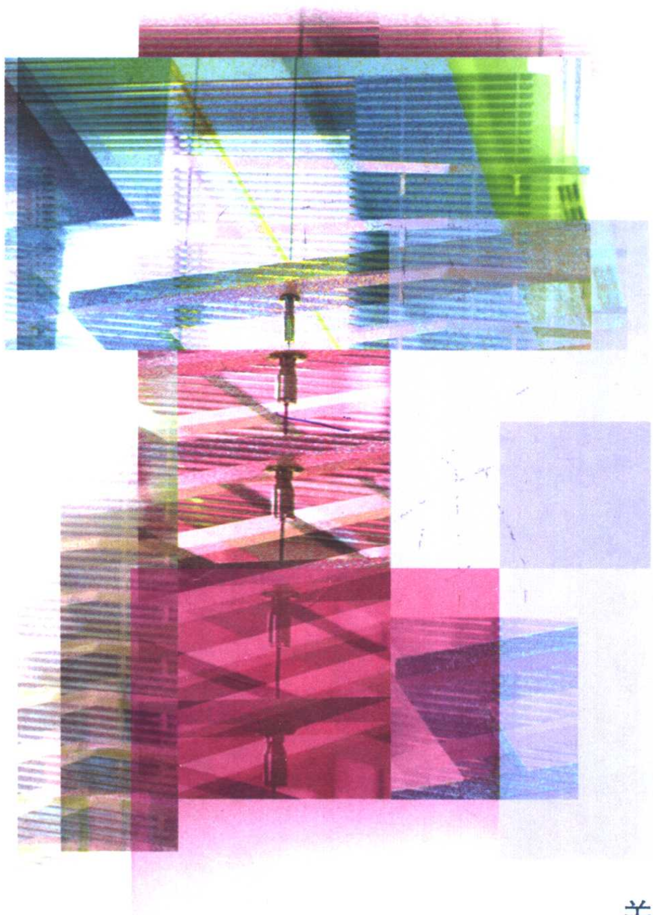
武汉大学出版社

全国高等教育自学考试

高等数学（一）微积分
同步练习与综合测试



主编 关长铭
王春莲

全国高等教育自学考试

高等数学(一)　微积分
同步练习与综合测试

主　编　关长铭　王春莲
副主编　王红蔚　杨　皓　秦明山

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(一)微积分同步练习与综合测试/关长铭,王春莲主编.—武汉:武汉大学出版社,2002.12

全国高等教育自学考试

ISBN 7-307-03700-9

Ⅰ.高… Ⅱ.①关… ②王… Ⅲ.微积分—高等教育—自学考试—自学参考资料 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 066919 号

责任编辑:史新奎　　责任校对:张　昕　　版式设计:支　笛

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn 网址:www.wdp.whu.edu.cn)

印刷:武汉市新华印刷有限责任公司

开本:880×1230 1/32 印张:21.375 字数:613 千字

版次:2002 年 12 月第 1 版　　2002 年 12 月第 1 次印刷

ISBN 7-307-03700-9/O·271　　定价:29.00 元

前　言

——致自考朋友们

1999年我们曾送给自考朋友们一本书，叫做《高等数学（二）试题解答与分析》。今年，我们又把《高等数学（一）微积分同步练习与综合测试》奉献给朋友们。

本书以全国高等教育自学考试指定教材、武汉大学出版社出版、复旦大学高汝熹主编的《高等数学（一）微积分》一书为蓝本。考虑到自考朋友们“业余”、“自学”的特点，为了能更切实、有效地帮助各位应考者学好高等数学（一），并顺利地通过全国统一考试，在本书中我们作了以下方面的努力：

第一，针对部分自考朋友中学数学知识不足或有所忘却的事实，本书在预备篇里列出了学好高等数学（一）应必备的基本知识。可以免去查找之苦。

第二，对教材的每一章，本书都指出了需要掌握的“基本知识、基本理论和基本方法”，强调了知识间的内在联系和学习中应注意的问题。

第三，对指定教材中的全部习题和复习题，本书都分章分节一一作了解答。解答不但思路清晰、方法简便、步骤详尽，而且有些题目还给了一题多解，作了分析，指出了应该掌握的方法和需要注意的问题。

第四，为了使自考朋友们对全国统考题目的深度和广度有较全面的了解，同时又使书的篇幅不至于过大，我们选了全国1996年下半年至2002年上半年共12套试题。对这些试题，我们没有采取“试题汇编”的形式，而是对试卷先行拆散，并按章节、知识顺序和难易程度重新进行分类、组合，然后再一一作出解答，并给出了必要的分析。

