经济应用数学学习指导

成都科技大学出版社

经济应用数学学习指导（一）

微 积 分

刘祖佑 张云香 付 平
张宝丽 杨晓玲 张 俊
编著

成都科学技术大学出版社

一九八八年·成都

前　言

《经济应用数学学习指导》是西南财经大学、北京财贸学院、贵州财经学院、云南财贸学院、重庆工业管理学院、浙江财经学院、重庆商学院等院校相关系室编写的经济管理类本科教材《经济应用数学》的配套辅助读物，由西南财经大学、贵州财经学院、云南财贸学院、北京财贸学院有关系室数学教师编著。

编写中进行了教材内容的提要、小结及疑难问题分析，通过对一些典型例题的剖析以增强对数学基本概念与基本理论的理解，提高数学基本运算的技能，并给出教材习题答案及部份习题选解。

本书由刘祖佑、张云香、张宝丽、付　平、杨晓玲、张俊老师主编，由刘祖佑、李茂南、许仁忠老师主纂。编写与成稿过程中，得到西南财经大学经济信息管理系经济数学教研室教授吴怀先生的悉心指导，并承蒙他审定了全书。在此，向吴怀先生表示衷心的感谢。

编者水平有限，加之成书时间仓促，错误在所难免，恳请读者斧正，以利提高与改进。

《经济应用数学学习指导》

编　写　组

一九八八年教师节

《经济应用数学学习指导》编写组成员

（以姓氏笔划为序）

付　平　许仁忠　李茂南　汪荣伟　刘祖佑
刘雅梅　吴　红　林学杰　张　俊　张云香
张宝丽　杨晓玲　钟冠国

主纂　钟冠国　许仁忠
主审　吴　怀

目　　录

微积分（上）

微积分（下）

第一章 函　　数

一　内容提要

（一）函数的概念

1　函数的定义　在某一变化过程中，设有两个变量x和y，对于x的变化范围$D(f)$中的每一个x，按照某一对应规律f，变量y总有一个或多个确定的值与之对应，则称y是x的函数，记作$y=f(x)$。其中x叫做自变量，y叫做因变量，且称$D(f)$为函数的定义域，相应地y的变化范围叫做值域，记为$Z(f)$。

函数$y=f(x)$中的符号"f"表示x与y之间的某种对应规律，$f(x)$是一个整体符号，不要误认为f与x相乘。对于不同的对应规律，选用不同的符号以示区别。如$y=f(x)$，$y=g(x)$，$y=\psi(x)$等。有时甚至可重复用一字母，如$y=y(x)$，$R=R(x)$。

符号$f(x_0)$叫做函数$y=f(x)$在$x=x_0$处的值，有时也记为$y|_{x=x_0}$或$f(x)|_{x=x_0}$，若$f(x_0)$有确定值，又称函数$f(x)$在该点有定义。

函数定义涉及定义域、对应规律和值域三个要素，前两者最重要。若两个函数的定义域和对应规律均相同，则两已

知函数相同；前两者有一要素不相同，则两已知函数就不相同。

〔例1〕判断下列各对函数中，哪两个相同。为什么？如果不同，有何区别？

(1) $y=1$与$y=\sin^2x+\cos^2x$；(2) $y=1$与$y=\frac{x}{x}$；

(3) $y=\sin x$与$y=\cos x$；(4) $y=2\lg x$与$y=\lg x^2$。

解 (1) 相同。因为$D(f)\in R$，对应规律都是：不论x取何值，y都恒等于1。因此是相同的函数。(2) 不同，因定义域不同，前者$x\in R$，后者$x\neq 0$。(3) 不同。因为尽管定义域都是$x\in R$，且值域$Z(f)$相同($|y|\leqslant 1$)，但对应规律不同。如$x=\frac{\pi}{2}$时，$\sin\frac{\pi}{2}=1$，而$\cos\frac{\pi}{2}=0$。(4) 不同。因定义域不同，前者$x>0$，后者$x\neq 0$。

2　*函数定义域的求法*　当函数$y=f(x)$通过一个表达式表示时，我们规定$D(f)$是使该式子有意义的自变量的值的全体。因此，由解析式考虑：(1) 分母中含有自变量时，分母不能为零。(2) 偶次根式下含有自变量时，负数不能开偶次方。(3) 对数式的底数含有自变量时，底大于零，且不等于1；真数含有自变量时，零和负数没有对数。(4) 正、余切函数符号下的式子含有自变量时，不使函数值趋于$\pm\infty$；反正(余)弦符号下含有自变量时，绝对值不大于1。(5) 函数的解析式由实际问题而得，除使解析式有意义外，还要符合实际问题的要求。(6) 如果函数的表达式由若干项组成，则定义域是各项定义域的公共部分。(7) 对于几个表达式表示的分段函数，其定义域是各式定义域加在一起。

