工科硕士研究生数学用书

《应用数学基础》学习指导

曾绍标 汤雁 编

本书为

《应用数学基础》配套图书

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

《应用数学基础》配套图书

《应用数学基础》学习指导

曾绍标　汤　雁编

天津大学出版社
Tianjin University Press

内容提要

本书是《应用数学基础》(第三版和第四版)的配套用书. 书中列出了《应用数学基础》各章的重点,并配备了学习重点内容的复习思考题,还对全部习题做出了详细解答.

本书既是学习“应用数学”各门课程的同步指导书,又是相关考试的辅导资料.

图书在版编目(CIP)数据

应用数学基础学习指导 / 曾绍标,汤雁编. —天津:天津大学出版社,2004.9
ISBN 7-5618-2033-X

Ⅰ.应… Ⅱ.①曾… ②汤… Ⅲ.应用数学-研究生-教学参考资料 Ⅳ.029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 094844 号

出版发行　天津大学出版社
出 版 人　杨风和
地　　址　天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电　　话　发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
印　　刷　昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司
经　　销　全国各地新华书店
开　　本　148mm × 210mm
印　　张　6.875
字　　数　205 千
版　　次　2004 年 9 月第 1 版
印　　次　2004 年 9 月第 1 次
印　　数　1 – 3 000
定　　价　12.00 元

前言

应使用《应用数学基础》一书的广大师生，特别是在职申请学位人员的要求，我们将十几年来的教学辅导资料，整理加工成这本《应用数学基础学习指导》，与教材(《应用数学基础》第三版、第四版)配套使用．本书的章节次序与《应用数学基础》的第四版完全一致，与第三版略有不同(见"使用说明")．

除第*14章外，本书各章均由本章重点、复习思考题、习题解答组成，以满足"教、学、考"的需要．

"复习思考题"由曾绍标根据历年编写的教学资料整理而成，由汤雁审核并给出参考答案；"习题解答"是曾绍标、汤雁根据《应用数学基础》作者于1994年提供的初稿(熊洪允：第1、3、6章，曾绍标：第2、4、11、12、13章，毛云英：第7、8、9、10、14章，韩维信(2002年)：第5章)修正、补充而成．

借本书出版之机，对《应用数学基础》的作者，对多年从事"应用数学基础"教学的各位同事，对选修"应用数学基础"各门课程的历届硕士研究生，表示衷心的感谢！

由于编者水平所限，本书一定存在不少缺点和错误，欢迎广大读者批评指正！

编者

2004年8月

使用说明

本指导书的章目次序与《应用数学基础》第四版完全一致，与第三版稍有不同。持《应用数学基础》第三版的读者在使用本指导书时可参考下面的章目对照表：

《应用数学基础》(第三版)	《应用数学基础》学习指导
第 1 章	第 1 章
第 2 章	第 2 章
第 3 章	第 3 章
第 4 章	第 4 章
第 5 章	第 7 章
第 6 章	第 6 章
(上册)附录 1	第 5 章
第 7 章	第 8 章
第 8 章	第 9 章
第 9 章	第 10 章
第 10 章	第 11 章
第 11 章	第 12 章
第 12 章	第 13 章
第 13 章	*第 14 章

目　　录

第一编　应用数学基础

第二编　工程与科学计算

第三编　数理学物方程

附录

第一编　应用数学基础

第 1 章　线性空间与内积空间

本章重点

1. 集合的运算律，映射的性质，可数集的性质，实数集的确界.

2. 线性空间中集合的线性相关性，由集合所张成的子空间，线性空间的基与维数.

3. 线性算子的性质，有限维线性空间到有限维线性空间的线性算子的矩阵表示.

4. 内积空间概念，内积的性质.

5. 由内积导出的范数的性质.

6. 正交、正交系及其性质，正交化方法.

复习思考题

一、判断题

1. 设 X 是基本集合，$A,B\subset X$，则 $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.　(　　)

2. 设 X 是基本集合，$A,B\subset X$，则

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).\qquad(\quad)$$

3. 设 X 是基本集合，$A,B\subset X$，则 $A\times B=B\times A$.　(　　)

4. 由全体无理数构成的集合是可数的.　(　　)

5. 设 $E\subset\mathbb{R}$，则 $\sup E\in E$.　(　　)

6. 设 M_1,M_2 是线性空间 X 的子空间，则 $M_1\cup M_2$ 也是 X 的子空间.　(　　)

7.线性空间 $P_n[a,b]$是 n 维的. ( )

