函数 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$. $y=f^{-1}(x)$ 的定义域是 $y=f(x)$ 的值域，$y=f^{-1}(x)$ 的值域是 $y=f(x)$ 的定义域，而 $y=f^{-1}(x)$ 的函数关系是 $y=f(x)$ 的反关系.

例如，函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$ 的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$；其反函数是 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$，反函数的定义域为 $(0,+\infty)$，而值域为 $(-\infty,+\infty)$.

(3) 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形在同一坐标系中关于 $y=x$ 对称.

(4) 有时一个函数在定义域上没有反函数，但是为了讨论问题的方便可以将定义域范围减小后讨论其反函数. 例如，$y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上没有反函数，但是 $y=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上有反函数 $y=\sqrt{x}$；又如，$y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上没有反函数，但是 $y=\sin x$ 在主值区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上有反函数，并且其反函数就是反正弦函数 $y=\arcsin x$.

4. 基本初等函数与初等函数

【基本初等函数】

(1) 幂函数 $y=x^a$(a 为实数)，常见幂函数的图像如图 1－1 所示.

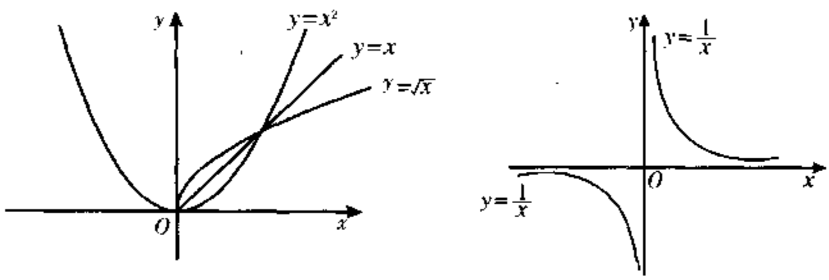

图 1－1

(2) 指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$，如图 1－2 所示，指数函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$；图像经过 $(0,1)$ 点；当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 为单调增函数，当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 为单调减函数.

(3) 对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$，如图 1－3 所示，对数函数的定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$；图像经过 $(1,0)$ 点；当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 是单调增函数，当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 是单调减函数.

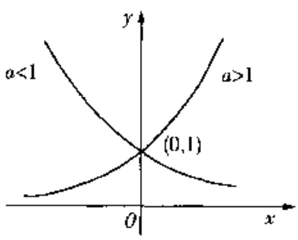

图 1－2

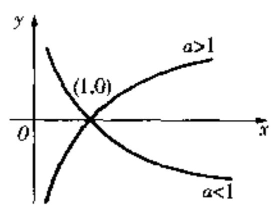

图 1－3

(4) 三角函数

正弦函数 $y=\sin x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，是周期为 2π 的周期函数，

图像如图 1 - 4 所示. 正弦函数是奇函数.

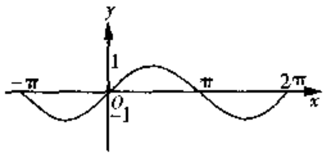

图 1 - 4

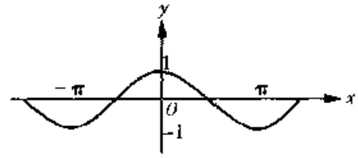

图 1 - 5

余弦函数 $y = \cos x$,定义域为$(-\infty, +\infty)$,值域为$[-1,1]$,是周期为2π的周期函数,图像如图 1 - 5 所示. 余弦函数是偶函数.

正切函数 $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$,定义域为 $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 的全体实数,值域为$(-\infty, +\infty)$,是周期为 π 的周期函数,图像如图 1 - 6 所示. 正切函数是奇函数.

余切函数 $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$,定义域为 $x \neq k\pi(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 的全体实数,值域为$(-\infty, +\infty)$,是周期为 π 的周期函数,图像如图 1 - 7 所示. 余切函数是奇函数.

