大学数学基础与提高丛书

主编 雷发社

线性代数重点难点30讲

XIANXINGDAISHU ZHONGDIANNANDIAN

本书特色

全方位精讲线性代数30个重点难点，深入浅出，化难为易，堪称本专科生、考研学生、科教人员的良师益友。

多角度精析300道典型例题，系统讲述解题方法与技巧，可作习题讨论课、考研提高课的首选教材。

陕西科学技术出版社

线性代数

重点难点30讲

主　编　雷发社

编　者　孙淑娥　文　杰　茹世才

　　　　贺西玲　刘孝艳　李毅君

陕西科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数重点难点30讲/雷发社主编．—西安：陕西科学技术出版社，2004.3
ISBN 7-5369-3751-2

I.线... II.雷... III.线性代数—自学参考资料
IV.0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第005287号

出版者	陕西科学技术出版社 西安北大街131号　邮编710003 电话(029)87211894 传真(029)87218236 http://www.snstp.com	
发行者	陕西科学技术出版社 电话(029)87212206　87260001	
印刷	航天工业总公司210所印刷厂	
规格	787mm×1092mm　16开本	
印张	12	
字数	312千字	
版次	2004年5月第1版 2004年5月第1次印刷	
定价	17.00元	

前　言

线性代数与高等数学、概率统计一样，是重要的基础课程之一。由于线性代数理论上的高度抽象性及计算上的复杂性，使得初学者在有限的学时内难以理解接受。正因于此，对初学线性代数的读者来说，往往听讲时抓不住重点，课后不知如何去解题，所以希望能有一本满意的参考书，帮助他们尽快地突破难点、抓住重点，牢固地掌握基本知识；且在此基础上，学会并掌握较为系统的解题方法。为了满足同学们的上述愿望，我们总结多年从事线性代数教学的经验，编写了这本《线性代数重点难点30讲》。

本书的特点是：一、突出重点难点。全书将线性代数各个章节中的重要的、难以理解掌握的知识点一一抽取出来，从多角度进行详细的讲解与讨论，起到化难为易的功效；二、介绍解题方法系统全面。每一讲精选出若干个典型例题，通过对这些有代表性的例题由浅入深的详细剖析，使同学们达到举一反三的效果；三、适用面广。由于本书选材的多样性及综合性使得它既适用于理工类、又适用于经管类本科生；既可作为初学者的辅助教材，又可作为准备报考硕士研究生的考生考前复习训练的指导书。

由于编者水平有限，书中错误之处敬请读者批评指正。

编　者

目 录

第 1 讲 行列式的定义

行列式的定义有三种：一是“逆归”定义，二是“逆序”定义，三是公理化定义. 如果用“逆序”定义行列式，那么“逆归”定义就成为行列式“按一行展开”的性质，行列式的性质将在下一讲中讲到，本讲重点在于对“逆序”定义的理解.

要理解“逆序”定义，首先要理解排列及其逆序数的概念，其次要熟悉关于对换的主要结论. 与逆序数密切相关的行列式的定义是计算行列式的依据.

一、排列和逆序

例 1 确定下列排列的逆序数，并确定是偶排列还是奇排列.

(1) 2 4 5 3 1 8 7 6; (2) $2\ 4\ 6\cdots(2n)(2n-1)(2n-3)\cdots3\ 1$.

解 (1) **解法 1** 计算出排列中每个数排在其前面大于该数的数字个数即该数的逆序数：2 排在首位，逆序数总是 0；4 前面比 4 大的数有 0 个，故 4 的逆序数为 0；同理，5 的逆序数也为 0；3 前面鄙 3 大的数有两个，所以 3 的逆序数为 2；同理可知 1 的逆序数为 4；8 是最大数，逆序数总是 0；7 与 6 的逆序数分别为 1,2，按表计算如下：

排 列	2 4 5 3 1 8 7 6
逆序数	0 0 0 2 4 0 1 2

故该排列的逆序数 $\tau=0+0+0+2+4+0+1+2=9$，从而知该排列为奇排列.

解法 2 计算出每个数排在其后而小于该数的数字个数也是该数的逆序数，按表计算如下：

排 列	2 4 5 3 1 8 7 6
逆序数	1 2 2 1 0 2 1 0

则该排列的逆序数 $\tau=1+2+2+1+0+2+1+0=9$，故该排列为奇排列.