8.设 $T:X\to X$,$S:X\to X$ 都是线性算子,则 $S\circ T:X\to X$ 也是线性算子. ( )

9.线性算子 $T:X\to Y$ 的零空间$\mathcal{N}(T)$是 X 的线性子空间. ( )

10.设有内积空间$(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$,则$\forall x,y\in X$ 有

$$|\langle x,y\rangle|\leqslant\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}.$$ ( )

11.设 X 是任一内积空间,$x,y\in X$,则

$$x\perp y\Leftrightarrow\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2.$$ ( )

12.设 X 是内积空间,$A\subset X$,则 $A^{\perp}$是 X 的子空间. ( )

13.设$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是内积空间 X 的正交系,则$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是线性无关集. ( )

14.设有内积空间$(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$,$\|\cdot\|$是由内积导出的范数,则$\forall x,y\in X$,有

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$ ( )

15.设有内积空间$(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$,则$\forall x,y,z\in X$ 及$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}$,有

$$\langle x,\alpha y+\beta z\rangle=\alpha\langle x,y\rangle+\beta\langle x,z\rangle.$$ ( )

16.设 $T:l^2\to l^2$ 的定义是:$\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in l^2$,$Tx=\left(\frac{\xi_1}{1},\frac{\xi_2}{2},\cdots,\frac{\xi_n}{n},\cdots\right)$,则 $T:l^2\to l^2$ 是线性算子. ( )

二、填空题

1.设 X 是基本集合,$A,B\subset X$,则$(A\cup B)^C=$______.

2.设某项工程要分前后两期完成,第一期有 $A=\{a,b,c\}$三种方案可供选择,第二期有 $B=\{1,2\}$两种方案可供选择,则完成此工程可供选择的全部方案为 $A\times B=$______.

3.设 $A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{a,b,c,d,e\}$,$A_1=\{1,3,4\}$,$B_1=\{a,c,e\}$.若映射 $f:A\to B$ 的定义是:$f(1)=a$,$f(2)=b$,$f(3)=b$,$f(4)=e$,则$\mathscr{D}(f)=$______,$\mathscr{R}(f)=$______,$f(A_1)=$______,$f^{-1}(B_1)=$______,$f^{-1}(b)=$______.

4.设有映射 $f:A\to B$,若 $\mathscr{R}(f)=B$,则 f 是______映射.

5.设 $E=(-3,\sqrt{2}]$,则 $\sup E=$______,$\inf E=$______.

6.设 $x=(\mathrm{i},\mathrm{i},1)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^3$,则 $\|x\|_2=$______.

7.设 $T:X\to Y$ 是线性算子,则 $T(0)=$______.

8.设 X 是内积空间,$x\in X$,若 $\forall u\in X$ 有 $\langle x,u\rangle=0$,则 $x=$______.

9.设 A 是内积空间 X 的任一集合,且 $0\in A$,则 $A\cap A^{\perp}=$______.

10.设 A 是内积空间 X 的非空子集,则______是包含 A 的最小子空间.

11.设 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是内积空间 X 的标准正交系,则 $\forall x\in\operatorname{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$,有 $x=$______.

习题1解答

1.证明数直线上的开区间 $(-2,2)$ 和闭区间 $[-2,2]$ 可分别表示为

$$(-2,2)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[-2+\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}\right],$$

$$[-2,2]=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-2-\frac{1}{n},2+\frac{1}{n}\right).$$

证明 (1) $\forall n\in\mathbb{N}$,有 $\left[-2+\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}\right]\subset(-2,2)$,故

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[-2+\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}\right]\subset(-2,2).$$

另一方面,$\forall x\in(-2,2)$,$\exists k\in\mathbb{N}$,使 $x\in\left[-2+\frac{1}{k},2-\frac{1}{k}\right]$,故 $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[-2+\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}\right]$,于是 $(-2,2)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[-2+\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}\right]$.因此,

$$(-2,2)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[-2+\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}\right].$$

(2) $\forall n\in\mathbb{N}$,有 $[-2,2]\subset\left(-2-\frac{1}{n},2+\frac{1}{n}\right)$,故

$$[-2,2]\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-2-\frac{1}{n},2+\frac{1}{n}\right).$$

另一方面,对任意 $x\notin[-2,2]$,即 $|x|>2$,$\exists k\in\mathbb{N}$,使得 $|x|>2$

$+\frac{1}{k}>2$,即 $x\notin\left(-2-\frac{1}{k},2+\frac{1}{k}\right)$,从而 $x\notin\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-2-\frac{1}{n},2+\frac{1}{n}\right)$,故

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-2-\frac{1}{n},2+\frac{1}{n}\right)\subset[-2,2].$$

因此,$[-2,2]=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-2-\frac{1}{n},2+\frac{1}{n}\right)$.

