robability and Statistics

教育科学“十五”国家规划课题研究成果

概率论与数理统计及其应用

浙江大学 盛 骤 谢式千 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

教育科学“十五”国家规划课题研究成果

概率论与数理统计及其应用

浙江大学　盛　骤　谢式千　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书共分 9 章，第 1 章～第 4 章是概率论部分，内容有随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、正态分布。第 5 章～第 8 章是数理统计部分，内容有样本及抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析。第 9 章为概率论与数理统计的一些应用，分为 4 节，内容有可靠性、单服务台排队模型、蒙特卡罗模拟、质量控制。

本书可作为高等学校工科各专业、理科（非数学专业）各专业概率论与数理统计课程的教材，也可供各类有关专业技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计及其应用/盛骤，谢式千编．—北京：高等教育出版社，2004.7
ISBN 7-04-014413-1

Ⅰ.概… Ⅱ.①盛…②谢… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 062060 号

策划编辑 徐 可 **责任编辑** 徐 可 **封面设计** 王凌波
版式设计 杨 明 **责任印制** 孔 源

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	北京铭成印刷有限公司		
开 本	787×960 1/16	版 次	2004 年 7 月第 1 版
印 张	17.25	印 次	2004 年 7 月第 1 次印刷
字 数	310 000	定 价	18.50 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

总　序

为了更好地适应当前我国高等教育跨越式发展需要，满足我国高校从精英教育向大众化教育的重大转移阶段中社会对高校应用型人才培养的各类要求，探索和建立我国高等学校应用型人才培养体系，全国高等学校教学研究中心(以下简称“教研中心”)在承担全国教育科学“十五”国家规划课题——“21世纪中国高等教育人才培养体系的创新与实践”研究工作的基础上，组织全国100余所以培养应用型人才为主的高等院校，进行其子项目课题——“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”的研究与探索，在高等院校应用型人才培养的教学内容、课程体系研究等方面取得了标志性成果，并在高等教育出版社的支持和配合下，推出了一批适应应用型人才培养需要的立体化教材，冠以“教育科学‘十五’国家规划课题研究成果”。

2002年11月，教研中心在南京工程学院组织召开了“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题立项研讨会。会议确定由教研中心组织国家级课题立项，为参加立项研究的高等院校搭建高起点的研究平台，整体设计立项研究计划，明确目标。课题立项采用整体规划、分步实施、滚动立项的方式，分期分批启动立项研究计划。为了确保课题立项目标的实现，组建了“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题领导小组(亦为高校应用型人才立体化教材建设领导小组)。会后，教研中心组织了首批课题立项申报，有63所高校申报了近450项课题。2003年1月，在黑龙江工程学院进行了项目评审，经过课题领导小组严格的把关，确定了首批9项子课题的牵头学校、主持学校和参加学校。2003年3月至4月，各子课题相继召开了工作会议，交流了各校教学改革的情况和面临的具体问题，确定了项目分工，并全面开始研究工作。计划先集中力量，用两年时间形成一批有关人才培养模式、培养目标、教学内容和课程体系等理论研究成果报告和在研究报告基础上同步组织建设的反映应用型人才培养特色的立体化系列教材。

与过去立项研究不同的是，“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题研究在审视、选择、消化与吸收多年来已有应用型人才培养探索与实践成果基础上，紧密结合经济全球化时代高校应用型人才培养工作的实际需要，努力实践，大胆创新，采取边研究、边探索、边实践的方式，推进高校应用

型人才培养工作，突出重点目标，并不断取得标志性的阶段成果。

教材建设作为保证和提高教学质量的重要支柱和基础，作为体现教学内容和教学方法的知识载体，在当前培养应用型人才中的作用是显而易见的。探索、建设适应新世纪我国高校应用型人才培养体系需要的教材体系已成为当前我国高校教学改革和教材建设工作面临的十分重要的任务。因此，在课题研究过程中，各课题组充分吸收已有的优秀教学改革成果，并和教学实际结合起来，认真讨论和研究教学内容和课程体系的改革，组织一批学术水平较高、教学经验较丰富、实践能力较强的教师，编写出一批以公共基础课和专业、技术基础课为主的有特色、适用性强的教材及相应的教学辅导书、电子教案，以满足高等学校应用型人才培养的需要。

