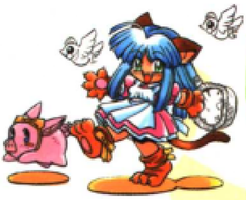
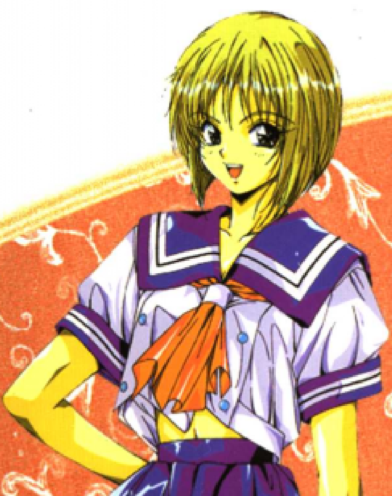
# 奥数

初中

# 入门与入迷



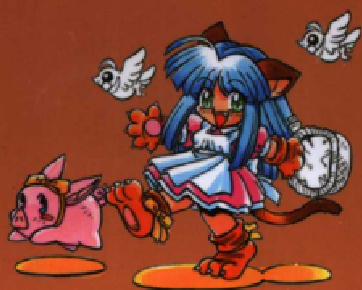
刘鸿坤　康士凯　主编



全面　系统　权威

上海科学普及出版社

封面设计 赵 斌



ISBN 7-5427-2657-9

9 787542 726575 >

定 价: 33.50 元

# 奥数入门与入迷

## 初　中

刘鸿坤　康士凯　主编

上海科学普及出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

奥数入门与入迷．初中/刘鸿坤，康士凯主编．
—上海：上海科学普及出版社，2004.9
ISBN 7-5427-2657-9

Ⅰ．奥...　Ⅱ．①刘...②康...　Ⅲ．数学课-初中-教学参考资料　Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 046440 号

**责任编辑**　郭子安

**奥数入门与入迷**
初　中
刘鸿坤　康士凯　主编
上海科学普及出版社出版发行
(上海中山北路 832 号　邮政编码 200070)
http://www.pspsh.com

各地新华书店经销
商务印书馆上海印刷股份有限公司印刷
开本 787×1092　1/16　印张 24　字数 532 000
2004 年 9 月第 1 版　　2004 年 9 月第 1 次印刷
印数 1—5 500

ISBN 7-5427-2657-9/O·112　　定价：33.50 元

**主　编**　刘鸿坤　康士凯

**参编者**　（按姓氏笔画为序）

孙　雯　李家生　张进兴

苏　玫　范端喜　程　靖

熊　斌

# 前　言

数学兴趣的形成、数学能力的培养，对人的一生有不可估量的影响，为此一直受到有识之士的关注. 教育专家们还提出了许多方案，数学奥林匹克是其中最具影响力的一种。

笔者认为，初中阶段是撒下爱好数学种子的最佳时期，许多专家学者都有过少年时代对科学产生浓厚兴趣的经历，初中学生已有了一定的数学知识基础，以数学奥林匹克为载体，拓展学习的视野，有益于数学兴趣的形成.

我们编写《奥数入门与入迷》，旨在使本书内容贴近初中数学，使本书形式贴近学生实际要求，不搞过难过偏的数学题，以易于入门的要求，引导学生爱好数学. 本书以专题形式编写，相对独立，读者可根据自己学习的基础逐节学习，也可根据爱好挑选其中一部分学习. 在每节后面还配若干相应练习，以检验你对该部分内容的掌握情况. 奥林匹克精神就是一种对人的能力的挑战精神，从挑战一个又一个问题的乐趣中塑造人生.

本书的编者刘鸿坤、熊斌两位老师曾是中国数学奥林匹克国家队领队，其他编者都是多年数学竞赛队的教练，为初中学生奥数入门提供一份实用的学习材料也是我们的心愿。若能借助本书使你对数学产生兴趣，对数学优美的思维方法产生兴趣，这便达到了目的.

特级教师

**康士凯**

2004 年 7 月

# 目录

# 第一讲 因式分解的几种常用方法

把一个多项式化成几个整式的积的形式，称为多项式的因式分解，也可以称为分解因式. 因式分解是代数式恒等变形的基本形式之一. 它对于式的恒等变形、求值、解方程都起着十分重要的作用. 本讲就因式分解的几种常用方法：提取公因式法、公式法、十字相乘法、分组分解法以及换元法和待定系数法作进一步的介绍.