2. 对于映射 $f:A\to B$ 及任意的 $E\subset A$,$F\subset B$,证明:

$$E\subset f^{-1}(f(E)),\quad f(f^{-1}(F))\subset F,\quad f^{-1}(F^C)=(f^{-1}(F))^C.$$

证明 (1)因为对任意 $x\in E$,有 $f(x)\in f(E)$,于是

$$x\in f^{-1}(f(E)),$$

故 $$E\subset f^{-1}(f(E)).$$

(2)对任意 $y\in f(f^{-1}(F))$,必有 $x\in f^{-1}(F)$,使得 $y=f(x)$.由 $x\in f^{-1}(F)$,得 $y=f(x)\in F$,故 $f(f^{-1}(F))\subset F$.

(3) $x\in f^{-1}(F^C)\Leftrightarrow f(x)\in F^C\Leftrightarrow f(x)\notin F\Leftrightarrow x\notin f^{-1}(F)$

$$\Leftrightarrow x\in(f^{-1}(F))^C.$$

注 前两个包含关系有可能是真包含关系.例如,定义函数

$$f:[-1,1]\to\mathbb{R}\text{ 为 }f(x)=x^2(\forall x\in[-1,1]).$$

若令 $E=[0,1]$,$F=\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$,则有

$$E=[0,1]\subsetneq[-1,1]=f^{-1}(f(E)).$$

$$f(f^{-1}(F))=f\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right)=\left[0,\frac{1}{4}\right]\subsetneq\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]=F.$$

3. 对于映射 $f:A\to B$ 及任意的 $A_1,A_2\subset A$,证明:

$$f(A_1\cap A_2)\subset f(A_1)\cap f(A_2).$$

证明 $\forall y\in f(A_1\cap A_2)$,$\exists x\in A_1\cap A_2$,使得 $y=f(x)$.由 $x\in A_1\cap A_2$,得 $x\in A_1$,且 $x\in A_2$,故 $y=f(x)\in f(A_1)$ 且 $y\in f(A_2)$,即 $y\in f(A_1)\cap f(A_2)$,因此 $f(A_1\cap A_2)\subset f(A_1)\cap f(A_2)$.

注 此包含关系有可能是真包含关系.例如,对上题定义的 f,令

$$A_1=[-1,0],A_2=[0,1],$$

则　$f(A_1\cap A_2)=f(0)=\{0\}\subsetneqq[0,1]=f(A_1)\cap f(A_2)$.

4. 证明$\mathbb{R}^n$中的有理点的全体组成一个可数集.

证明　$n=2$时,令$A_2=\{(r_1,r_2)\mid r_1,r_2\in\mathbb{Q}\}$,其中第一坐标的全体为一可数集,故可排为$\{r_1(1),r_1(2),r_1(3),\cdots\}$;同理,第二坐标的全体可排为$\{r_2(1),r_2(2),r_3(3),\cdots\}$;于是

$$(r_1(1),r_2(1)),(r_1(2),r_2(1)),(r_1(3),r_2(1)),\cdots,$$
$$(r_1(1),r_2(2)),(r_1(2),r_2(2)),(r_1(3),r_2(2)),\cdots,$$
$$(r_1(1),r_2(3)),(r_1(2),r_2(3)),(r_1(3),r_2(3)),\cdots,$$
$$\cdots\cdots$$
$$(r_1(1),r_2(n)),(r_1(2),r_2(n)),(r_1(3),r_2(n)),\cdots,$$
$$\cdots\cdots.$$

可知A_2的元素可排成一列,即A_2是一个可数集.用归纳法立即可证明$\mathbb{R}^n$中的有理点的全体$A_n=\{(r_1,r_2\cdots,r_n)\mid r_i\in\mathbb{Q},i=1,2,\cdots,n\}$是可数集.

5. 证明所有系数为有理数的多项式的全体组成一个可数集.

证明　$\forall n\in\mathbb{N}$,令P_n为所有次数小于或等于n的有理系数多项式的全体,即

$$P_n=\{r_0+r_1x+\cdots+r_nx^n\mid r_i\in\mathbb{Q},i=0,1,\cdots,n\}.$$

定义映射$f:A_n\to P_n$,使得$\forall(r_0,r_1,\cdots,r_n)\in A_n$,$f((r_0,r_1,\cdots,r_n))=r_0+r_1x+\cdots+r_nx^n$,则易验证$f$是双射.由上题知$A_n$是可数的,故$P_n$是可数的.而所有的系数为有理数的多项式的全体$P=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}P_n$,因此$P$是可数的.