(2) 按上述解法 2：

排 列	$2\ 4\ 6\cdots(2n)$	$(2n-1)$	$(2n-3)$	$\cdots3\ 1$
逆序数	$1\ 2\ 3\cdots n$	$n-1$	$n-2$	$\cdots1\ 0$

则此排列的逆序数 $\tau=1+2+3+\cdots+n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1$

$$=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n-1)n}{2}=n^2.$$

本题也可按例 1 所叙述的解法 1 求逆序数，但稍复杂一些，按表计算如下：

排 列	$2\,4\,6\cdots$	$2(n-2)$	$2(n-1)$	$2n$	$(2n-1)$	$(2n-3)$	$(2n-5)\cdots$	3	1
逆序数	$0\,0\,0\cdots$	0	0	0	1	3	5	$(2n-3)$	$(2n-1)$

则排列的逆序数为

$$\tau = 0+0+\cdots+0+1+3+5+\cdots+(2n-3)+(2n-1)$$
$$= n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2 = n+n^2-n = n^2.$$

(注意:$S_n = 1+3+5+\cdots+(2n-3)+(2n-1)$ 是公差为 2 的等差数列前 n 项的和.)

由于排列的逆序数 $\tau = n^2$,故 n 为奇数时,排列为奇排列,n 为偶数时,排列为偶排列.

由此可见:求 n 级排列逆序数问题的基本方法,就是按逆序定义,对排列中每一个数顺序地确定其逆序数. 按例 1 的求解方法 1,2,可以求出排列的逆序数.

例 2 在数 $1,2,\cdots,n$ 的任一排列中,逆序数和顺序数的和等于多少?(顺序数是任一排列中两个元素的先后次序是自然次序时,就说有 1 个顺序数,所有顺序数的总数叫这个排列的顺序数)

解 设 $a_1a_2\cdots a_n$ 是数 $1,2,\cdots,n$ 的任一排列,且此排列的逆序数为 S. 于是,对排列中任一元素 a_i,若其逆序数为 k_i,就是 a_i 比其后面的 k_i 个数大. 也可以说是,a_i 比其后面除 k_i 个数外的其他 $n-i-k_i$ 个数都小,即 a_i 后面的 $n-i-k_i$ 个数与 a_i 是顺序的,所以,此排列的逆序数为

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = S,$$

则顺序数为

$$\sum_{i=1}^{n}(n-i-k_i) = \sum_{i=1}^{n}(n-i) - \sum_{i=1}^{n}k_i = (n-1)+(n-2)+\cdots$$
$$+2+1-\sum_{i=1}^{n}k_i = \frac{n(n-1)}{2} - S,$$

因此,逆序数与顺序数的和是

$$\sum_{i=1}^{n}k_i + \sum_{i=1}^{n}(n-i-k_i) = S+\frac{n(n-1)}{2} - S = \frac{n(n-1)}{2}.$$

二、排列与对换

例 3 选择 r,s,t 使排列 $1r46s97t3$ 为偶排列.

解 由于排列是 9 级排列,所以可供 r,s,t 选择的元素有 2,5,8. 不妨设 $r=2,s=5,t=8$,则 $\tau(124659783)=9$(奇数). 由于对换改变排列的奇偶性,由此可知,当

$$r=5,s=2,t=8;$$

或

$$r=8,s=5,t=2;$$

或

$$r=2,s=8,t=5$$

时,此排列为偶排列.

三、n 阶行列式的定义

例 4 计算

$$D=\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&0&2&0\\0&3&0&0\\4&0&0&0\end{vmatrix}.$$

解 这是一个四阶行列式,在展开式中应有 $4!=24$ 项. 但是由于出现很多 0,故不为 0 的项数就大大减少了. 项的一般形式是

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4},$$

其中 $j_1j_2j_3j_4$ 是一个四元排列.