函数的定义域一般有以下几种表示法：（1）不等式表示法。（2）区间表示法。（3）集合表示法。（4）图示法。（5）叙述法。至于用何种方法题目不要求时，可视具体情况而定，也可几法合用。

3　分段函数　在其定义域内，不能用一个式子，而是用两个或两个以上的式子表示的函数称为分段函数。

〔例2〕求 $y=\sqrt{\ln\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$ 的定义域$D(f)$ 。

解　要使函数y的表达式有意义，必须有

$$\begin{cases}\frac{5x-x^2}{4}>0 & ①\\ \ln\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)\geqslant 0 & ②\end{cases}$$

解①得，$0<x<5$，解②得$1\leqslant x\leqslant 4$，求公共部分得 $D(f)$ 是$[1,4]$。

〔例3〕求$y=\sqrt{16-x^2}+\ln\sin x$的$D(f)$。

解　要使y的表达式有意义，必须有

$$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0 & ①\\ \sin x>0 & ②\end{cases}$$

解①得，$x^2\leqslant 16$，即$|x|\leqslant\sqrt{16}=4$，即$-4\leqslant x\leqslant 4$。

解②，由于正弦函数在第一、二象限为正，因此$0<x<\pi$，又因为正弦函数的周期是2π，故　$2k\pi<x<2k\pi+\pi$（$k\in$ 整数集N）。求公共部分得$D(f)$是$[-4,\pi)\cup(0,\pi)$。

〔例4〕已知函数

$$f(x)=\begin{cases}-x & x<0 & ①\\ x^2 & 0\leqslant x<3 & ②\\ x-2 & 3<x & ③\end{cases}$$

求$f(x)$的定义域及$f(-2)$、$f(0)$、$f(3)$、$f(5)$。

解　这是一个分段函数，把几个式子的定义域加在一起就是$f(x)$的定义域。即

$$D(f)=\{x|x\in(-\infty,0)\}\cup\{x|x\in[0,3)\}\cup\{x|x\in(3,+\infty)\}$$
$$=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)。$$

要求函数值$f(-2)$，首先观察每一分段的定义域。由于$-2<0$，则代入表达式①，即$f(x)=-x$，所以$f(-2)=-(-2)=2$。同理$f(0)=x^2|_{x=0}=0$；$f(5)=(x-2)|_{x=5}=3$。因为$x=3$处无定义，故不能使用任何一个表达式，所以$f(3)$不存在。

〔例5〕设园的半径为R，则面积

$$S=\pi R^2$$

是R的函数。由解析式看，R可取一切实数；但从实际出发，半径只能为正，至多退缩为点园，故定义域为$[0,+\infty]$。

（二）函数的几个简单性质

1　奇偶性　若函数$y=f(x)$的定义域是$[-a,a]$$(a>0)$，在其内任取一点$x$，恒有$f(-x)=-f(x)$，则称$y=f(x)$是奇函数；恒有$f(-x)=f(x)$，则称$y=f(x)$是偶函数；两个条件均满足，称$y=f(x)$是既奇又偶函数；两个条件都不满足，称$y=f(x)$是非奇非偶函数。偶函数的图象关于$y$轴对称；奇函数的图象关于原点对称。在定义域内，两个偶函数的积或商仍是偶函数；两个奇函数的积或商是偶函数。

〔例1〕 判断零函数$f(x)=0(x\in R)$的奇偶性。

解　因为$f(-x)=0=f(x)$，且$f(-x)=0=-0=-f(x)$，所以，零函数$f(x)=0$是既奇又偶函数。

〔例2〕 函数$f(x)=x^2$在$[-1,2)$内是否偶函数。

解　注意到定义中对称区间$[-a,a]$，在$[-1,1]$上显然$(-x)^2=x^2$是偶函数。但题目未给$f(x)$在$(-2,-1)$的表达式，从而不能确定在$(1,2)$上也有$f(-x)=f(x)$，进而不能确定$f(x)$在$[-1,2)$上是偶函数。

2　单调性　若函数$y=f(x)$对区间(a,b)上的任意两点$x_1<x_2$，恒有$f(x_1)<f(x_2)$（$f(x_1)>f(x_2)$），则称$y=f(x)$在区间(a,b)内是单调增加（减少）的。