6. 证明线性空间X的任意多个子空间的交仍然是X的子空间,但是X的两个子空间的并,不一定是X的子空间,试举例说明.

证明　(1)设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$是线性空间$X$的一族子空间.对任意$x,y\in\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha$及$\beta\in\mathbb{K}$,从而对每一个$\alpha\in D$,有$x,y\in A_\alpha$,故$x+y\in A_\alpha$,$\beta x\in A_\alpha$.于是,$x+y\in\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha$,$\beta x\in\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha$.因此,$\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha$是$X$的线性子空间.

(2)举例:在$\mathbb{R}^2$中,$A=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$与$B=\{(0,y)\mid y\in\mathbb{R}\}$都是

$\mathbb{R}^2$ 的线性子空间,但是 $A\cup B$ 不是$\mathbb{R}^2$ 的线性子空间,因为 $A\cup B$ 对加法不封闭.

7. 设 M 是线性空间 X 的子集,证明 Span M 是包含 M 的最小子空间.

证明 只需证 $\text{Span } M=\bigcap\{Y\mid Y$ 是 X 的子空间且 $M\subset Y\}$.

因 Span M 是 X 的子空间且 $M\subset \text{Span } M$,

故 $$\text{Span } M\supset\bigcap\{Y\mid Y \text{ 是 } X \text{ 的子空间且 } M\subset Y\}.$$

另一方面,若 Y 是 X 的任一子空间且 $M\subset Y$,则

$$\text{Span } M\subset \text{Span } Y=Y,$$

故 $$\text{Span } M\subset\bigcap\{Y\mid Y \text{ 是 } X \text{ 的子空间且 } M\subset Y\}.$$

因此等式成立.

8.在线性空间$\mathbb{R}^3$ 上定义线性算子 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$,使得对任意 $\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)^{\mathrm T}\in\mathbb{R}^3$, $T\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,-\xi_1,-\xi_2)^{\mathrm T}$,求 T 的值域 $\mathscr{R}(T)$,零空间 $\mathscr{N}(T)$ 以及 T 在基$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$下的矩阵.

解 $\mathscr{R}(T)=\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3)^{\mathrm T}\mid \xi_3=-\xi_1-\xi_2\}=\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3)^{\mathrm T}\mid \xi_1+\xi_2+\xi_3=0\}$,即为平面 $\xi_1+\xi_2+\xi_3=0$.

因为 $T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow \xi_1=\xi_2=-\xi_1-\xi_2=0\Leftrightarrow \xi_1=\xi_2=0$,

故 $$\mathscr{N}(T)=\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3)^{\mathrm T}\mid \xi_1=\xi_2=0\},\text{即为 } \xi_3 \text{ 轴}.$$

因为 $\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$,

于是 $$T\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},T\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},T\boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

故 T 的矩阵为

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&-1&0\end{bmatrix}.$$

9. 设 X 是实内积空间,对任意 $x,y\in X$,验证极化恒等式

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$$

成立.

证明 右端 $=\frac{1}{4}(\langle x+y,x+y\rangle-\langle x-y,x-y\rangle)$

$=\frac{1}{4}(\langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle-\langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle-\langle y,y\rangle)$

$=$ 左端.

10. 对于任意 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots),y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^2$,定义 $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\bar{\eta}_i$.验证按此定义的 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 l^2 上的内积,从而 l^2 成为内积空间.

证明 因为 $\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots),y=(\eta_1,\eta_2,\cdots),z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots)\in l^2$ 及 $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}$,有

$$(1)\langle\alpha x+\beta y,z\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha\xi_i+\beta\eta_i)\bar{\zeta}_i=\alpha\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\bar{\zeta}_i+\beta\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i\bar{\zeta}_i$$
$$=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle;$$

$$(2)\overline{\langle x,y\rangle}=\overline{\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\bar{\eta}_i}=\sum_{i=1}^{\infty}\bar{\xi}_i\bar{\bar{\eta}}_i=\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i\bar{\xi}_i=\langle y,x\rangle;$$

(3) $\langle x,x\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\bar{\xi}_i=\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2\geqslant 0$,显然当 $x=(0,0,\cdots)\in l^2$ 时,$\langle x,x\rangle=0$,又若 $\langle x,x\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2=0$,则 $\forall i=1,2,\cdots,\xi_i=0$,从而

$$x=(0,0,\cdots).$$

故 $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\bar{\eta}_i$ 是 l^2 上的内积.