我们相信，随着我国高等教育的发展和高校教学改革的不断深入，特别是随着教育部“高等学校教学质量和教学改革工程”的启动和实施，具有示范性和适应应用型人才培养的精品课程教材必将进一步促进我国高校教学质量的提高。

全国高等学校教学研究中心

2003 年 4 月

前　　言

本书是按照教育部现时使用的《概率论与数理统计课程基本要求》所规定内容的广度和深度编写的，可作为高等学校工科各专业、理科（非数学专业）各专业概率论与数理统计课程的教材，也可供各类有关专业技术人员参考.

本书共分 9 章，第 1 章～第 4 章是概率论部分，内容有随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、正态分布. 第 5 章～第 8 章是数理统计部分，内容有样本及抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析. 第 9 章为概率论与数理统计的一些应用，分为 4 节，内容有可靠性、单服务台排队模型、蒙特卡罗模拟、质量控制.

本书致力于内容安排紧凑、讲述深入浅出、思路清晰、说理清楚、简洁明了，努力做到便于教师教学和学生学习. 本书在引入基本概念时注意揭示其直观背景和实际意义，在叙述基本概念和基本方法时注意阐明其概率和统计意义. 在选配例题和习题时，着力使学生加深理解基本理论和基本方法的内容实质以及了解基本理论和基本方法是怎样用于解决实际问题的.

概率论与数理统计是一门应用性很强、很广泛的学科，本书试图从两个方面来反映它的应用. 一是贯穿在全书的应用性例题和习题中. 概率统计课程的实际背景是十分丰富和广泛的，读者将会看到有些题目虽然只是一个简单的题目，但它却能显示出概率统计在某一类生产技术和生活等方面的应用. 二是专门有一章“概率论与数理统计的一些应用”，这一章中的 4 节内容实际上分别是 4 个应用学科的基本知识. 读者将会看到这些学科所用到的数学基础就是概率论或（与）数理统计. 当读者遇到有关问题时，或是可以初步应用，或是可以以本书提供的基本知识作为一个“起跑点”去进一步学习，以解决问题. 学习这本书，可以将所学的知识与广泛的应用连接起来，希望读者在今后的学习和工作中遇到有关问题时，会想到“我是否能用概率论与数理统计的方法来解决呢？”

本书在内容的表达和例题、习题的选配上，注意引起读者的兴趣. 希望读者喜欢学习这一课程，希望读者能感到这是一门不难学好的课程.

书中有两处标有“*”的内容，视学时情况可以少讲或不讲，供学生参阅.

浙江大学范大茵教授详细审阅了本书的全部书稿，并提出了许多宝贵的意

见．谨表示衷心的感谢．

张忠明同志承担了全部输入和排版工作，并绘制了全部插图，我们表示衷心的感谢．

诚恳地希望广大读者批评指正．

盛　骤　谢式千

2004 年 4 月

目　　录

第 1 章　随机事件及其概率

自然界和人们在社会实践中发生的现象是多种多样的.有一类现象,在一定条件下必然发生,例如:同性电荷必定互相排斥;在一个大气压下,水加热到100℃一定沸腾等等.这类现象称为**确定性现象**.另一类现象,例如,抛一枚硬币,其结果可能是花一面朝上,也可能是数字一面朝上,在抛掷之前无法预知抛掷的结果,呈现出不确定性,但多次重复抛同一枚硬币,得到花一面朝上大致有半数,却呈现出规律性.这种在个别试验或观察中其结果呈现出不确定性,在大量重复试验或观察中其结果又呈现出规律性的现象称为**随机现象**.概率论与数理统计是研究和揭示随机现象所具有的规律性的一门数学学科.