〔例3〕 证明$f(x)=x^2$ 在$(0,\infty)$上是增函数。

证　（不少读者不注意定义中x_1和x_2的任意性，而取$x_1=1$，$x_2=3$，由 $f(1)=1^2<3^2=f(3)$ 就认为是证明了$f(x)=x^2$是增函数，这是错误的）。$\forall x_1$，$x_2\in(0,\infty)$，且$x_1<x_2$，由$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)$，由$x_1,x_2\in(0,\infty)$且$x_1<x_2$知，$x_1+x_2>0$；$x_1-x_2<0$，故$f(x_1)-f(x_2)<0$，即$f(x_1)<f(x_2)$，所以$f(x)=x^2$在$(0,\infty)$上是增函数。

判断函数的增减性，常用导数判别法，它比用定义判断简捷，详见后面章节。

3　有界性　应注意的是函数是否有界，不仅与函数表达式有关，而且还与给定区间有关。例如$y=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$内无界，而在$(1,2)$内是有界的。

4　周期性　对于函数$y=f(x)$，如果存在正的常数T，

使$f(x+T)=f(x)$恒成立，则称此函数为周期函数。满足这个式子的最小正数T，称为$f(x)$的周期。例如$y=\sin x$，$y=\cos x$的周期是2π，而$y=\mathrm{tg}x$，$\mathrm{ctg}x$的周期是π。一般地$y=A\sin(\omega t+\varphi)$的周期$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$，（其中$A\neq0,\omega>0,\varphi$都为常数）。

〔例4〕 求证$y=3$是周期函数，但无周期。

证 $\because f(x)=3$，$\therefore f(x+T)=3$（T为任意正实数），故$y=f(x)=3$是周期函数；但正实数R^+中无最小者，所以找不到周期。

（三）显、隐、反、复合函数

1 显函数与隐函数 若自变量x与因变量y的函数关系是由$y=f(x)$表达的，称为显函数；是由方程$F(x,y)=0$表达的，称为隐函数。将$F(x,y)=0$化为$y=f(x)$（若可能的话）称为隐函数的显化。例如

$$Ax+By+C=0\text{显化为}y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}\quad(B\neq0)$$

$$x^2+y^2=R^2\text{显化为}y=\pm\sqrt{R^2-x^2}\text{等等。}$$

2 反函数 设已给y是x的函数：$y=f(x)$，若将y当作自变量，x当作因变量，则由上式所确定的函数：$x=f^{-1}(y)$叫做函数$f(x)$的反函数。为了与习惯一致，字母对调，则$y=f(x)$的反函数就写成$y=f^{-1}(x)$。

它们三者的关系如下表：

$$y=f(x)\xrightarrow[\text{等运算}]{\text{经过有限次初}}x=f^{-1}(y)\xrightarrow{\text{将x、y字母对调}}y=f^{-1}(x)$$

定义域：	P	Q	Q
值　域：	Q	P	P
图　形：	M	M	N

M与N关于直线$y=x$对称

〔例1〕求下列函数的反函数：

(1) $y=\dfrac{n+2}{n-2}$；　　(2) $y=(x-1)^3$；

(3) $y=\log_a(x+\sqrt{x^2-1})(a>0,a\neq1)$。

解　(1) $y=\dfrac{n+2}{n-2}\to ny-2y=n+2\to n(y-1)=2(y+1)\to n=\dfrac{2(y+1)}{y-1}$。$\therefore y=\dfrac{n+2}{n-2}$的反函数是$y=\dfrac{2(n+1)}{n-1}$；

(2) $y=(x-1)^3\longrightarrow x-1=\sqrt[3]{y}\longrightarrow x=\sqrt[3]{y}+1$，$\therefore y=(x-1)^3$的反函数是 $y=\sqrt[3]{x}+1$；(3) $y=\log_a(x+\sqrt{x^2-1})\longrightarrow x+\sqrt{x^2-1}=a^y\to\sqrt{x^2-1}=a^y-x\to x^2-1=(a^y-x)^2\to x^2-1=a^{2y}-2xa^y+x^2\to x=\dfrac{1+a^{2y}}{2a^y}=\dfrac{a^{-y}+a^y}{2}$，

$\therefore y=\log_a(x+\sqrt{x^2-1})$的反函数是$y=\dfrac{a^{-x}+a^x}{2}$。

3　复合函数　如果y是u的函数，即$y=f(u)$，而u是x的函数，即$u=\varphi(x)$，并且对于x值所对应的u值，函数$y=f(u)$有定义，则函数$y=f[\varphi(x)]$叫做x的复合函数。x叫自变量，u叫中间变量，f叫外层函数，φ叫内层函数。内层函

数的值域必须使外层函数有定义。

例如，$y=u^2$，$u=\sin x$，则$y=\sin^2 x$是x的复合函数。但不是任意两个函数都可以复合，如象$y=\ln u, u=-(x^2+3)$就不能复合成y对x的复合函数。因为前者$D(f)$是$u>0$，而后者值恒小于零。

〔例2〕函数$y=\sin\lg(2+\sqrt{1+x^2})$是由哪些简单函数复合而成的?