这种“自讨苦吃”的做法，目的有二：其一，把同类问题集中在一起，各题又以不同形式出现，便于自考朋友们作出分析、对比，从中悟出规律性的东西，有利于培养朋友们按知识规律思考问题和解答问题的能力。这是“就题论题”的做法所难以解决的。其二，全国自学考试题中，每套都有 40 分的选择题，而指定教材中又偏偏没有这种类型的习题。本书把考题中属于每章的选择题分别集中起来，也是对教材习题类型的必要补充。这样一来，每章后面都有几十个选择题（它们全都是考题），对它们的解答与分析，可以有效地培养考生用“弃伪”和“存真”两种方法解答选择题的能力。

第五，学习数学，我们始终认为应该“手脑并用”，仅仅在那里看是形不成能力的！为了检验您的能力，也为了作“实战演习”，本书还特意编写了五套模拟试题，希望自考朋友们能自信地运用自己所掌握的知识和思维方法去解答它。要相信自己，您会成功的！不要先看答案。实在做不下去了再翻答案，也好知道自己的差距。

第六，为了还全国统考试卷的本来面目，我们把拆散了的题目又归并在一起附于书后。对其中的选择题集中给出了答案，对其非选择题，也指出答案在哪里。

每个试题在编入各章时，前面都作了说明。例如，“98 上”一·23，1/40 说明该题原系 1998 年上半年全国自考试题的第一大题的第 23 小题，第一大题共 40 分，此题占 1 分。

本书由关长铭（教授）、王春莲（副教授）任主编，王红蔚（副教授）、杨皓（中南财经政法大学）、秦明山（河南大学）任副主编，朱永健、夏宇新、卫铁林、党旭丹、张洪虎、杨明增、李政兴、赵焰、薛晓英、张国学、汪正忠等老师也参加了部分编写工作。

由于时间紧迫，不足之处恳请专家及广大读者赐教！

关长铭

2002 年 12 月于郑州

目　　录

预备篇　中学数学提要

这部分内容是写给中学数学知识有欠缺或不熟悉的自考生的。如果对中学数学知识比较熟悉，自然不必去读它。

以下知识不是中学数学的全部，只是学好高等数学(一)应必备的知识。用得不多或过于复杂与过于简单的公式也没有列入。

一、代数

1. 乘法及因式分解公式

(1) $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

(2) $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$.

(3) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

(4) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

(5) $a^3\mp b^3=(a\mp b)(a^2\pm ab+b^2)$.

2. 分项分式　$\dfrac{A}{(x-a)(x-b)}=\dfrac{A_1}{x-a}+\dfrac{A_2}{x-b}$. 其中 A_1、A_2 为常数，等式左边是真分式.

3. 不等式

(1) $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，(2) $\dfrac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$. 其中 a、b、c 均为正值.

(3) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$.

(4) $|x|-|y|\leqslant|x-y|\leqslant|x|+|y|$.

(5) $||x|-|y||\leqslant|x-y|$.

(6) 若 $|x|\leqslant y$ 且 $y>0$，则 $-y\leqslant x\leqslant y$.

(7) 若 $|x|\geqslant y$ 且 $y>0$，则 $x\leqslant -y$ 或 $x\geqslant y$.

4. 一元二次方程的根及二次三项式

(1) 若 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$，则

根：$x_1,x_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

根与系数关系：$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a},x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

根的判别式：

$$\Delta=b^2-4ac\begin{cases}>0 & \text{有不等二实根,}\\ =0 & \text{有相等二实根,}\\ <0 & \text{有共轭二虚根.}\end{cases}$$

(2) 二次三项式配方与分解

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2-4ac}{4a}\\&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.\end{aligned}$$

5. 数列

(1) 等差数列

设首项为 a_1，公差为 d，项数为 n，第 n 项为 a_n，则

通项　$a_n=a_1+(n-1)d$，

前 n 项和　$S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$.

(2) 等比数列

设首项为 a_1，公比为 q，项数为 n，第 n 项为 a_n，则

通项：$a_n=a_1q^{n-1}$.

前 n 项和：$S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1(q^n-1)}{q-1}$.

6. 指数和对数（m,n 都是正整数）

指数

(1) $a^0=1\ (a\neq0)$.　　(2) $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}\ (a\neq0)$.

(3) $a^{m+n}=a^m\cdot a^n$.　　(4) $a^{m-n}=\dfrac{a^m}{a^n}\ (a\neq0)$.

(5) $(a^m)^n=a^{m\cdot n}$.　　(6) $(a\cdot b)^m=a^m\cdot b^m$.

(7) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m=\dfrac{a^m}{b^m}\ (b\neq0)$.　　(8) $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m\ (a>0)$.

对数（底数 $a>0$ 且 $a\neq1$）

(1) 若 $a^x=M$,则 $\log_a M=x$.

(2) 对数恒等式　$a^{\log_a M}=M$.