11. 设 u 和 v 是内积空间 X 中的二元素,若对于每一个 $x\in X$ 皆有 $\langle x,u\rangle=\langle x,v\rangle$,证明 $u=v$.特别地,若对于每一个 $x\in X$ 皆有 $\langle x,u\rangle=0$,则 $u=0$.

证明 若对于每一个 $x\in X$ 皆有 $\langle x,u\rangle=\langle x,v\rangle$,则对于每一个 $x\in X$ 皆有 $\langle x,u-v\rangle=0$,于是对于 $x=u-v$,也有 $\langle u-v,u-v\rangle=0$,从

而 $u-v=0$,故 $u=v$.

若 $\forall x\in X$ 皆有 $\langle x,u\rangle=0$,则对 $x=u$,有 $\langle u,u\rangle=0$,故 $u=0$.

12. 设 A 和 B 是内积空间 X 的子集,证明:

(1)若 $A\subset B$,则 $B^{\perp}\subset A^{\perp}$; (2)$A\subset(A^{\perp})^{\perp}$.

证明 (1)若 $x\in B^{\perp}$,则 $\forall y\in B$ 皆有 $x\perp y$,由假设 $A\subset B$,于是对每一个 $y\in A$ 皆有 $x\perp y$,即 $x\in A^{\perp}$,故 $B^{\perp}\subset A^{\perp}$.

(2)若 $x\in A$,则 $\forall y\in A^{\perp}$ 皆有 $x\perp y$,故 $x\in(A^{\perp})^{\perp}$,于是 $A\subset(A^{\perp})^{\perp}$.

13. 证明任何 n 维实内积空间都与 $\mathbb{R}^n$ 同构,任何 n 维复内积空间都与 $\mathbb{C}^n$ 同构.

证明 设 X 是 n 维复内积空间,则 X 包含一个由 n 个元素组成的线性无关集,应用 Gram-Schmidt 方法得到一个标准正交系,记为 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$,且 $X=\mathrm{Span}\{e_1,\cdots,e_n\}$.于是每一个 $x\in X$ 都可表示为

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,e_i\rangle e_i.$$

定义映射 $T:X\to\mathbb{C}^n$,使得 $\forall x\in X$, $Tx=(\langle x,e_i\rangle,\cdots,\langle x,e_n\rangle)^{\mathrm{T}}$,则

(1)T 显然是线性算子;

(2)T 保持内积,因为对任意 $x,y\in X$ 有

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle&=\langle\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i,\sum_{j=1}^{n}\langle y,e_j\rangle e_j\rangle\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle x,e_i\rangle\overline{\langle y,e_j\rangle}\langle e_i,e_j\rangle\\&=\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle\overline{\langle y,e_i\rangle}=\langle Tx,Ty\rangle;\end{aligned}$$

(3)T 是双射:$\forall x,y\in X$,若 $Tx=Ty$,则 $\forall i=1,2,\cdots,n$,有 $\langle x,e_i\rangle=\langle y,e_i\rangle$,即 $\langle x-y,e_i\rangle=0$,于是 $x-y$ 与 X 中的所有元素都正交,从而 $x-y=\mathbf{0}$,即 $x=y$,这表明 T 是单射;又 $\forall \boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^n$,令 $x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_ie_i$,则 $x\in X$ 且 $Tx=\boldsymbol{c}$,即 T 是满射;因此,T 是 X 到 $\mathbb{C}^n$ 的同构映射,X 与 $\mathbb{C}^n$ 同构.类似可证任何 n 维实内积空间都与 $\mathbb{R}^n$ 同构.

第 2 章　矩阵的相似标准形

本章重点

1. 多项式矩阵的初等变换，多项式矩阵的 Smith 标准形.

2. $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的(即 $\lambda E-A$ 的)行列式因子、不变因子与初等因子组.

3. $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 与 $B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 相似的充要条件.

4. $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的 Jordan 标准形与有理标准形.

5. $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的最小多项式.

6. $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 可对角化的充要条件.

7. 正规矩阵、酉矩阵、Hermite 矩阵及其性质.

8. Hermite 二次型的标准形与规范形.

9. 正定矩阵的充要条件及性质.