1.1　随机试验、样本空间

我们将试验作为一个含义广泛的术语,它包括各种各样的实验、试验和检验,甚至对某一事物的某一特征的观察也认为是一种试验.概率论与数理统计要研究的是随机现象,因而我们要求试验具有下述三个性质:

1° 可以在相同条件下重复进行;

2° 每次试验的可能结果不止一个,并且,在试验之前能明确试验的所有可能结果;

3° 进行一次试验之前不能预知哪一个结果会出现.

具有 1°,2°,3° 三个性质的试验称为**随机试验**.以后我们提到的试验都指的是随机试验.

下面举一些随机试验的例子.

E_1:抛一枚硬币,观察正面 H,反面 T 出现的情况.

E_2:抛两枚硬币,观察正面、反面出现的情况.

E_3:抛一颗骰子,观察出现的点数.

E_4:记录某城市 114 电话号码查询台一昼夜接到的呼叫次数.

E_5:在一批灯泡中任取一只,测试它的寿命.

E_6:在单位圆内任取一点,记录它的坐标.

这些试验都具有上述 1° ~ 3° 的三个性质,它们都是随机试验.

如上所说,一个试验的所有可能结果是预先知道的.我们将试验 E 的所有

可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**，记为 S. 样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为**样本点**.

下面写出上述试验 $E_i(i=1,2,\cdots,6)$ 的样本空间 S_i：

S_1：$\{H,T\}$.

S_2：$\{HH,HT,TH,TT\}$.

S_3：$\{1,2,3,4,5,6\}$.

S_4：$\{0,1,2,\cdots\}$.

S_5：$\{t \mid t \geqslant 0\}$.

S_6：$\{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$.

1.2　随机事件

1. 随机事件

在研究试验的结果时，人们不但关心试验的单个样本点，而常常对试验的某些样本点所组成的集合更感兴趣. 例如，若规定某种灯泡的寿命小于 1000 小时为次品，那么在 E_5 中我们关心灯泡的寿命是否有 $t \geqslant 1000$(小时)，满足这一条件的样本点组成 S_5 的一个子集：$A=\{t \mid t \geqslant 1000\}$，我们称 A 是试验 E_5 的一个随机事件，显然当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时，有 $t \geqslant 1000$(小时)，即有灯泡合格.

一般，我们称试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的**随机事件**，简称**事件**. 在一次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时称这一事件**发生**. 随机事件用大写的字母如 A,B,C 等来表示.

下面举出一些随机事件的例子.

例 1　在 E_2 中，事件"两枚硬币出现同一面"，即

$$A_1=\{HH,TT\},$$

事件"两硬币至少有一枚出现正面"，即

$$A_2=\{HH,HT,TH\},$$

在 E_3 中事件"出现偶数点"，即

$$A_3=\{2,4,6\},$$

在 E_5 中，事件"寿命小于 1000 小时"，即

$$A_4=\{t \mid 0 \leqslant t<1000\}. \qquad \square$$

特别地，由一个样本点组成的单点集，称为**基本事件**. 例如，在 E_1 中有两个

基本事件$\{H\}$与$\{T\}$，在E_3中有6个基本事件$\{1\},\{2\},\cdots,\{6\}$，在E_4中有可列个基本事件$\{0\},\{1\},\{2\},\cdots$，在E_5中有不可列个基本事件，例如$\{t=1000\}$，$\{t=1500\}$等等.

样本空间S包含所有的样本点，它是它自身的子集，它在每次试验中都发生，称为**必然事件**.空集$\varnothing$不包含任何样本点，它也作为样本空间的子集.它在每次试验中都不发生，称为**不可能事件**.

2.事件间的关系与事件的运算

事件是一个集合，因此事件间的关系和运算自然按照集合论中集合间的关系与集合运算来处理.下面给出这些关系与运算在概率论中的含义.

设试验E的样本空间为S，而$A,B,A_i(i=1,2,\cdots)$是S的子集.

1° 若$A\subset B$，则称**事件B包含事件A**.这指的是事件A发生必导致事件B发生.

2° 若$A\subset B$且$B\subset A$，即$A=B$，则称事件A与事件B**相等**.

3° 事件$A\cup B=\{x\mid x\in A$或$x\in B\}$称为事件A与事件B的**和事件**.当且仅当A,B中至少有一个发生时，事件$A\cup B$发生.事件$A\cup B$也是事件"或A发生或B发生".