(3) $\log_a 1=0,\log_a a=1$.

(4) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$.

(5) $\log_a\left(\frac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N$.

(6) $\log_a M^n=n\log_a M,\log_a\sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_a M$.

(7) 换底公式 $\log_a M=\frac{\log_b M}{\log_b a}$.

7.阶乘（n 为自然数）

(1) $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot n$　（规定:$0!=1$）.

(2) $(2n+1)!!=1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)(2n+1)$.

$(2n)!!=2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)$　（规定 $0!!=0$）.

8.二项式公式

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3$$

$$+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots[n-(k-1)]}{k!}a^{n-k}b^k+\cdots+b^n.$$

二、初等几何

1.圆及圆扇形(半径为 r,θ 是以弧度计的扇形的圆心角)

(1) 圆周长$=2\pi r$,圆面积$=\pi r^2$.

(2) 含 θ 的弧长$=r\theta$,扇形面积$=\frac{1}{2}r^2\theta$.

2.圆柱(底圆半径$=r$,圆柱高$=h$)

圆柱体积$=\pi r^2h$；圆柱侧面积$=2\pi rh$.

3.正圆锥(底圆半径$=r$,圆锥高$=h$,圆锥斜高$=l=\sqrt{r^2+h^2}$).

圆锥体积$=\frac{1}{3}\pi r^2h$;圆锥侧面积$=\pi rl$,圆锥全面积$=\pi r(r+l)$.

4.棱柱及棱锥(底面积$=S$,高$=h$)

棱柱体积$=Sh$,棱锥体积$=\frac{1}{3}Sh$,正棱锥侧面积$=\frac{1}{2}\times$斜高$\times$

底周长.

5.球(半径为 r)

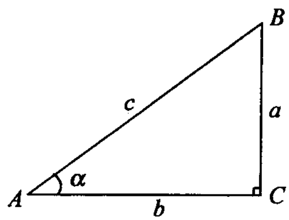
球体积$=\frac{4}{3}\pi r^3$,球表面积$=4\pi r^2$.

三、平面三角

1.度与弧度的关系　$\alpha=\frac{\theta}{180}\pi$($\alpha$ 与 θ 分别表示同一角度的弧度数与度数)

$1°\approx0.01745$ 弧度,1 弧度$\approx57°17'45''$.

2.锐角三角函数定义



$$c=\sqrt{a^2+b^2}.$$

$$\sin\alpha=\frac{a}{c},\cos\alpha=\frac{b}{c},\tan\alpha=\frac{a}{b},$$

$$\cot\alpha=\frac{b}{a},\sec\alpha=\frac{c}{b},\csc\alpha=\frac{c}{a}.$$

3.同角三角函数间的关系式

(1) $\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$.　　(2) $\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$.

(3) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$.　　(4) $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\alpha$.

(5) $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$.　　(6) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

(7) $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$.　　(8) $1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$.

4.特殊角的三角函数值

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$\sec\alpha$	$\csc\alpha$
0	0	1	0	不存在	1	不存在
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	不存在	0	不存在	1

5. 任意角三角函数

设 $A=\left(k\times\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)$，则 A 的三角函数与 α 的三角函数间的关系按“奇变、偶不变，符号看象限”规则确定.

(1) 函数的绝对值 $=\begin{cases}\alpha \text{ 的同名函数}(k \text{ 为偶数}),\\ \alpha \text{ 的互余函数}(k \text{ 为奇数}).\end{cases}$

(2) 函数的正负号 = A 角所在象限内原三角函数的符号(第一象限内，六种函数全为正；第二象限内仅 $\sin A$、$\csc A$ 为正；第三象限内仅 $\tan A$、$\cot A$ 为正；第四象限内仅 $\cos A$、$\sec A$ 为正).

6. 和角公式

(1) $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$.

(2) $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$.

(3) $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$.

(4) $\cot(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}$.

7. 倍角公式与半角公式

(1) $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

(2) $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$.

(3) $2\cos^2\alpha=1+\cos2\alpha$，$2\sin^2\alpha=1-\cos2\alpha$.

8. 三角函数的积与和差关系

(1) $-2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)$.

(2) $2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$.

(3) $2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$.

(4) $2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$.

9. 边角关系(设 $\triangle ABC$ 中角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，外接圆半径为 R)

(1) 正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$.

(2) 余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

10. 反三角函数

函　数	定　义	定义域	值　域	单调性
$y=\arcsin x$	$\sin(\arcsin x)=x$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$	递增
$y=\arccos x$	$\cos(\arccos x)=x$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$0\leqslant y\leqslant\pi$	递减
$y=\arctan x$	$\tan(\arctan x)=x$	$-\infty<x<+\infty$	$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$	递增
$y=\mathrm{arccot}\,x$	$\cot(\mathrm{arccot}\,x)=x$	$-\infty<x<+\infty$	$0<y<\pi$	递减

$\arcsin(-x)=-\arcsin x\quad(|x|\leqslant 1)$.