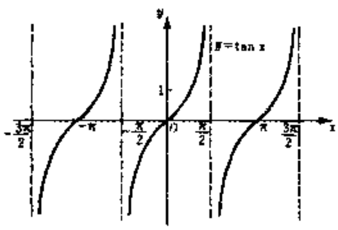

图 1 - 6

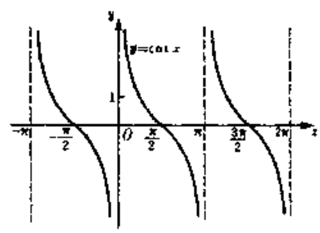

图 1 - 7

正割函数 $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$.

余割函数 $y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$.

(5) 反三角函数

反正弦函数 $y = \arcsin x$ 是正弦函数 $y = \sin x$ 在主值区间$\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$上的反函数,其定义域为$[-1,1]$,值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$,图像如图1 - 8 所示.

反余弦函数 $y = \arccos x$ 是余弦函数 $y = \cos x$ 在主值区间$[0,\pi]$上的反函数,其定义域为$[-1,1]$,值域为$[0,\pi]$,图像如图 1 - 9 所示.

反正切函数 $y = \arctan x$ 是正切函数 $y = \tan x$ 在主值区间$\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$上的反函数,其定义域为$(-\infty, +\infty)$,值域为$\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$,图像如图 1 - 10

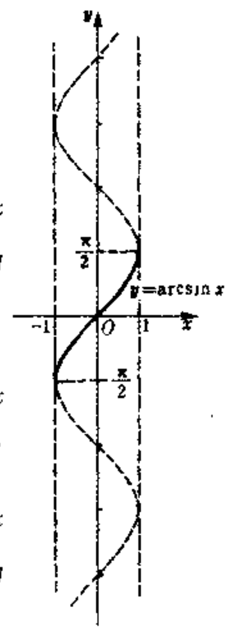

图 1 - 8

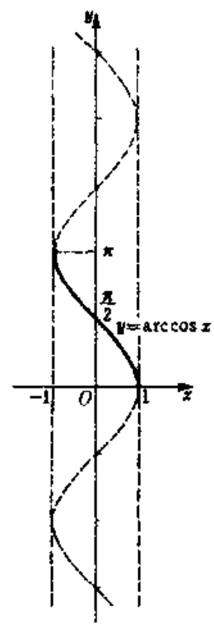

图 1 - 9

所示.

反余切函数 $y = \operatorname{arccot}x$ 是余切函数 $y = \cot x$ 在主值区间 $(0,\pi)$ 上的反函数,其定义域为 $(-\infty, +\infty)$,值域为 $(0,\pi)$,图像如图 1 - 11 所示.

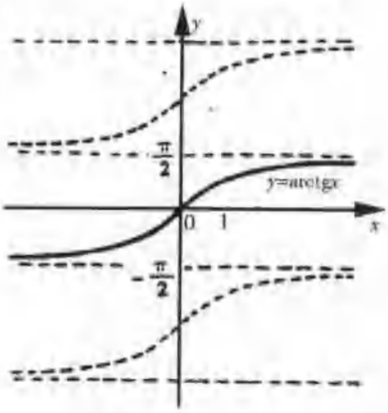

图 1 - 10

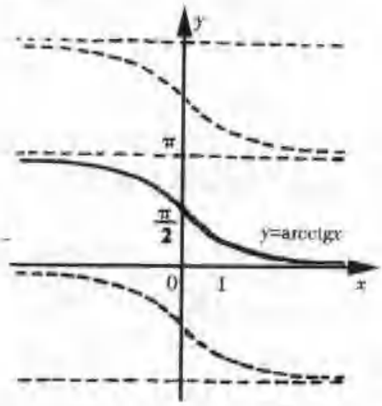

图 1 - 11

【初等函数】由基本初等函数经过有限次四则运算及经过有限次复合而得到的,用一个表达式表示的函数称为初等函数. 例如,

$y = \arcsin\sqrt{x} + \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$

$y = \log_a(1 + e^{\arctan x})$

$y = \cos(x^2 + 1)\ln(x^2 + x + 1)$

等是初等函数.

【注】分段函数不是初等函数.