## 1. 提取公因式法

如果一个多项式的各项含有公因式，就可提取这个公因式作为多项式的一个因式，用这个因式去除原来的多项式所得商式就是另一个因式，再把多项式写成这两个因式的积，这种因式分解的方法，称为提取公因式法.

**例 1** 分解因式：$2a^2b(x+y)^2(b+c)-6a^3b^2(x+y)(b+c)^2$.

**解** 原式 $=2a^2b(x+y)(b+c)[(x+y)-3ab(b+c)]$

$=2a^2b(x+y)(b+c)(x+y-3ab^2-3abc)$.

**例 2** 分解因式：$(x+y)^2+(x-y)^2+z(x^2+y^2)$.

**解** 原式 $=(x^2+2xy+y^2)+(x^2-2xy+y^2)+z(x^2+y^2)$

$=2(x^2+y^2)+z(x^2+y^2)$

$=(x^2+y^2)(2+z)$.

## 2. 公式法

根据因式分解的意义，不难看出：如果把乘法公式反过来应用，就可得到因式分解中所要用的公式. 利用这些公式进行因式分解，称为公式法.

利用公式进行因式分解，关键在于牢记和掌握公式的形式和特点，并根据所给多项式的字母、系数、指数、符号等，正确恰当地选择公式. 下面的公式是因式分解时经常用到的.

(1) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(2) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

(3) $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

(4) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(5) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(6) $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

(7) $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ [公式 1]

$=\dfrac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$ [公式 2]

$=(a+b+c)[(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)]$ [公式 3]

(8) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

其中 $n$ 为正整数.

(9) $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1})$

其中 $n$ 为偶数.

(10) $a^n+b^n=(a+b)[a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+(-1)^{n-1}b^{n-1}]$

其中 $n$ 为奇数.

**例 3** 分解因式：$x^6-y^6$.

**解法 1** 原式 $=(x^3)^2-(y^3)^2$

$$=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$$

$$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2).$$

**解法 2** 原式 $=(x^2)^3-(y^2)^3$

$$=(x^2-y^2)[(x^2)^2+x^2y^2+(y^2)^2]$$

$$=(x+y)(x-y)[(x^2+y^2)^2-x^2y^2]$$

$$=(x+y)(x-y)(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy).$$

解法 2 中，$x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$ 是因式分解中经常用到的一个结论，记住这个结论是必要的.

**例 4** 分解因式：$a^3+b^3+c^3-3abc$.

**分析** 由公式 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 可得此公式的变形公式 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$，本题可利用此变形公式进行因式分解.

**解** 原式 $=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$

$$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)$$

$$=(a+b+c)[(a+b)^2-c(a+b)+c^2]-3ab(a+b+c)$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

本题的结论及其变式在数学竞赛题中经常会用到，它的变式是

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

$$=(a+b+c)[(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)].$$

**例 5** 分解因式：$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$.

**分析** 由于 $(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$，所以，利用上题的结论，可得以下的分解法.

**解** 原式 $=3(a-b)(b-c)(c-a)$.

**例 6** 分解因式：$x^{15}+x^{14}+x^{13}+\cdots+x^2+x+1$.

**解** 因为 $x^{16}-1=(x-1)(x^{15}+x^{14}+x^{13}+\cdots+x^2+x+1)$，

所以，原式 $=\dfrac{x^{16}-1}{x-1}$

$$=\frac{(x^8+1)(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$=(x^8+1)(x^4+1)(x^2+1)(x+1).$$

本题在分解过程中，用到先乘以 $(x-1)$，再除以 $(x-1)$ 的解题技巧，这一解题技巧在



等式变形中会经常用到.

**例 7** 分解因式：$(x^2+y^2)^3+(z^2-x^2)^3-(y^2+z^2)^3$.

**分析** 原式中 $(x^2+y^2)$ 与 $(z^2-x^2)$ 的和等于 $(y^2+z^2)$，所以考虑用立方和公式 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ 变形后，再进行分解.

**解** 原式 $=(x^2+y^2+z^2-x^2)^3-3(x^2+y^2)(z^2-x^2)\cdot(x^2+y^2+z^2-x^2)-(y^2+z^2)^3$

$=(y^2+z^2)^3-3(x^2+y^2)(z^2-x^2)(y^2+z^2)-(y^2+z^2)^3$

$=-3(x^2+y^2)(z+x)(z-x)(y^2+z^2)$.