$\arccos(-x)=\pi-\arccos x\quad(|x|\leqslant 1)$.

$\arctan(-x)=-\arctan x$，$\mathrm{arccot}(-x)=\pi-\mathrm{arccot}\,x$.

四、平面解析几何

1. 点　点 $A(x_1, y_1)$ 及点 $B(x_2, y_2)$ 间的距离 $=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

2. 定比分点　$M(x,y)$是$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$连接线上的一点，则

$$\frac{AM}{MB}=\lambda\begin{cases}\lambda>0, M\text{ 是内分点},\\ \lambda<0, M\text{ 是外分点}.\end{cases}$$

定比分点 M 的坐标 $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$，$y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$ $(\lambda\neq-1)$. 当 M 是线段 AB 的中点时，$x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，$y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$.

3. 直线

(1) 直线斜率：直线倾斜角为 α 时，斜率 $k=\tan\alpha$；直线过点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$时 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$；直线方程为 $Ax+By+C=0$ 时，$k=-\dfrac{A}{B}$.

(2) 直线方程

一般式　$Ax+By+C=0$；

斜截式　$y=kx+b$ ($k=$斜率；$b=$纵截距)；

点斜式　$y-y_0=k(x-x_0)$（过点(x_0,y_0)，斜率为 k）；

截距式　$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$（$a\neq0,b\neq0$，是两轴上截距）；

两点式　$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$（$(x_1,y_1)$、$(x_2,y_2)$是直线通过的两点）.

(3) 点(x_0,y_0)到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离 $=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

(4) 二直线平行、垂直与重合

设二直线 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$；$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$. 则当 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$时，$l_1/\!/l_2$；当 $A_1A_2+B_1B_2=0$ 时，$l_1\perp l_2$；当$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$时，$l_1$ 与 l_2 重合.

4. 圆

方　程	圆　心	半　径
$x^2+y^2=R^2$	$(0,0)$	R
$(x-a)^2+(y-b)^2=k^2$	(a,b)	R
$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$	$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$

5. 椭圆（设 $a=$长半轴，$b=$短半轴，$c=\sqrt{a^2-b^2}$）

方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　焦点在 x 轴上$(-c,0)$、$(c,0)$；中心$(0,0)$，顶点$(\pm a,0)$、$(0,\pm b)$；

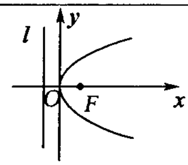
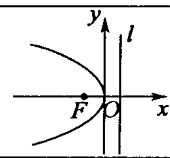
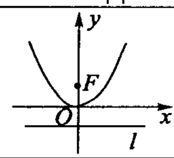
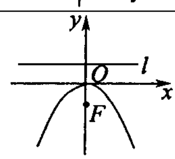
方程$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$　焦点在 y 轴上$(0,-c)$、$(0,c)$；中心$(0,0)$，顶点$(\pm b,0)$、$(0,\pm a)$.

6. 双曲线　方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，焦点$(\pm\sqrt{a^2+b^2},0)$，中心$(0,0)$，实半轴长 $=a>0$，虚半轴长 $=b>0$，渐近线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$，或 $y=$

$\pm\dfrac{b}{a}x$，顶点$(\pm a,0)$.

双曲线 $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$ 是双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的共轭双曲线，它们有共同渐近线.

7.抛物线

方　程	焦　点	准线 l	图　形
$y^2=2px\ (p>0)$	$F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$	$x=-\dfrac{p}{2}$	
$y^2=-2px\ (p>0)$	$F\left(-\dfrac{p}{2},0\right)$	$x=\dfrac{p}{2}$	
$x^2=2py\ (p>0)$	$F\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$	$y=-\dfrac{p}{2}$	
$x^2=-2py\ (p>0)$	$F\left(0,-\dfrac{p}{2}\right)$	$y=\dfrac{p}{2}$	

抛物线　$(y-k)^2=2p(x-h)$的顶点为(h,k).

8.圆锥曲线(圆、椭圆、双曲线、抛物线的统称)

圆锥曲线的切线与法线(过切点与切线垂直的直线)，二者斜率之积为-1.

9.坐标变换

(1) 移轴：$\begin{cases}x=x'+h,\\ y=y'+k,\end{cases}$　或　$\begin{cases}x'=x-h,\\ y'=y-k.\end{cases}$

原坐标系 xOy 中点 $M(x,y)$，与新坐标系 $x'O'y'$ 中的同一点 $M(x',y')$的坐标间的关系.显然新原点 O'在原坐标系中的坐标为