类似地，称$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$为$n$个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的和事件，称$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$为可列个事件$A_1,A_2,\cdots$的和事件.

4° 事件$A\cap B=\{x\mid x\in A$且$x\in B\}$称为事件A与事件B的**积事件**.当且仅当A,B都发生时，事件$A\cap B$发生.$A\cap B$也记作AB.

类似地，称$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$为$n$个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的积事件，称$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$为可列个事件$A_1,A_2,\cdots$的积事件.

5° 事件$B-A=\{x\mid x\in B$且$x\notin A)\}$称为事件B与事件A的**差事件**.当且仅当B发生且A不发生时，事件$B-A$发生.

6° 若$A\cap B=\varnothing$，则称事件A与事件B是**互不相容的**，或**互斥的**.这指的是事件A与事件B不能同时发生.基本事件是两两不相容的.

7° 若$A\cup B=S$且$A\cap B=\varnothing$，则称事件A与事件B互为**对立事件**.又称事件A与事件B为**互逆事件**.这指的是，对每一次试验而言，事件A、B中必有一个发生，且仅有一个发生.A的对立事件常记为$\bar{A}$.$\bar{A}=S-A$，$\bar{A}\cup A=S$.

我们用以下的图形(图1-1～图1-6)来表示上述事件间的关系与运算.例如在图1-2中，圆A与椭圆B分别表示事件A与事件B，矩形表示样本空间S，而有斜线的部分表示和事件$A\cup B$.

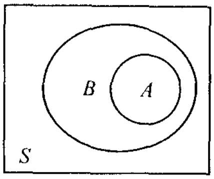

图 1 - 1　$A \subset B$

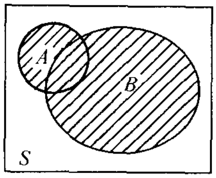

图 1 - 2　$A \cup B$

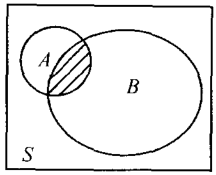

图 1 - 3　$A \cap B$

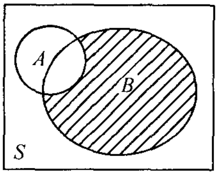

图 1 - 4　$B - A$

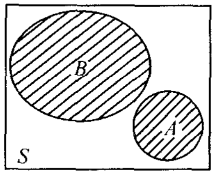

图 1 - 5　$A \cap B = \varnothing$

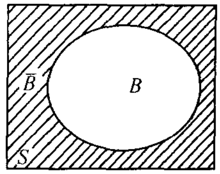

图 1 - 6　$B \cup \bar{B} = S, B \cap \bar{B} = \varnothing$

在进行事件的运算时，经常要用到下列定律. 设 A, B, C 为事件，则有

交换律：$A \cup B = B \cup A$，　$A \cap B = B \cap A$.

结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$；

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$；

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

德摩根律：$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$，　$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

例 2　试验为抛一颗骰子观察出现的点数，样本空间为 $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. 设事件 $A = \{1,3,5\}$，$B = \{4,6\}$，$C = \{1,4\}$，求 $A \cap B$，$B \cup C$，$A \cup (B \cap C)$，$\overline{A \cup B}$，$C - A$.

解　$A \cap B = \{1,3,5\} \cap \{4,6\} = \varnothing$，

$B \cup C = \{4,6\} \cup \{1,4\} = \{1,4,6\}$，

$A \cup (B \cap C) = \{1,3,5\} \cup (\{4,6\} \cap \{1,4\})$

$= \{1,3,5\} \cup \{4\} = \{1,3,4,5\}$，

$\overline{A \cup B} = \overline{\{1,3,4,5,6\}} = \{2\}$，

$C - A = \{1,4\} - \{1,3,5\} = \{4\}$.　□

例 3　设 A, B, C 是三个事件，试以 A, B, C 的运算关系表示下列各事件：

(1) A 发生，B 与 C 不发生；

(2) A, B, C 都不发生；

(3) A, B, C 中至少有一个发生；

(4)A,B,C 中恰有一个发生；

(5)A,B,C 中不多于一个发生；

(6)A,B,C 中不多于两个发生；

(7)A,B,C 中至少有两个发生.

