JING JI SHU XUE JI CHU

经济数学基础

佟吉森 单立波 主编

北京工业大学出版社

经济数学基础

佟吉森　单立波主编

北京工业大学出版社

(京)新登字 212 号

经济数学基础

主编 佟吉森 单立波

北京工业大学出版社出版发行

各地新华书店经销

石家庄市[illegible]印刷

1992年5月第1版 1992年5月第1次印刷

850×1168 毫米 32开本 11.2[illegible]印张 282千字

印数:1—2300册

ISBN 7-5639-0239-2/O·12

定价:8.20元

前　言

《经济数学基础》1984年内部出版，七年来曾使用于各地区各经济类大学专科、函授、业余大学、管理干部专修科等的教学。为适应各地区各类经济院校教学的需要，特别是当前现代化经济管理的需要，由中央财政金融学院数学教研室集体修订。

全书由佟吉森、单立波副教授主编。参加编写的有吴秉坚、车煊、安云碧、付小琴、任慧之等。编写过程中曾得到北京师范学院数学系华德康副教授、北京计算机学院杨荫华副教授、北京航空航天大学张杜英讲师等同志的帮助并提出了宝贵意见，在此表示衷心感谢。

由于时间紧迫，本书尚存不足之处，诚望广大读者批评指正，以供再版时修改。

编者

1991年9月

目　　录

第一章　函数

微积分研究的主要对象是函数。我们在中学里已经学过函数的概念和一些初等函数。本章在此基础上将再作概括地复习和提高。

第一节　函数的概念

一、常量与变量

我们在观察分析自然现象、社会经济现象过程中，常会遇到各种不同的量。例如：距离、速度、温度、时间、面积、成本、价格、利润等。其中某些量在某一过程中始终保持一定的数值，我们称为常量，用字母 a、b、c……表示。还有一些量在此过程中可以取不同的数值，我们称为变量，一般用字母 x、y、z、u、v…… 表示。

例如物体作匀速直线运动：

在这个过程中，速度 v 是常量，时间 t 与距离 S 是变量。

$$S = v \cdot t$$

又如商店里销售某种商品：

在此过程中，商品的单价 a 是常量，而销售量 W 与总收入 R 是变量。

$$R = \mathrm{a} \cdot W$$

注意：(1) 一个量是常量不是变量是对某一过程来说的，并不是绝对的。同一个量在这个过程中是常量，而在另一过程中就可能是变量。

(2) 在某一变化过程中，变化很小的量，不影响计量的有效数字时，也可视为常量，例如地球重力加速度（g），虽然在地球各地测量值并不相同，但人们一般都取 g＝980 厘米/秒^2，视它为常量。

二、函数的概念

在同一个自然现象或经济问题中，往往有几个变量同时存在，它们彼此之间并不是孤立的，而是互相联系，互相依赖，并按照一定的规律变化着。我们先看几个例子。

例 1. 某商品每件成本为 3 元，今卖出 100 件，如果每件价格用 X(元)表示，所获利润 P(元)，它们之间就有关系：

$$P=100(X-3)$$

例 2. 用温度自动记录仪记录的某地区一天气温变化曲线如图 1-1。

这条曲线表现了气温 T 随时间 t 变化的规律。在这里 t 的变化范围是 $0\leqslant t\leqslant 24$ 在 t 的变化范围内，每给某一确定时间 t，就有一个确定的温度 T 与之对应。如图当 $t=0$ 时，$T=17℃$；$t=18$ 时，$T=20℃$。

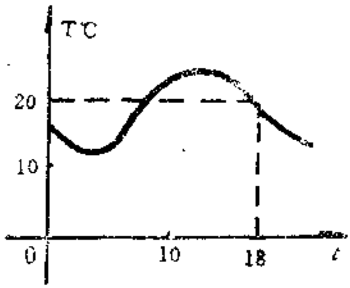

图 1-1

例 3. 某城市一年里各月的毛线零售量(单位：100kg)如表 1-1 所示：

表 1－1

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
零售量 s	81	84	45	45	9	5	6	15	94	161	144	123

表 1-1 表示了某城市毛线零售量 s 随月份 t 的变化而变化的关系。

上面三个例题，虽然实际意义各不同，变量之间的对应关系也是用不同方式表达的，但它们具有一个共同特点：在某一变化过程中有两个变量，这两个变量是相互联系相互依赖的，当一个变量在某个变化范围内取一个确定的值时，另一个变量就会按照一定的规律得到唯一的确定值与之对应。我们称变量之间的这种对应关系为函数关系。