解 $y=\sin u, u=\lg v$，$v=2+\omega$，$\omega=\sqrt{t}$，$t=1+x^2$复合而成。

（四）初等函数

1 *基本初等函数* 常值函数：$y=C$（C为常数)、幂函数：$y=x^\alpha$（α为任何实数)、指数函数：$y=a^x(a>0,a\neq1)$、对数函数：$y=\log_a x(a>0,a\neq1)$、三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\mathrm{tg}x$，$y=\mathrm{ctg}x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$和反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\mathrm{arctg}x$，$y=\mathrm{arcctg}x$，$y=\mathrm{arcsec}x$，$y=\mathrm{arccsc}x$，这六种函数统称为基本初等函数。性质和图象详见教材。

2 *初等函数* 由基本初等函数经过有限次的四则运算和复合所构成的并可用一个式子表示的一切函数，统称为初等函数。

〔例1〕函数$y=1+x+x^2+\cdots$是初等函数吗？

解 不是。因为它不是由基本初等函数经过有限次四则运算而是无限次四则运算而得。

显然，分段函数不是初等函数。因为它不是由一个式子表示而是两个或两个以上式子表示的。

由幂函数和常量通过乘法和加、减法运算构成的初等函数叫做有理整函数，在经济学中最为常见，一般形式为

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n \quad (n\text{为正整数})$$

当$n=0$时，$y=a_0$(常值函数)、当$n=1$时，$y=a_0+a_1x$(线性函数)、当$n=2$时，$y=a_0+a_1x+a_2x^2$(二次函数)、当$n=3$时，称为三次函数。

若$f(x)$、$g(x)$都是有理整函数，则形如$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$($g(x)\neq 0$)的函数叫做有理分函数。

（五）几个常用的经济函数

1　总收入函数R　设某商品的价格为p，销售量为q，则总收入R是销售量的函数，即$R=R(q)=pq$。称R为总收入函数。

2　总成本函数C　总成本由固定成本C_0和可变成本C_1两部分组成。一般情况下，可变成本随产量q增加而增加，即$C=C(q)=C_0+C_1(q)$。称C为总成本函数。若将总成本函数$C(q)$除以产量q，就得平均成本，即$\overline{C}=\dfrac{C(q)}{q}$。

3　利润函数L　设生产q件产品的总收入为$R(q)$，而总成本为$C(q)$，那么$L(q)=R(q)-C(q)$。称L为利润函数。当总收入与总成本相等时刻的产量称为损益分歧点，即$L(q)=0$的q值为损益分歧点。

4　需求函数$Q(p)$　社会对某商品的需求量Q，通常随价格p而异。价格越高，需求量愈小；价格越低，需求量愈大。故需求量是价格的函数，即$Q=Q(p)$。

5　*价格函数*$p(Q)$　需求函数是把销售量（需求量）看作价格的函数，反之，把价格看成销售量的函数，即价格的高低由销售量的变化而变化，那么$p=p(Q)$。称为价格函数。

6　*库存问题中的函数关系*　无论是生产部门还是流通部门都存在库存问题，它解决得好坏，直接影响到产品的成本和利润的大小，处理不当将造成供应脱节，资金积压，周转失调。

生产部门年产量是个实数a，由于人、物、财力诸多经济因素的影响一般都是分期分批生产，若批量（每批生产量）为x，则批数为$\frac{a}{x}$（一般为正整数），每批生产都要耗费生产准备费（如采购费、运输费、机器调试费等），生产出的每批产品又不能一次性投入市场，故一部分转入仓库，因而又要花费库存费。一般情况下，产品都是均匀投放市场，即平均库存量等于批量的一半，就是$\frac{x}{2}$。这就是说，生产准备费与库存费这两笔费用的和是产品批量的函数。

二　典型例题分析

〔例1〕单项选择题

1　若$ab>0$，$ac<0$，则直线$ax+by+c=0$不通过(A)第一象限；(B)第二象限；(C)第三象限；(D)第四象限。(C)

2　若$a>0$，$b>0$，则$\frac{a+b}{2}$，$\sqrt{ab}$，$\frac{2ab}{a+b}$三个数的大小顺序是(A) $\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{2ab}{a+b}$；$(B)$ $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant$