21世纪高等学校规划教材·高职高专专用

实用高等数学教程

（上册）

Practical Coursebook on Advanced Mathematics

主编　焦曙光　郭建萍　贾进涛　　　主审　韩成标

国防工业出版社

http://www.ndip.cn

21世纪高等学校规划教材·高职高专专用

实用高等数学教程

（上册）

主编　焦曙光　郭建萍　贾进涛
主审　韩成标

国防工业出版社
·北京·

内容简介

全书内容共十一章，分别是：函数的极限与连续、导数与微分、微分中值定理和导数的应用、定积分与不定积分、定积分的应用、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、高等数学软件包 Mathematica 简介（DOS 版书）。书后附有三个附录：初等数学中的常用公式、几种常用的曲线（$a>0$）、积分表。全书分为上、下册，前六章为上册，后五章为下册。

本书说理浅显，便于自学，可作为高等专科教育、高等职业教育、成人教育工科类各专业教材，也可作为工程技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

实用高等数学教程／焦曙光等主编．—北京：国防工业出版社，2004.8

21 世纪高等学校规划教材·高职高专专用

ISBN 7-118-03510-6

Ⅰ.实…　Ⅱ.焦…　Ⅲ.高等数学－高等学校：技术学校－教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 063039 号

国防工业出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路 23 号）

（邮政编码　100044）

涿中印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092　1/16　印张 28　634 千字

2004 年 8 月第 1 版　　2004 年 8 月北京第 1 次印刷

印数：1—5000 册　　定价：38.00 元

前　　言

在进入 21 世纪之际，我国的高等教育正面临进一步发展的契机，高等职业教育是加速发展的高等教育的一个重要组成部分。为了适应高职高专教育发展的需要，急需编写适用的、具有特色的教材。本教材正是针对这一需要编写的。

本教材力求贯彻“以应用为目的，以必需够用为度”。其特点是，结合目前我国高职高专生源的特点及编者多年参与全国大学生数学建模指导的经验和体会，在保持数学体系基本完整的前提下，降低数学理论，淡化抽象的理论推导；例题设置由浅入深，分析透彻、准确、清晰，突出直观教学；通过有机地渗透简单的数学模型，培养学生的应用意识，提高学生学习高等数学的兴趣；每节后配有习题，每章后配有复习题，书末附有初等数学常用公式表、积分表、常用平面曲线、部分习题答案等；将现代化的计算工具——高等数学软件包（Mathematica）编入教材并作为一章；在适当的章、节加入了一些数学家的生平简介，以其扩展学生的知识面。

本教材共设十一章，主要包括：一元函数、微积分学、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分学、无穷级数、Mathematica 简介。上、下册共计约 55 万字，授课学时可控制在 120 学时 ~ 150 学时。对于标有 * 号的内容可根据专业需要选取。

各章撰写人分别是：第一章、第八章为贾进涛，第二章、第三章、第十一章为陶华，第四章、第七章为杜玉贞，第五章、第九章为郭建萍，第六章、第十章为焦曙光。韩成标副教授对全套教材作了认真的审核。

由于作者水平有限，书中的错误和不当之处，恳请读者和同行批评指正。

编　者

2004 年 2 月

目　录

第一章　函数的极限与连续

数学是研究现实世界中空间形式与数量关系的学科.初等数学研究的对象基本上是不变量,而高等数学则是以变量为研究对象的一门数学.变量与变量之间相互依赖的函数关系及其属性是高等数学的主要研究对象,极限概念及其运算法则是研究函数的主要工具,高等数学中的许多概念及运算法则都是在研究极限的基础上建立起来的.

本章将在中学数学的基础上对函数概念做必要的补充,提出微积分产生的两个基本问题,引进函数的极限与连续以及它们的运算法则与性质.

第一节　函　数

一、常量与变量

现实世界中的事物往往表现为各式各样的量.有些量在整个过程中保持一确定的数值,这种量称为常量;有些可以取不同的数值,这种量叫做变量.习惯上,通常用字母 a、b、c 等表示常量,用字母 x、y、z 等表示变量.

例如,在研究自由落体运动中,物体的质量 m、重力加速度 g 是常量,而运动时间 t、速度 v 和距离 s 是变量.

二、区间与邻域

讨论变量间的数量关系时,必须明确变量的取值范围,数集是表示取值范围的一种常用方法.