### 3. 十字相乘法

凡是可以化成 $x^2+(a+b)x+ab$ 或 $abx^2+(ac+bd)x+cd$ 形式的二次三项式，都可以直接采用十字相乘法把它分解成 $(x+a)(x+b)$ 或 $(ax+d)(bx+c)$ 的形式.

对于某些二元二次六项式 $(ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f)$，我们也可以用十字相乘法分解因式，通常称为双十字相乘法. 其因式分解的步骤是：首先用十字相乘法分解 $ax^2+bxy+cy^2$，得到一个十字相乘图(有两列)；然后把常数项 $f$ 分解成两个因式填在第三列上，要求第二、第三列构成的十字交叉之积的和等于原式中的 $ey$，第一、第三列构成的十字交叉之积的和等于原式中的 $dx$.

**例 8** 分解因式：$x^2-2xy-3y^2+2x+10y-8$.

**解** 原式 $=(x-3y)(x+y)+2x+10y-8$

$=(x-3y+4)(x+y-2)$.

其十字相乘图为

$$\begin{array}{ccc} x-3y & \times & 4 \\ x+y & & -2 \end{array}$$

**例 9** 分解因式：$6x^2-13xy+6y^2+22x-23y+20$.

**解** 原式 $=(2x-3y)(3x-2y)+22x-23y+20$

$=(2x-3y+4)(3x-2y+5)$.

其十字相乘图为

$$\begin{array}{ccc} 2x & -3y & 4 \\ 3x & -2y & 5 \end{array}$$

**例 10** 分解因式：$6x^2-7xy-3y^2-xz+7yz-2z^2$.

**解** 原式 $=(2x-3y)(3x+y)-xz+7yz-2z^2$

$=(2x-3y+z)(3x+y-2z)$.

其十字相乘图为

$$\begin{array}{ccc} 2x & -3y & z \\ 3x & y & -2z \end{array}$$

**例 11** 分解因式：$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$.

**解** 原式 $=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24$

$=(x^2+5x+4)[(x^2+5x+4)+2]-24$
$=(x^2+5x+4)^2+2(x^2+5x+4)-24$
$=[(x^2+5x+4)+6][(x^2+5x+4)-4]$
$=x(x+5)(x^2+5x+10).$

对于形如 $e(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+f(a,b,c,d,e,f$ 为常数)，当 $a+b=c+d$ 时，则把 $(x+a)(x+b)$ 与 $(x+c)(x+d)$ 分别相乘后，构成有相同部分：$x^2+(a+b)x=x^2+(c+d)x$ 的项，使原式得到简化，再用十字相乘法进行分解.

**例 12** 分解因式：$(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)-4x^2$.

**解** 原式 $=(x^2+14x+24)(x^2+11x+24)-4x^2$
$=(x^2+14x+24)[(x^2+14x+24)-3x]-4x^2$
$=(x^2+14x+24)^2-3x(x^2+14x+24)-4x^2$
$=[(x^2+14x+24)-4x][(x^2+14x+24)+x]$
$=(x^2+10x+24)(x^2+15x+24)$
$=(x+4)(x+6)\left(x-\dfrac{-15+\sqrt{129}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-15-\sqrt{129}}{2}\right).$

对于形如 $e(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+fx^2(a,b,c,d,e,f$ 为常数)，当 $a\cdot b=c\cdot d$ 时，则把 $(x+a)(x+b)$ 与 $(x+c)(x+d)$ 分别先作乘法，构成具有相同部分 $x^2+ab=x^2+cd$ 的项，再用十字相乘法进行分解.

## 4. 分组分解法

当一个多项式没有公因式可提，而且又无法直接运用公式时，可考虑用分组方法来分解因式. 但在进行分组时，必须通过细致的观察和分析，使所分成的若干组至少有一组能提取公因式，或者能运用公式，或者能应用十字相乘法，在这基础上，再通过提取公因式，或运用其他分解因式方法，从而使该多项式达到分解目的.

在对某些多项式分组时，需要恢复那些被合并、相互抵消的项，或者在多项式中添上两个仅符号相反的项. 即添项和拆项，其目的是使多项式能用分组分解法进行因式分解.