解 以 $G_i(i=1,2,\cdots,7)$ 表示所要求的事件.注意到一个事件不发生，即为它的对立事件发生.例如事件 A 不发生即为 $\overline{A}$ 发生.

(1) B 与 C 不发生，意味着 $\overline{B},\overline{C}$ 均发生.本题是说 $A,\overline{B},\overline{C}$ 都发生，即有 $G_1=A\overline{B}\overline{C}$.

(2) A,B,C 都不发生，即 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 都发生，即有 $G_2=\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

(3) 由和事件的含义知，事件 $A\cup B\cup C$ 即表示 A,B,C 中至少有一个发生，故 $G_3=A\cup B\cup C$.

(4) A,B,C 中恰有一个发生，但未指定是哪一个发生，于是可以是恰有 A 发生或恰有 B 发生或恰有 C 发生.若恰有 A 发生则必须有 B,C 都不发生，因而 A,B,C 中恰有 A 发生可表示为 $A\overline{B}\overline{C}$.类似地恰有 B 发生可表示为 $\overline{A}B\overline{C}$，恰有 C 发生可表示为 $\overline{A}\overline{B}C$.因此 $G_4=A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$.

(5) "A,B,C 中不多于一个发生"表示 A,B,C 中至少有两个不发生，亦即 $\overline{A}\overline{B},\overline{B}\overline{C},\overline{A}\overline{C}$ 中至少有一个发生，即 $G_5=\overline{A}\overline{B}\cup\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}\overline{C}$.

又"A,B,C 中不多于一个发生"表示 A,B,C 都不发生或恰有一个发生，故又有 $G_5=\overline{A}\overline{B}\overline{C}\cup A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$.

(6) "A,B,C 中不多于两个发生"表示 A,B,C 中至少有一个不发生，即 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 中至少有一个发生.故 $G_6=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$，亦即 $G_6=\overline{ABC}$.

(7) $G_7=AB\cup BC\cup CA$. □

1.3 随机事件的概率

在一次试验中，一个事件(除不可能事件与必然事件外)可能发生也可能不发生.我们观察试验中的各个事件，常会发现有些事件在一次试验中发生的可能性较大，而另一些事件发生的可能性较小.例如，在抛一颗骰子观察它的点数的试验中，事件"出现偶数点"比事件"出现1点"发生的可能性要大.我们希望对每个事件能指定一个数，能用它来表示事件在一次试验中发生的可能性的大小.下面先从"频率"讲起.

1.事件的频率

在相同的条件下将试验重复进行 n 次，在 n 次试验中，事件 A 发生了 f_A 次，f_A 称为事件 A 在这 n 次试验中发生的**频数**，而比值

$$R_n(A) = f_A / n$$

称为事件 A 在这 n 次试验中发生的**频率**.

例 1　将一枚硬币抛 5 次,10 次,20 次,…,2520 次,得到数据如表 1.1,并将数据画在图 1－7 中.表中 n_H 表示在 n 次试验中 H 出现的频数,比值 n_H/n 记成 $R_n(H)$.它是在这 n 次试验中出现 H 的频率.

表 1.1

n	n_H	$R_n(H)$	n	n_H	$R_n(H)$	n	n_H	$R_n(H)$
5	2	0.400	80	39	0.488	700	354	0.506
10	3	0.300	105	51	0.486	869	435	0.501
20	13	0.650	141	68	0.482	1065	540	0.507
30	14	0.467	190	91	0.479	1290	650	0.504
40	20	0.500	254	128	0.504	1546	771	0.499
51	29	0.569	335	173	0.516	1835	906	0.494
55	30	0.545	435	222	0.510	2159	1086	0.503
64	33	0.516	556	276	0.496	2520	1270	0.504