j_1 可取 1,2,3,4,但若 j_1 取 1,2,3 时,$a_{1j_1}=0$,从而不管后面的数怎样取,这些项都等于 0,故只考虑 $j_1=4$ 的那些项:

$$(-1)^{\tau(4j_2j_3j_4)}a_{14}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4};$$

j_2 可取 1,2,3(注意不可取 4). 但若 $j_2=1,2$ 时,$a_{2j_2}=0$,故只须考虑 $j_2=3$ 的那些项:

$$(-1)^{\tau(43j_3j_4)}a_{14}a_{23}a_{3j_3}a_{4j_4};$$

j_3 可取 1,2(注意不可取 3,4). 但若 $j_3=1$ 时,$a_{3j_3}=a_{31}=0$,故只须考虑 $j_3=2$ 的那些项:

$$(-1)^{\tau(432j_4)}a_{14}a_{23}a_{32}a_{4j_4};$$

这时 j_4 只能取 1,所以

$$D=(-1)^{\tau(4321)}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}=1\cdot2\cdot3\cdot4=24.$$

例 5 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

解 从行列式定义出发,行列式中的项是来自不同行不同列的 n 个元素的乘积,再在其前面冠以正号或负号. 因此,四阶行列式中含有 $a_{11}a_{23}$ 因子的项,还应取 3,4 行 2,4 列上的元素,即是含有 $a_{32}a_{44}$ 或 $a_{34}a_{42}$ 因子. 对于 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 前面的符号,由

$$\tau(1234)+\tau(1324)=1(\text{奇数})$$

确定为 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$,对于 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ 前面的符号,由

$$\tau(1234)+\tau(1342)=2(\text{偶数})$$

确定该项为 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$. 所以,含有 $a_{11}a_{23}$ 因子的四阶行列式中的项是 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 和 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

例 6 设 $a_{1i}a_{32}a_{54}a_{2j}a_{45}$ 为 5 阶行列式的一项,取负号,试确定 i,j.

解 因为项 $a_{1i}a_{32}a_{54}a_{2j}a_{45}$ 行标构成的逆序数为 $\tau(13524)=3$(奇数),所以,由题知,该

项列标构成的排列的逆序数应为偶数. 又 i,j 只能取 1,3, 当 $i=1,j=3$ 时, 则 $\tau(12435)=1$(奇数) 不符合要求, 于是, 应调换为 $i=3,j=1$.

例 7 按定义计算下面 n 阶行列式的值.

$$D_n=\begin{vmatrix} n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 按行列式定义, 该行列式中不含零的项只有 $a_{11}a_{n2}a_{23}a_{34}\cdots a_{n-1,n}$ 这一项, 而这 n 个元素列标为自然顺序排列, 而行标排列为 $1\ n\ 2\ 3\cdots n-1$, 故 $\tau(1\ n\ 2\ 3\cdots n-1)=n-2$. 又因为 $a_{11}=n, a_{n2}=1, a_{23}=2, a_{34}=3, \cdots a_{n-1,n}=n-1$. 所以, $D_n=(-1)^{n-2}n!$

一般地, 对于含零较多的行列式, 或上、下三角行列式通常用定义计算比较方便.

例 8 在函数

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$$

中, x^3 的系数是________.

解 根据行列式的定义, 仅当 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 四个元素相乘才能出现 x^3 项, 这时该项排列的逆序数为 $\tau(2134)=1$, $(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=-x^3$, 故含 x^3 的项的系数为 -1, 因此, 应填 -1.

第 2 讲　n 阶行列式的性质和计算

计算行列式的值是行列式理论的核心问题. 其基本方法有两种：一是直接按行列式定义计算，但它只适用于二、三阶行列式及特殊行列式，如上、下三角行列式，对角行列式；二是由行列式性质或由行列式性质与行列式按行(列)展开法联合使用的计算方法.

一、利用行列式的定义计算

例 1　利用对角线法则计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = bc^2 + ca^2 + ab^2 - a^2b - b^2c - c^2a$$

$$= bc(c-b) + a^2(c-b) + a(b^2-c^2)$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a).$$

注意　对角线法则只适用于二阶、三阶行列式的计算；含字母的二、三阶行列式计算结果应化简.

例 2　设 $f(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & x \\ 2 & 2 & 3 & x \\ -7 & 10 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 1 & x \end{vmatrix}$，求 $f(x)$ 中 x^2 的系数.

解　按照行列式的定义，$f(x)$ 的各项均取自不同行不同列的四个元素的乘积. 因此，含 x^2 的项由四项构成：

$$a_{11}a_{44}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{44}a_{23}a_{32} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{11}a_{24}a_{42}a_{33} = 16x^2.$$

故 $f(x)$ 中 x^2 的系数为 16.