1. 常用数集

在本书中,变量总是在实数范围内讨论.常用的数集除了有自然数集 $\mathbf{N}$、整数集 $\mathbf{Z}$、有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$ 外,还有各种类型的区间.设 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$,

开区间 $(a,b)=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x<b\}$;

闭区间 $[a,b]=\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x\leqslant b\}$;

左半开区间 $(a,b]=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x\leqslant b\}$;

右半开区间 $[a,b)=\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x<b\}$;

无穷区间 $(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$;

$(a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x\}$;

$[a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x\}$;

$(-\infty,b)=\{x\in\mathbf{R}\mid x<b\}$;

$(-\infty,b]=\{x\in\mathbf{R}\mid x\leqslant b\}$.

此外,邻域是一个与区间有关并且经常用到的概念,现在引入.

2. 邻域

定义 1 设 $a,\delta\in\mathbf{R},\delta>0$,数集 $\{x \mid |x-a|<\delta,x\in\mathbf{R}\}$,即实数轴上和 a 点的距离小于 δ 的点的全体,称为点 a 的 δ **邻域**,记作 $N(a,\delta)$,点 a 与数 δ 分别称为这邻域的**中心**与**半径**.有时用 $N(a)$ 表示点 a 的一个泛指的邻域.数集 $\{x\in\mathbf{R}\mid 0<|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的**空心 δ 邻域**,记作 $N(\hat{a},\delta)$.

显然,$N(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$,$N(\hat{a},\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$.

几何上,点 a 的 δ 邻域是以 a 为中心,δ 为半径的开区间.如图 1-1 所示.

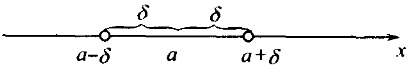

图 1-1

三、函数的概念

定义 2 设 x 和 y 是两个变量,D 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集,任意 $x\in D$,变量 y 按照某个对应关系 f 有惟一确定的实数与之对应,记作 $y=f(x)$,则称 f 是定义在 D 上的**函数**,x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,D 称为函数 f 的**定义域**,数集 $\{f(x)\mid x\in D\}$ 称为函数 f 的**值域**.

由于常常通过函数值讨论函数,因此习惯上把自变量为 x、因变量为 y 的函数 f 记成 $y=f(x)$.

由上述定义可知,对应关系与定义域是构成函数的两个要素.如果两个函数具有相同的对应关系和定义域,那么这两个函数是相同的.由于函数 $y=|x|$ 与 $y=x$ 的对应关系不同,因此它们是两个不同的函数;由于函数 $y=2\ln x$ 与 $y=\ln(x^2)$ 的定义域不同,因此它们也是两个不同的函数;而函数 $y=|x|$ 和 $y=\sqrt{x^2}$ 则是同一个函数.

例 1 某地2000 年 5 月 15 日 ~ 19日每日最高气温如下表:

日期 t/日	15	16	17	18	19
最高气温 N/℃	24	25	27	28	28

这个表格确实表达了温度是日期的函数,这里不存在任何计算温度的公式(否则就不需要气象局了),但是每一天都会产生出一个惟一的最高气温,对每个日期 t,都有一个与 t 相应的惟一最高气温 N.

例 2 李先生外出郊游,他匀速前进,离家不久,他发现一骑车人的车坏了,他帮助这个人把车修好,随后继续赶路.请把李先生离家的距离关于时间的函数用图形描述出来(见图 1-2).

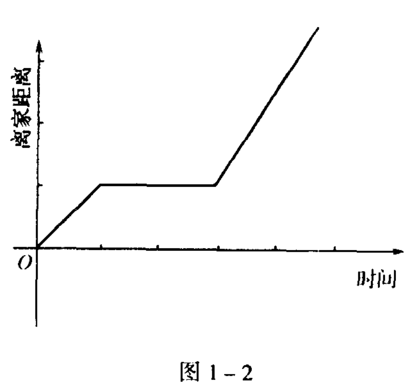

图 1-2

例 3 函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1\ , & 当\ x>0,\\ 0\ , & 当\ x=0,\\ -1\ , & 当\ x<0.\end{cases}$$

称为符号函数,它的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,它

的图形如图 1－3 所示，对于任何实数 x，下列关系成立：

$$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$$

例如，$\operatorname{sgn}(-3)\cdot|-3|=(-1)\cdot3=-3$.

例 4　数学式

$$y=f(x)=|x|=\begin{cases}x\ , & x\geqslant0,\\ -x\ , & x<0.\end{cases}$$

表明变量 y 是 x 的函数，它的图像如图 1－4 所示.