**例 13** 分解因式：$x^4+2x^3+2x^2+2x+1$.

**解** 原式 $=(x^4+2x^2+1)+(2x^3+2x)$
$=(x^2+1)^2+2x(x^2+1)$
$=(x^2+1)(x^2+1+2x)$
$=(x^2+1)(x+1)^2.$

**例 14** 分解因式：$bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$.

**解** 原式 $=bc(b+c)+ca[(b+c)-(a+b)]-ab(a+b)$
$=bc(b+c)+ca(b+c)-ca(a+b)-ab(a+b)$
$=c(b+c)(a+b)-a(a+b)(c+b)$
$=(a+b)(b+c)(c-a).$

**例 15** 分解因式：$a^3b-ab^3+a^2+b^2+1$.

**解** 原式 $=a^3b-ab^3+a^2+b^2+1+ab-ab$

$=(a^3b-ab^3)+(a^2-ab)+(ab+b^2+1)$

$=ab(a+b)(a-b)+a(a-b)+(ab+b^2+1)$

$=a(a-b)[b(a+b)+1]+(ab+b^2+1)$

$=[a(a-b)+1](ab+b^2+1)$

$=(a^2-ab+1)(b^2+ab+1)$.

**例 16** 分解因式：$(1+x+x^2+x^3)^2-x^3$.

**解** 原式 $=(1+x+x^2)^2+2x^3(1+x+x^2)+x^6-x^3$

$=(1+x+x^2)^2+2x^3(1+x+x^2)+x^3(x^3-1)$

$=(1+x+x^2)[(1+x+x^2)+2x^3+x^3(x-1)]$

$=(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4)$.

## 5. 换元法

换元法的基本思想是将一个较复杂的代数式中的某一部分看作一个整体，并用一个新的字母替代这个整体来运算，从而把复杂的式子化成比较简单的形式，化难为易，在因式分解中有时也会用到这一解题方法.

**例 17** 分解因式：$(a+b-2ab)(a+b-2)+(1-ab)^2$.

**解** 令 $a+b=x$, $ab=y$，则

原式 $=(x-2y)(x-2)+(1-y)^2$

$=x^2-2xy-2x+4y+y^2-2y+1$

$=x^2-2x(y+1)+(y+1)^2$

$=[x-(y+1)]^2$

$=(x-y-1)^2$.

所以 原式 $=(a+b-ab-1)^2$.

**例 18** 分解因式：$(1-2a-a^2)b+a(a-1)(2b^2-1)$.

**解** 令 $a-1=x$，则 $1-2a-a^2=(a-1)^2-2a^2=x^2-2a^2$.

原式 $=(x^2-2a^2)b+ax(2b^2-1)$

$=x^2b-2a^2b+2ab^2x-ax$

$=(x^2b-ax)+(2ab^2x-2a^2b)$

$=(xb-a)(x+2ab)$

所以 原式 $=[(a-1)b-a][(a-1)+2ab]$

$=(ab-a-b)(a+2ab-1)$.

换元时未必要将原式中的字母全部换掉，可以进行部分换元，得分解因式后再还原.

**例 19** 分解因式：$(x+1)^4+(x+3)^4-272$.

**解** 令 $y=x+2$，则

原式 $=(y-1)^4+(y+1)^4-272$

$=(y^2-2y+1)^2+(y^2+2y+1)^2-272$

$=(y^4+4y^2+1-4y^3+2y^2-4y)+(y^4+4y^2+1+4y^3+2y^2+4y)-272$

$=2y^4+12y^2-270$

$=2(y^4+6y^2-135)$

$=2(y^2-9)(y^2+15)$

$=2(y+3)(y-3)(y^2+15)$

所以　原式 $=2(x+5)(x-1)(x^2+4x+19)$.

## 6. 待定系数法

在解决某些问题时，有时先用一些字母表示需要确定的系数，然后根据条件或要求来确定这些系数，这种解题方法称为待定系数法. 某些因式分解问题也可采用待定系数法来解决.

**例 20** 分解因式：$x^2-3y^2-8z^2+2xy+2xz+14yz$.

**分析**　由于 $x^2+2xy-3y^2=(x+3y)(x-y)$

若原式可以分解因式，那么它一定是 $(x+3y+mz)(x-y+nz)$ 的形式. 应用待定系数法即可求出 $m$ 和 $n$，使问题得到解决.