例 3　计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & & & 1 \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & a \end{vmatrix},$$

其中主对角线上元素都是 $a(\neq 0)$，$a_{1n} = a_{n1} = 1$，其余位置均为零.

解　由 n 阶行列式定义知，D_n 中只有两项非零，即

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a^n, \qquad a_{1n}a_{22}\cdots a_{(n-1)(n-1)}a_{n1} = a^{n-2}.$$

又　　$\tau(12\cdots n)+\tau(12\cdots n)=0,\quad \tau(12\cdots n)+\tau(n2\cdots(n-1)1)=2n-3,$

故　　$D_n=a^n+(-1)^{2n-3}a^{n-2}=a^n-a^{n-2}=a^{n-2}(a^2-1).$

二、利用行列式性质计算

例 4　计算四阶行列式　$D=\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}.$

解　$D \xlongequal[\text{互换第 1,2 行}]{r_1\leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ -2 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_4-2r_1]{\substack{r_2+2r_1\\ r_3-3r_1}} -\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 26 & -33 & -24 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\substack{r_3+2r_2\\ r_4+2r_2}} -\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 17 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-\frac{17}{16}r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = -(-13)\cdot 16\cdot\frac{3}{2}=312.$$

此题解法是计算行列式的一般解法，特别是数字行列式，只要能使行列式变成上三角行列式，就可以写出行列式的值．但整个计算过程都必须耐心细致，因为“一着不慎，全盘皆输”（一个数字计算出错，将导致错误的结果）．因此，初学者要想迅速准确地计算出行列式的值，必须在掌握行列式性质的基础上进行大量的解题训练．此外，我们将看到：此项训练越扎实，该课程以后各章节（如矩阵变换，解方程组等）及后续课程（如线性规划等）的学习便越顺利．

例 5　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}.$$

解 因行列式各行元素之和相同,故

$$D \xlongequal{r_1+r_2+r_3} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-2cr_1]{r_2-2br_1} (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -(a+b+c) & 0 \\ 0 & 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix} = (a+b+c)^3.$$

例 6 计算 4 阶行列式:

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}.$$

解 行列式各行(列)的元素之和是相同的,于是与例 5 方法相同. 这里把各列都加到第 1 列上,再提取公因式 $a+3b$,并消元化简为上三角行列式:

$$D_4 \xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4} \begin{vmatrix} a+3b & b & b & b \\ a+3b & a & b & b \\ a+3b & b & a & b \\ a+3b & b & b & a \end{vmatrix} = (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 1 & a & b & b \\ 1 & b & a & b \\ 1 & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3-r_1 \\ r_4-r_1}]{r_2-r_1} (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+3b)(a-b)^3.$$

例 7 计算下列行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

解 根据行列式构造上的特点，使第 1 列上除元素 a_{11} 外的其他元素化为零，行列式便转化为三角行列式.

$$D_n \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n!.$$

三、利用行列式性质及按行(列)展开法计算

例 8 计算行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$.

解 利用行列式性质，把 D_4 中第 4 行除 $a_{43}=1$ 外的其余元素消为 0 后，再按第 4 行展开，从而把 D_4 降为 3 阶行列式，再继续降阶计算.

$$D_4 \xlongequal[c_4-7c_3]{c_2-c_3} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 3 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 4 & -1 & -10 \\ 1 & 2 & 2 \\ 10 & 3 & -14 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-2c_1]{c_2-2c_1} -\begin{vmatrix} 4 & -9 & -18 \\ 1 & 0 & 0 \\ 10 & -17 & -34 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3-2c_2} 0.$$

例 9 计算行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 0 & a \\ a & b & a & 0 \end{vmatrix}$.

解 行列式中每列四个元素之和均为 $2a+b$，应将第 2,3,4 列加到第 1 列对应元素上来，提出公因式后，使该列尽可能多的元素化为零，再按此列展开. 并可继续实施上述过程逐次降阶.

$$D_4 \xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4} (2a+b)\begin{vmatrix} 1 & a & b & a \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4 - r_1]{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1}} (2a+b)\begin{vmatrix} 1 & a & b & a \\ 0 & -a & a-b & b-a \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & b-a & a-b & -a \end{vmatrix}$$

$$= (2a+b)\begin{vmatrix} -a & a-b & b-a \\ 0 & -b & 0 \\ b-a & a-b & -a \end{vmatrix}$$

$$= (2a+b)(-b)\begin{vmatrix} -a & b-a \\ b-a & -a \end{vmatrix} = b^2(b^2-4a^2).$$

例 10　计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & & & 1 \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & a \end{vmatrix},$$

其中对角线上元素均为 a，其余未写出的元素都是 0.

解　应用行列式展开定理，依次按第 1 列和第一行两次展开将其转化为一个 $(n-1)$ 阶和一个 $(n-2)$ 阶对角行列式之和，即

$$D_n = a\begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{(n-1)\text{阶}} + (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & a & 0 \end{vmatrix}_{(n-1)\text{阶}}$$

$$= a^n + (-1)^{n+1}(-1)^{1+n-1}\begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{(n-2)\text{阶}}$$

$$= a^{n-2}(a^2-1).$$

第 3 讲　克莱姆法则

克莱姆法则是这样叙述的：含有 n 个未知量 n 个方程的非齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{3.1}$$

当它的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，方程组(3.1)有唯一解：$x_1 = \dfrac{D_1}{D}, x_2 = \dfrac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \dfrac{D_n}{D}$.　　(3.2)

其中 $D_j(j = 1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式中第 j 列换成常数列 $b_1,\cdots,b_n$ 后得到的行列式.

注意　法则中包含着三个结论：① 方程组有解；② 解是唯一的；③ 这唯一的解由(3.2)式给出. 它指出了解与系数的明显关系，这一点在以后许多问题的讨论中是重要的；此外，由法则可推知：如果齐次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

的系数行列式 $D \neq 0$，则它仅有零解：$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. 换句话说，如果齐次方程组(3.3)有非零解，则必有 $D = 0$. 总之一句话：n 元齐次线性方程组(3.3)，当系数行列式 $D \neq 0$ 时，有唯一零解；当 $D = 0$ 时有非零解. 还应特别注意，n 元非齐次方程组(3.1)，当系数行列式 $D = 0$ 时，克莱姆法则失效，方程组解的情况不能确定.

例 1　解线性方程组

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ x_4 + 5x_5 = 1. \end{cases}$$

解　首先计算行列式 D,D_1,D_2,D_3,D_4,D_5 的值.

$$D=\begin{vmatrix}5&6&0&0&0\\1&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&6\\0&0&0&1&5\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第一列展开}}5\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&6\\0&0&1&5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}6&0&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&6\\0&0&1&5\end{vmatrix}$$

$$=5^2\begin{vmatrix}5&6&0\\1&5&6\\0&1&5\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}6&0&0\\1&5&6\\0&1&5\end{vmatrix}-6\begin{vmatrix}5&6&0\\1&5&6\\0&1&5\end{vmatrix}$$

$$=(5^2-6)\begin{vmatrix}5&6&0\\1&5&6\\0&1&5\end{vmatrix}-5\times6\begin{vmatrix}5&6\\1&5\end{vmatrix}=665,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}1&6&0&0&0\\0&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&6\\1&0&0&1&5\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第一列展开}}\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&6\\0&0&1&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}6&0&0&0\\5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&6\end{vmatrix}$$

$$=5\begin{vmatrix}5&6&0\\1&5&6\\0&1&5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}6&0&0\\1&5&6\\0&1&5\end{vmatrix}+6^4=5(5^3-2\times30)-6\begin{vmatrix}5&6\\1&5\end{vmatrix}+6^4$$

$$=5^4-300-6\times19+6^4=1507,$$

同理可得　$D_2=-1145$，　$D_3=703$，　$D_4=-395$，　$D_5=212$.

由克莱姆法则得解为：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{1507}{665},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{1145}{665},\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{703}{665},$$

$$x_4=\frac{D_4}{D}=-\frac{395}{665},\quad x_5=\frac{D_5}{D}=\frac{212}{665}.$$

例2　设三元线性方程组

$$\begin{cases}x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=0,\\x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=0,\\x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=0.\end{cases}$$

问 $a_1,a_2,a_3(a_i\in\mathbf{R},\ i=1,2,3)$ 应满足什么条件,方程组有非零解?

解　因为齐次线性方程组的系数行列式