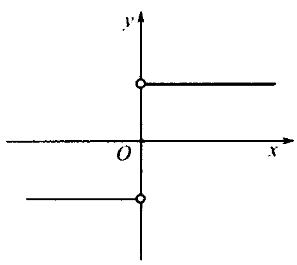

图 1－3

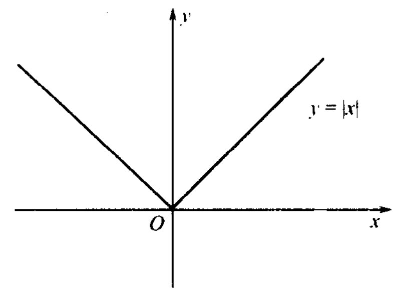

图 1－4

例 5　数学式

$$y=f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0\leqslant x<1,\\ -x-1, & -1\leqslant x<0.\end{cases}$$

也表明变量 y 是 x 的函数.

函数的定义域，对于表示实际问题的函数关系，定义域应由所研究问题的实际意义来确定. 如研究物体的自由落体运动，如果用 T 表示物体落地的时刻，则自由落体运动中物体下落的距离与时间的函数关系式 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 的定义域就是区间$[0,T]$. 对于抽象地用公式表达的函数，函数的定义域是自变量所能取的使公式有意义的一切值. 如例 3 与例 4 中函数的定义域为 $D=\mathbf{R}$. 而例 5 中的函数，其自变量的取值范围在函数表达式中已经给定了，它的定义域为 $D=[-1,1)$.

例 6　确定函数 $y=\arcsin\frac{x-3}{2}+\ln(x-1)$的定义域.

解　要使 y 有确定的值，必须

$$\begin{cases}\left|\dfrac{x-3}{2}\right|\leqslant1,\\ x-1>0,\end{cases}$$

解得 $-2\leqslant x-3\leqslant2$ 且 $x>1$，即 $1\leqslant x\leqslant5$ 且 $x>1$，于是定义域为$(1,5]$.

四、函数的表示法

表示函数，要把它的定义域和对应关系表述清楚. 一般可根据函数自身的特点选择适当的表示方法. 常用的方法有：图示法、表格法和公式法（解析法）.

(1) 以图形形式表示函数的方法称为函数的**图示法**. 如例 2 的函数就是用图示法表示的.

(2) 以表格形式表示函数的方法称为函数的**表格表示法**. 如例 1 以及三角函数表、对数用表等都是用表格法表示的.

(3) 用数学式表示函数的方法称为函数的公式表示法,也称为**解析法**. 如例 4 与例 5 及例 6 都是用公式法表示的.

例 6 中的函数,与定义域中任意一个 x 相对应的 y 都用同一个解析式表示,而例 3、例 4 与例 5 中的函数,函数的定义域中不同部分的 x,相对应的 y 的解析式不相同. 这种对定义域中的不同部分,对应关系用不同的式子表示的函数,称为分段函数. 例 3、例 4 与例 5 的函数都是分段函数,不过例 4 中的分段函数可以等价变形为 $y=\sqrt{x^2}$,即对应关系可以化成一个式子.

必须注意:分段函数是用几个式子表示一个(不是几个)函数. 在科技、工程中经常用到分段函数.

公式法表示函数,除了以上直接用自变量的式子表示以外,还有以下形式.

若变量 x、y 之间的函数关系是由一个含 x、y 的方程 $F(x,y)=0$ 给出的,则称 y 是 x 的隐函数. 相应地,把直接由自变量的式子表示的函数称为显函数. 如 $x^2+y^2=2$, $3x+5y+2=0$, $e^{3x}+y+x+e^y=0$(e 是一个大于 1 的常数)等确定的函数都是隐函数. 而 $y=2x+1$ 与 $y=\cos x$ 等都是显函数. 由方程 $3x+5y=2$ 可以解得 $y=\frac{2}{5}-\frac{3}{5}x$,即由方程 $3x+5y=2$ 确定的隐函数可化为显函数,这个过程称为隐函数的显化,但不是每个隐函数都可以显化,如方程 $e^{3x}+y+x+e^y=0$ 确定的隐函数是无法显化的,因此隐函数是表达函数的一种必不可少的形式.

若变量 x、y 之间的函数关系是通过参数方程给出的,这样的函数称为由参数方程确定的函数,简称参数式函数,t 称为参数,如下式:

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (t\in T).$$

例如椭圆的参数方程可以写为

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t. \end{cases}$$

五、函数的几种特性

设函数的定义域为 D.