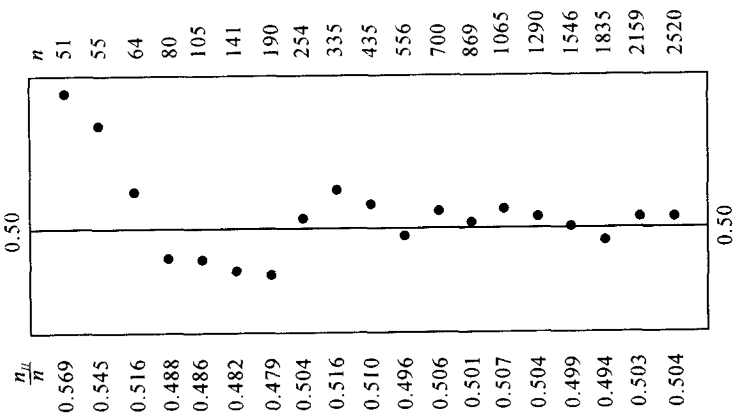

图 1－7

这种试验以前也有人做过,得到如表 1.2 所示的数据.

表 1.2

实验者	n	n_H	$R_n(H)$
蒲丰	4040	2048	0.5069
K.皮尔逊	12 000	6019	0.5016
K.皮尔逊	24 000	12 012	0.5005

从表 1.1 中的数据及图 1 - 7 可以看出，抛硬币次数 n 较小时，频率 $R_n(H)$ 在 0 与 1 之间随机波动，其幅度较大．但随着 n 增大，频率 $R_n(H)$ 呈现出稳定性，即当 n 逐渐增大时，$R_n(H)$ 总在 0.5 附近徘徊，而逐渐稳定于 0.5. □

例 2 考察新生婴儿的性别．表 1.3 给出了波兰从 1927 年到 1932 年间出生的婴儿总数，以及其中的男婴数．

表 1.3

年份	1927	1928	1929	1930	1931	1932	共计或平均
出生数	958 733	990 993	994 101	1 022 811	964 573	934 663	5 865 874
男婴数	496 544	513 654	514 765	528 072	496 986	482 431	3 032 452
频率	0.518	0.518	0.518	0.516	0.515	0.516	0.517

“出生男婴”是一个随机事件．在任何个别情况下，我们不能预知新生婴儿的性别，但是经过对很多新生婴儿的性别作观察，例如从上表中看到出生男婴的频率在 0.517 附近徘徊．拉普拉斯(1794—1827) 在他的名著《概率论的哲学探讨》中研究了男婴出生的频率．他对伦敦、彼得堡、柏林和全法国的大量人口资料进行了研究，发现男婴出生频率几乎完全一致，并且这些男婴出生频率总在一个数左右徘徊，这个数大约是 22/43．另一位统计学家克拉梅(1893—1985) 在他的名著《统计学数学方法》中引用了瑞典 1935 年的官方统计资料，该资料表明，出生男婴的频率稳定在 0.518 左右． □

大量试验证实，随机事件 A 发生的频率 $R_n(A)$，当重复试验的次数 n 增大时，总呈现出稳定性，稳定在某一个常数的附近．这是随机现象固有的性质．“频率的稳定性”就是我们通常所说的**统计规律性**．这也是下面我们定义事件概率的客观基础．

频率具有以下三条性质．设试验 E 的样本空间为 S，而 A,B 是 E 的两个事件，则有：

1° 对于任意事件 A，有 $0 \leqslant R_n(A) \leqslant 1$；

2° 对于必然事件 S，有 $R_n(S) = 1$；

3° 对于互不相容的事件 A,B，有

$$R_n(A \cup B) = R_n(A) + R_n(B).$$

证 1°,2° 显然成立．现在来证明 3°．因为 $A \cup B$ 发生必为 A,B 中至少有一个发生．又因 A,B 互不相容，所以在 n 次试验中 $A \cup B$ 发生的次数必为 A 发生的次数与 B 发生的次数之和，即

$$n_{A \cup B} = n_A + n_B,$$

其中 $n_{A \cup B}, n_A, n_B$ 分别是在 n 次试验中事件 $A \cup B, A, B$ 发生的次数．在上式中两边同除以 n，即得