例题讲解

【例 1】设 $y = f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$,求 (1) $y = f(x^2)$;(2) $y = f\left(x + \dfrac{1}{4}\right) + f\left(x - \dfrac{1}{4}\right)$ 的定义域.

【解】(1) $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$,因此 $-1 \leqslant x \leqslant 1$,所以 $y = f(x^2)$ 的定义域为 $[-1,1]$.

(2) $0 \leqslant x + \dfrac{1}{4} \leqslant 1$ 且 $0 \leqslant x - \dfrac{1}{4} \leqslant 1$,因此 $-\dfrac{1}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{3}{4}$ 且 $\dfrac{1}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{5}{4}$,所以 $y = f\left(x + \dfrac{1}{4}\right) + f\left(x - \dfrac{1}{4}\right)$ 的定义域为 $\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\right]$.

【例 2】求函数 $y = \sqrt{3 - x} + \arccos\dfrac{x - 2}{3}$ 的定义域.

【解】$3 - x \geqslant 0$ 且 $-1 \leqslant \dfrac{x - 2}{3} \leqslant 1$,因此 $x \leqslant 3$ 且 $-1 \leqslant x \leqslant 5$,所以定义域为 $[-1, 3]$.

【例3】函数 $y=\sqrt{\ln(\ln x)}$ 的定义域是________.

【解】应填$[e,+\infty)$

这是因为要使函数表达式有意义，必须有 $\ln x>0$ 且 $\ln(\ln x)\geqslant 0$，因此 $\ln x\geqslant 1$，即 $x\geqslant e$.

【例4】设$f(\sin x)=3-\cos 2x$，$f(\cos x)=$________.

A. $3-\sin 2x$　　B. $3+\sin 2x$　　C. $3-\cos 2x$　　D. $3+\cos 2x$

【解】应选 D

因为$f(\sin x)=3-\cos 2x=3-(1-2\sin^2 x)=2+2\sin^2 x$ 得 $f(x)=2+2x^2$，因此 $f(\cos x)=2+2\cos^2 x=3+(2\cos^2 x-1)=3+\cos 2x$.

【例5】下列$f(x)$与$g(x)$是相同函数的为________.

A. $f(x)=x,g(x)=(\sqrt{x})^2$　　B. $f(x)=\sqrt{x^2},g(x)=|x|$

C. $f(x)=\lg x^2,g(x)=2\lg x$　　D. $f(x)=\ln\sqrt{x},g(x)=\frac{1}{2}\lg|x|$

【解】应选 B

因为 A 中$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，$g(x)$的定义域为$[0,+\infty)$，是不同函数.

C 中$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$g(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，是不同函数.

D 中$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$g(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，是不同函数.

B 中$f(x)$与$g(x)$的定义域和函数关系均相同，是同一个函数.

【例6】设$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$求函数$f[f(x)]$.

【解】当$|x|\leqslant 1$时，$f(x)=1$，因此$f[f(x)]=f(1)=1$；

当$|x|>1$时，$f(x)=0$，因为$f[f(x)]=f(0)=1$；

所以$f[f(x)]=1$.

【例7】设$f(x)=\ln x+1$，$g(x)=\sqrt{x}+1$，则$f[g(x)]=$________.

A. $\ln\sqrt{x}+1$　　B. $\ln\sqrt{x}+2$

C. $\ln(\sqrt{x}+1)+1$　　D. $\sqrt{\ln(x+1)}+1$

【解】应选 C

因为$y=f(u)=\ln u+1$，$u=g(x)=\sqrt{x}+1$，所以$y=f[g(x)]=\ln(\sqrt{x}+1)+1$.

【例8】设$f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$，验证$f(x)$是奇函数.

【解】$f(-x)=\lg(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\lg(\sqrt{1+x^2}-x)$

$$=\lg\left[\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}\right]$$

$$=\lg\left[\frac{1+x^2-x^2}{x+\sqrt{1+x^2}}\right]=\lg[(x+\sqrt{1+x^2})^{-1}]$$

$$=-\lg(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$$

因此$f(x)$为奇函数.

【例9】设$f(2x+1)=\ln(6x^2+5x+1)$，则$f(2x-1)=$________.

【解】应填 $\ln(6x^2-7x+2)$

令 $2x+1=t$,则 $x=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}$,故

$$f(t)=\ln\left[6\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\right)^2+5\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\right)+1\right]=\ln\left(\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}t\right),$$

所以 $f(2x-1)=\ln\left[\frac{3}{2}(2x-1)^2-\frac{1}{2}(2x-1)\right]=\ln(6x^2-7x+2)$.

【例 10】设 $f(x)$ 是奇函数,且 $F(x)=f(x)\left(\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}\right)$,证明 $F(x)$ 是偶函数.

【证明】$F(-x)=f(-x)\left(\frac{1}{a^{-x}+1}-\frac{1}{2}\right)=-f(x)\left(\frac{a^x}{a^x+1}-\frac{1}{2}\right)$

$$=-f(x)\frac{a^x-1}{2(a^x+1)}$$

$$=-f(x)\frac{a^x+1-2}{2(a^x+1)}=-f(x)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a^x+1}\right)$$

$$=f(x)\left(\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}\right)=F(x)$$

所以 $F(x)$ 为偶函数.

【例 11】函数 $y=e^x+1$ 与函数 $y=\ln(x-1)$ 的图形_____.

A. 关于原点对称　　B. 关于 x 轴对称

C. 关于 y 轴对称　　D. 关于直线 $y=x$ 对称

【解】应选 D

因为 $y=e^x+1$ 是单调函数,有反函数,其反函数为 $y=\ln(x-1)$,因此关于直线 $y=x$ 对称.

【例 12】设 $f\left(\frac{1}{x}-1\right)=\frac{x}{2x-1}$,求 $f(x)$,$f(x+1)$.

【解】$f\left(\frac{1}{x}-1\right)=\frac{x}{2x-1}=\frac{1}{2-\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{1-(\frac{1}{x}-1)}$,

令 $\frac{1}{x}-1=t$,则有 $f(t)=\frac{1}{1-t}$,

所以 $f(x)=\frac{1}{1-x}$,$f(x+1)=\frac{1}{1-(x+1)}=-\frac{1}{x}$.

【另解】令 $\frac{1}{x}-1=t$,则 $x=\frac{1}{t+1}(t\neq-1)$

因此 $f(t)=f\left(\frac{1}{x}-1\right)=\frac{x}{2x-1}\bigg|_{x=\frac{1}{t+1}}=\frac{\frac{1}{t+1}}{2\frac{1}{t+1}-1}=\frac{1}{1-t}$

所以 $f(x)=\frac{1}{1-x}$,$f(x+1)=\frac{1}{1-(x+1)}=-\frac{1}{x}$.

【例13】函数 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ 的反函数是________.

A. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$　　　　B. $y=\dfrac{1-x}{1+x}$

C. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$　　　　D. $y=\dfrac{1+x}{1-x}$

【解】应选 D

因为由 $y=\dfrac{x-1}{x+1}(x\neq-1)$ 得

$(x+1)y=x-1$ 即 $xy+y=x-1$，得 $xy-x=-y-1$ 即 $x(y-1)=-(1+y)$

所以 $x=-\dfrac{1+y}{y-1}=\dfrac{1+y}{1-y}$

将上式中 x 换成 y，y 换成 x 得到反函数 $y=\dfrac{1+x}{1-x}$.

【例14】函数 $y=f(x)=2^{x-1}$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)=$__________.

【解】应填 $1+\log_2 x$

因为由 $y=2^{x-1}$，得 $\log_2 y=\log_2 2^{x-1}=x-1$，即 $x=1+\log_2 y$，所以反函数为 $y=1+\log_2 x$.

【例15】下列函数中是基本初等函数的是________.

A. $y=\cos(x+1)$　　　　B. $y=x^2+x+1$

C. $y=x^{\sqrt{2}}$　　　　D. $y=\begin{cases}x+1, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$

【解】应选 C

因为 A 中函数是基本初等函数的复合函数，B 中函数是基本初等函数的四则运算，因而都是初等函数；D 中函数是分段函数，不是初等函数；C 中函数是幂函数. 所以仅有 C 中函数是基本初等函数.