复习思考题

一、判断题

1. 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，则 $\lambda E-A$ 是可逆的(即单模态的).　(　　)

2. 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$ 是 $\lambda E-A$ 的不变因子，若 $d_5(\lambda)=1$，则

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=d_4(\lambda)=1.$$　(　　)

3. 设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$，则 $A\sim B\Leftrightarrow\lambda E-A\cong\lambda E-B$.　(　　)

4. 设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$，则 $A\sim B$，当且仅当 A 与 B 有相同的最小多项式.　(　　)

5. 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$f(\lambda)=\det(\lambda E-A)$，则 $f(A)=0$.　(　　)

6. 设 $A=\begin{bmatrix}A_1 & \\ & A_2\end{bmatrix}$，$C^{(1)}$，$C^{(2)}$ 分别是 A_1,A_2 的有理标准形，则 $\begin{bmatrix}C^{(1)} & \\ & C^{(2)}\end{bmatrix}$ 是 A 的有理标准形.　(　　)

7.设 $\varphi(\lambda)=\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-3$,则 $\varphi(\lambda)$的相伴矩阵为

$$\begin{bmatrix}0&0&-2\\1&0&-1\\0&1&3\end{bmatrix}.$$ (　　)

8.$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$可对角化的充要条件是$\boldsymbol{A}$ 的最小多项式无重零点. (　　)

9.若 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$满足$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化. (　　)

10.设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$,则 $\boldsymbol{A}$ 是 Hermite 矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 可酉对角化. (　　)

11.设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$,若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=-\boldsymbol{A}$,则 $\boldsymbol{A}$ 是 Hermite 矩阵. (　　)

12.酉矩阵的特征值不等于 1 就等于 -1. (　　)

13.正规矩阵的最小多项式无重零点. (　　)

14.正定矩阵的特征值均大于零. (　　)

15.设 $\boldsymbol{U}\in\mathbb{C}^{n\times n}$是酉矩阵,则$\forall\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$,有

$$\|\boldsymbol{Ux}\|_2=\|\boldsymbol{x}\|_2.$$ (　　)

16.设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&1&2\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式是$m(\lambda)=(\lambda-2)^3$. (　　)

17.正规矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$是酉矩阵的充要条件是$\boldsymbol{A}$ 的特征值都是实数. (　　)

18.正规矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$是 Hermite 矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是实数. (　　)

19.$\forall\,\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 的特征值均为非负实数. (　　)

20.负定矩阵的各阶顺序主子式都小于零. (　　)

二、填空题

1.设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$,则 $\mathrm{rank}(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=$______.

2.$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$的初等因子组为______.

3.设正规矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{3\times 3}$的特征值为 1、1、2.若 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$,则 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 的

不变因子 $d_1(\lambda)=$______，$d_2(\lambda)=$______，$d_3(\lambda)=$______.

4.设 $A\in\mathbb{C}^{3\times3}$ 的 Jordan 标准形 $J=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&1&2\end{bmatrix}$，则 A 的有理标准形 $C=$______.

5.设 $A\in\mathbb{C}^{3\times3}$ 的有理标准形 $C=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&-4\\0&1&4\end{bmatrix}$，则 A 的 Jordan 标准形 $J=$______.

6.设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 且 $A\neq 0$，$\varphi(\lambda)$ 是 A 的最小多项式，则 $\varphi(A)=$______.

7.设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 且 $A\neq 0$，$d_n(\lambda)$ 是 $\lambda E-A$ 的第 n 个不变因子，则 $d_n(A)=$______.

8.设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是 Hermite 矩阵，则 $\forall x\in\mathbb{C}^n$，$f=x^{H}Ax$ 是______数.

9.设 λ,μ 是 Hermite 矩阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的任意两个不相等的特征值.若 $x,y\in\mathbb{C}^n$ 是 A 的分别对应于 λ 和 μ 的特征向量，则 $\langle x,y\rangle=$______.

10.设 $U,V\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 都是酉矩阵，则 $|\det(UV)|=$______.

11.设 $U=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{i}{\sqrt6}&c\\\frac{1}{\sqrt2}&b&\frac{-i}{\sqrt3}\\a&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{-1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$ 是酉矩阵，则 $a=$______，$b=$______，$c=$______.

三、单项选择题

1.设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$，则 $A\sim B$ 的充要条件是(　　)

(a) A 与 B 有相同的特征值.

(b) A 与 B 有相同的最小多项式.

(c) A 经过有限次初等变换可化为 B.

(d) A 与 B 有相同的初等因子组.