1. 有界性

设数集 $X\subset D$,存在正常数 M,任意 $x\in X$,相应的函数值满足 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果不存在这样的正常数 M,则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

如果 $f(x)$ 在 D 上有界,则称 $f(x)$ 为有界函数. 例如函数 $\cos x$ 是有界函数. 而虽然函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 内有界,但却是无界函数,因为当 $0<x<1$ 时,不论 M 多么大,取 $x=\frac{1}{M+1}$,都有 $\left|\frac{1}{x}\right|=M+1>M$,所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内无界,从而 $f(x)$ 在定义域内

无界,故 $f(x)$ 是无界函数.

2. 单调性

设区间 $I\subset D$,任意 $x_1,x_2\in I,x_1<x_2$,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的;如果任意 $x_1,x_2\in I,x_1<x_2$,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

在区间 I 上单调增加或单调减少的函数统称为区间 I 上的单调函数.

3. 奇偶性

设 D 关于原点对称,任意 $x\in D$,都有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为奇函数;任意 $x\in D$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为偶函数.

奇函数的图像关于原点对称;偶函数的图像关于 y 轴对称.

4. 周期性

设存在一个不为零的常数 T,任意 $x\in D$,有 $x\pm T\in D$,且 $f(x+T)=f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为周期函数,T 为 $f(x)$ 的周期.当周期函数存在最小正周期时,通常所说的周期指的是最小正周期.

周期函数若以 $T(>0)$ 为周期,则在每个长度为 T 的区间 $[nT,(n+1)T](n\in\mathbf{Z})$ 上函数的图像是相同的.

六、初等函数

1. 基本初等函数及其图像

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数等五类函数统称为**基本初等函数**,它们的图像如图 1-5 所示.

2. 复合函数

先举一个例子,设 $y=\sqrt{u}$ 而 $u=1-x^2$,以 $1-x^2$ 代替第一式的 u,得 $y=\sqrt{1-x^2}$.称这个函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$,$u=1-x^2$ 复合而成的复合函数.必须注意,并不是任意两个函数都可以复合,如 $y=\arcsin u$,$u=x^2+2$ 在实数范围内就不能复合.

定义 3 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U,而 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 X,$D=\{x\in X\mid\varphi(x)\in U\}\neq\phi$,则任意 $x\in D$,通过 $u=\varphi(x)$,变量 y 有确定的值 $f(u)$ 与之对应,得到一个以 x 为自变量、y 为因变量的函数,该函数为 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$ 的**复合函数**.记作 $y=f[\varphi(x)]$,D 是它的定义域,u 称为**中间变量**.

如,函数 $y=\arctan(x^2)$ 可看作由 $y=\arctan u$ 及 $u=x^2$ 复合而成.这个函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,它也是 $u=x^2$ 的定义域.

复合函数也可以由两个以上的函数经过复合构成.例如,设 $y=\sqrt{u}$,$u=\cot v$,$v=\dfrac{x}{2}$,则得复合函数 $y=\sqrt{\cot\dfrac{x}{2}}$,这里 u 及 v 都是中间变量.

例 7 设 $f(x)=x^2$,$g(x)=2^x$,求 $f[g(x)]$,$g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=[g(x)]^2=(2^x)^2=4^x$,