【例16】设函数 $y=\arcsin[1+\log_a(x^2+1)]$，将函数分解成简单函数的复合函数并求出中间变量.

【解】设 $y=\arcsin u$，$u=1+\log_a v$，$v=x^2+1$，则所给函数是以上三个简单函数的复合函数，u 与 v 为中间变量.

【例17】设 $y=\sqrt{1+u^2}$，$u=e^v$，$v=\arcsin x$，则 y 表示成 x 的函数是________.

【解】应填 $y=\sqrt{1+e^{2\arcsin x}}$

$y=\sqrt{1+(e^v)^2}=\sqrt{1+e^{2v}}=\sqrt{1+e^{2\arcsin x}}$.

同步训练

1. 求下列各函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{x}$　　　　(2) $y=\dfrac{\ln(3-x)}{\sqrt{x-1}}$

(3) $y = \arccos\frac{x-1}{3} + \frac{1}{x^2-x-6}$　　(4) $y = \lg\frac{1-x}{1+x}$

2. 设 $f(\sin x) = \sqrt{1-4x^2}$,求函数 $f(x)$ 的定义域.

3. 设 $y = \arctan u, u = 1 + v^2, v = \ln x$,将 y 表示成 x 的函数.

4. 指出下列函数是由哪些简单函数复合而成的.

(1) $y = e^{(2x+1)^2}$　　(2) $y = \arcsin\sqrt{1-2x}$

(3) $y = \cos^5(2x^2-1)$　　(4) $y = \lg[\tan(x^2+1)^2]$

5. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x) = \frac{10^x + 10^{-x}}{2}$　　(2) $f(x) = \lg\frac{1-x}{1+x}$

(3) $f(x) = x\sin x + \cos x$　　(4) $f(x) = \frac{x(e^x-1)}{e^x+1}$

6. 求下列函数的反函数.

(1) $y = \arcsin\frac{x-1}{4}$　　(2) $y = \frac{x-3}{2x+1}$

(3) $y = \frac{2^x}{2^x+1}$　　(4) $y = \sqrt[3]{\lg x - 1}$

7. 设 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x > 1, \\ x+1, & x \leqslant 1, \end{cases}$ 求 $f(0), f(2), f(x-1), f[f(x)]$.

8. 设 $f(x+1) = \begin{cases} x^2, 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2x, 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$ 求 $f(x)$.

9. 设 $f\left(\frac{\lg x}{x}\right) = \frac{5\lg x + x}{2x + \lg x}$,求 $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

10. 设 $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ 1, x \geqslant 0, \end{cases}$ 求 $\varphi(x) = f(x) - f(x-1)$.

【参考答案】

1. (1) $1 - x^2 \geqslant 0$ 且 $x \neq 0$,定义域为 $[-1,0) \cup (0,1]$.

(2) $x - 1 > 0$ 且 $3 - x > 0$,定义域为 $(1,3)$.

(3) $-1 \leqslant \frac{x-1}{3} \leqslant 1$ 且 $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3) \neq 0$,即 $-2 \leqslant x \leqslant 4$ 且 $x \neq -2$, $x \neq 3$,定义域为 $(-2,3) \cup (3,4]$.

(4) $\frac{1-x}{1+x} > 0$,即 $\begin{cases} 1-x > 0, \\ 1+x > 0, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1-x < 0, \\ 1+x < 0. \end{cases}$

而 $\begin{cases} 1-x < 0 \\ 1+x < 0 \end{cases}$ 无解,定义域为 $(-1,1)$

2. $f(x) = \sqrt{1-4(\arcsin x)^2}$,使函数表达式有意义的范围是 $4(\arcsin x)^2 \leqslant 1$,即 $-\frac{1}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{1}{2}$, $-\sin\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{1}{2}\right) \leqslant x \leqslant \sin\frac{1}{2}$,定义域为 $\left[-\sin\frac{1}{2}, \sin\frac{1}{2}\right]$.