**解**　设 $x^2-3y^2-8z^2+2xy+2xz+14yz\equiv(x+3y+mz)(x-y+nz)$

$=x^2+2xy-3y^2+(m+n)xz+(3n-m)yz+m\cdot nz^2$.

比较两边对应项的系数，则有

$$\begin{cases}m+n=2,\\3n-m=14,\\m\cdot n=-8.\end{cases}$$

解之，得　$m=-2,\ n=4$.

所以　原式 $=(x+3y-2z)(x-y+4z)$.

**例 21** 分解因式：$x^4-x^3+4x^2+3x+5$.

**分析**　这是关于 $x$ 的四次多项式，若它可以因式分解，则必为关于 $x$ 的两个二次式之积. 可用待定系数法求之.

**解**　设 $x^4-x^3+4x^2+3x+5$

$=(x^2+ax+1)(x^2+bx+5)$

$=x^4+(a+b)x^3+(ab+6)x^2+(5a+b)x+5$.

比较两边对应项的系数，则有

$$\begin{cases}a+b=-1,\\ab+6=4,\\5a+b=3.\end{cases}$$

解之，得　$a=1,\ b=-2$.

所以　原式 $=(x^2+x+1)(x^2-2x+5)$.

如果设原式 $=(x^2+ax-1)(x^2+bx-5)$. 则由待定系数法解题后知关于 $a$ 与 $b$ 的方程组无解，所以设原式 $=(x^2+ax+1)(x^2+bx+5)$.

**例 22** $k$ 为何值时，$x^2-y^2+3x-7y+k$ 可以分解成两个一次因式的乘积？

**分析**　因为 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$，所以如果 $x^2-y^2+3x-7y+k$ 可以分解成两个一次因式的乘积，那么它的两个一次因式一定是 $(x+y+m)$ 与 $(x-y+n)$ 的形式，其中

$m$、$n$ 都是待定系数.

**解** 设 $x^2-y^2+3x-7y+k=(x+y+m)(x-y+n)$

$$\begin{aligned}x^2-y^2+3x-7y+k&=x^2+xy+mx-xy-y^2-my+nx+ny+mn\\&=x^2-y^2+(m+n)x+(n-m)y+mn.\end{aligned}$$

比较两边对应项的系数,得

$$\begin{cases}m+n=3,\\n-m=-7,\\m\cdot n=k.\end{cases}$$

解之,得 $\begin{cases}m=5,\\n=-2,\\k=-10.\end{cases}$

因此,当 $k=-10$ 时,$x^2-y^2+3x-7y+k$ 可以分解成两个一次因式的乘积 $(x+y+5)(x-y-2)$.

## 习题一

**1.** 分解因式:$x^3+ax^2+bx^2+c^2x+abx+bcx+acx+abc$.

**2.** 分解因式:$(a+x)^{m+1}(b+x)^{n-1}-(a+x)^m(b+x)^n$.

**3.** 分解因式:$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

**4.** 分解因式:$a^3+(b+2)a^2+(b-1)a+b^2+b-2$.

**5.** 分解因式：$x^4+8x^2(x+1)+16(x+1)^2$.

**6.** 分解因式：$(a^2+ab+b^2)^2+4ab(a+b)^2$.

**7.** 分解因式：$(a^2-b^2)x^2-4abx-a^2+b^2$.

**8.** 分解因式：$x^4-2x^2(y^2+z^2)+(y^2-z^2)^2$.

**9.** 分解因式：$x^6+64y^6+12x^2y^2-1$.

**10.** 分解因式：$x^3+6x^2+5x-12$.

**11.** 分解因式：$(x^2-15x+54)(x^2+11x+28)+350$.

**12.** 分解因式：$4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2$.

**13.** 分解因式：$6x^4-13x^3+12x^2-13x+6$.

**14.** 分解因式：$x^2-xy-6y^2+3x+11y-4$.

**15.** 分解因式：$3x^2+5xy-2y^2+x+9y-4$.

**16.** 已知 $x^2+3x+6$ 是多项式 $x^4-6x^3+mx^2+nx+36$ 的一个因式，试确定 $m$、$n$ 的值，并求出它的其他因式.

**17.** $k$ 是什么数时，$kx^2-2xy-3y^2+3x-5y+2$ 能分解成两个一次因式？