$$g[f(x)]=g(x^2)=2^{(x^2)}=2^{x^2}.$$

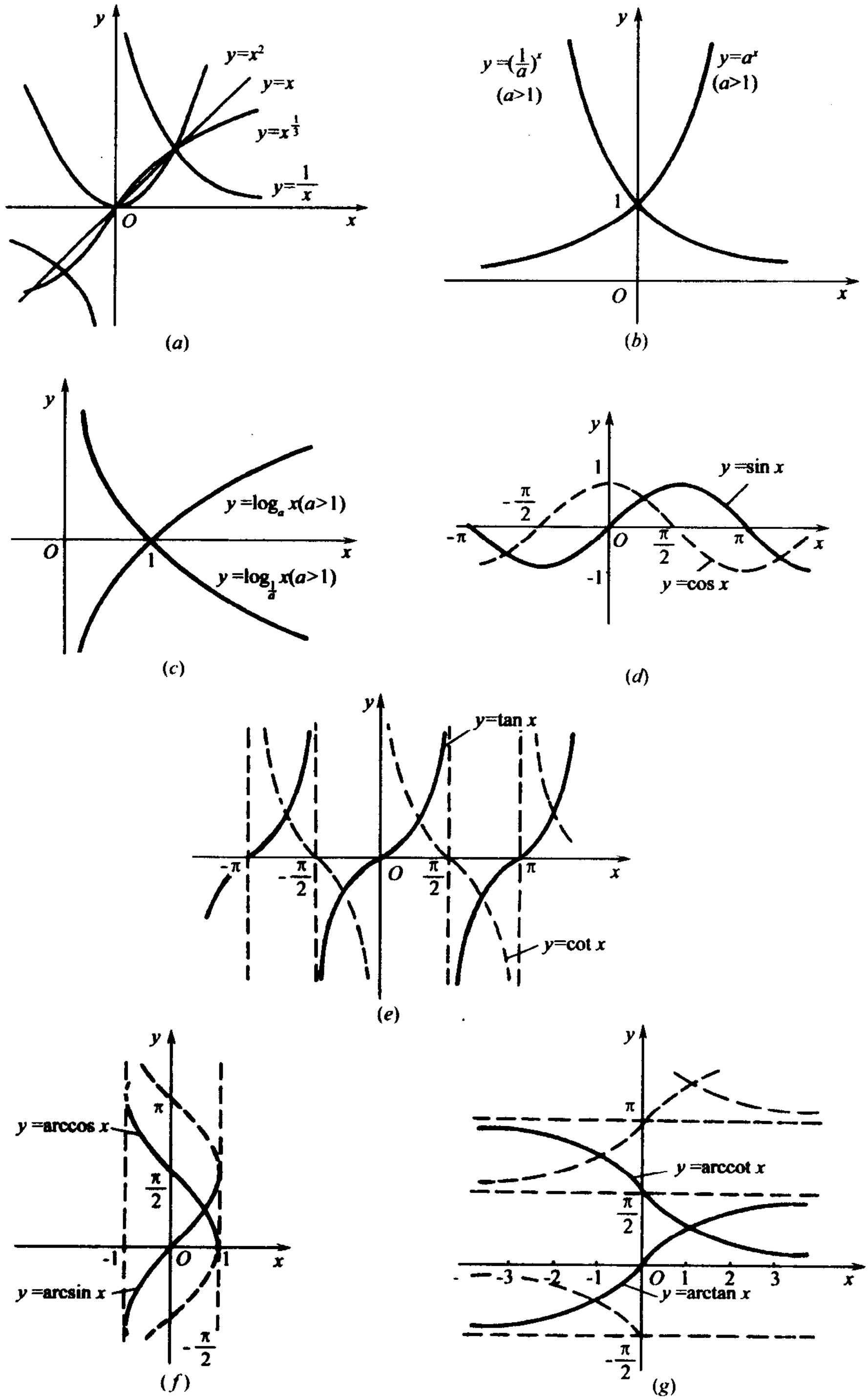

图 1-5

(a) 幂函数 $y=x^{a}$；(b) 指数函数 $y=a^{x}(a>0, a\neq 1)$；(c) 对数函数 $y=\log_{a}x(a>0, a\neq 1)$；($d$) 正弦函数与余弦函数；($e$) 正切函数与余切函数；($f$) 反正弦函数与反余弦函数；($g$) 反正切函数与反余切函数。

例 8　分析下列函数的复合过程：

(1) $y=\sin^2 x$；　　　(2) $y=e^{\sin\sqrt{x^2+1}}$.

解　(1) $y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2, u=\sin x$ 复合而成；

(2) $y=e^{\sin\sqrt{x^2+1}}$是由 $y=e^u, u=\sin v$、$v=\sqrt{t}$、$t=x^2+1$ 复合而成.

3. 初等函数

定义 4　由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合构成的，可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

例如，$y=2x^2+1$、$y=\sin\dfrac{1}{x}$、$y=|x|=\sqrt{x^2}$等都是初等函数. 高等数学中讨论的函数许多都是初等函数.

习题　1－1

1. 用区间表示下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；　(2) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$；　(3) $y=\arcsin(x-3)$；

(4) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；　(5) $y=\ln(x+1)$；　(6) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

2. 设 $f(x)=\sqrt{4+x^2}$，求下列函数值：

$f(0)$，$f(1)$，$f(-1)$，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$，$f(x_0)$，$f(x_0+h)$.

3. 设 $f(x)=\arcsin x$，求下列函数值：

$f(0)$，$f(-1)$，$f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$f(1)$.

4. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0\ , & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$ 求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$.

5. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$，　$g(x)=2\lg x$；

(2) $f(x)=x$，　$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，　$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；

(4) $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$，　$g(x)=\sin x$.

6. 确定下列函数的奇偶性：

(1) $y=\dfrac{\sin x}{x}$；　(2) $y=\sin x+\cos x$；　(3) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；

(4) $y=\log_2(x+\sqrt{x^2+1})$.