1. 函数的定义

设在某一变化过程中，有两个变量 x 和 y，如果对于变量 x 在其变化范围 D 内所取的每一个值，按照一定的对应规律，变量 y 总有唯一的确定的值与之对应，我们就称变量 y 是变量 x 的函数，记为

$$y = f(x)$$

其中 x 叫做自变量，y 随 x 的变化而变化，叫做因变量。x 的变化范围 D 叫做函数的定义域。

如果自变量 X 在 D 内取一点 x_0，因变量 y 也对应取一值记为 y_0，$f(x_0)$ 或 $y|x = x_0$，则 $f(x_0)$ 叫做函数在 $x = x_0$ 点的函数值。函数取值的范围叫做函数的值域。

记号 $y=f(x)$ 中的 "f" 表示 y 与 x 的对应规则。对应规则也常常用 φ，g，F 表示，则函数也就记作 $\varphi(x)$，$g(x)$，$F(x)$ 等。

2. 函数定义域的确定

函数的定义域实际上是自变量 x 允许取值的点的集合，因此函数的定义域一般是用集合表示的。

为了方便，通常我们还用"区间"来表示函数的定义域。

介于两个实数 a，b ($a<b$) 之间的全体实数叫有限区间。a，b 分别叫区间的左、右端点，$b-a$ 叫区间的长度。不包括两个端点 a，b 在内的区间，即满足不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的全体叫开区间，记为 (a, b)。包括两个端点 a、b 在内的区间，即满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的全体集合叫闭区间，记为 $[a, b]$。只包括一

个端点的区间，即满足不等式 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$ 的实数 x 的全体叫半开区间，记为 $(a, b]$ 或 $[a, b)$。

除有限区间以外，还有无限区间：

全体实数组成的区间，记为 $(-\infty, +\infty)$ 或 $-\infty<x<+\infty$；所有大于 a 的实数组成的区间记为 $(a, +\infty)$ 或 $a<x<+\infty$；若包括 a 点则记为 $[a, +\infty)$ 或 $a\leqslant x<+\infty$；所有小于 b 的实数组成的区间记为 $(-\infty, b)$ 或 $-\infty<x<b$；若包括 b 则记为 $(-\infty, b]$ 或 $-\infty<x\leqslant b$。

函数的定义域的确定一般来说有两点原则：

(1) 对于实际问题，函数的定义域要符合实际问题的意义。

(2) 对于用公式表示的函数，如果不指明实际意义，则定义域为使函数表达式有意义的实数集。

例 4. 球的体积 v 与球的半径 r 之间的函数关系为：$v=\frac{4}{3}\pi r^3$，试确定此函数定义域。

解：因为球的半径不能取负值，故 $r\geqslant 0$，即其定义域为 $[0, +\infty)$。

例 5. 求函数 $y=\frac{1}{x-1}$ 的定义域。

解：显然在 $\frac{1}{x-1}$ 中，当且仅当 $x-1\neq 0$ 时，即 $x\neq 1$ 时，表达式才有意义。因此函数的定义域为 $x\neq 1$ 的全体实数，用区间表示即：

$$(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$$

例 6. 求函数 $y=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ 的定义域

解：因为在实数范围内负数不能开方，所以 $4-x^2\geqslant 0$，又因为根式在分母上，所以 $4-x^2$ 不能为零。故要使表达式有意义，必须而且只须 $4-x^2>0$ 即 $x^2<4$ 或 $|x|<2$。所以函数的定义域为 $-2<x<2$ 即 $(-2, 2)$。

例 7. 求函数 $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$的定义域

解：因为要使$\frac{1}{1-x^2}$有意义，必须有 $1-x^2\neq0$，即 $x\neq\pm1$。而要使 $\sqrt{x+2}$有意义，必须有 $x+2\geqslant0$ 即 $x\geqslant-2$，故要使函数的表达式有意义，应同时有 $x\neq\pm1$ 和 $x\geqslant-2$，因此函数的定义域为：

$$[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$$

例 8. 求函数 $y=\frac{5}{x^2+4}$的定义域。

解：因为无论 x 取什么值都有 $x^2+4\neq0$，故函数的定义域为全体实数，即$(-\infty,+\infty)$。

三、函数的表示法

常用的函数关系的表示法有三种。

1. 公式法（解析法）：就是用数学式子表示两个变量之间的关系的方法。如例 1 中利润和价格的关系式 $P=100(x-3)$就是这种表示法。微积分中涉及函数关系大多用此方法来表示。

有些函数在整个定义域上不能用统一的一个公式表示，而要用两个或两个以上的式子表示，这类函数叫“分段函数”。

例如：

$$y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant0\\-x & x<0\end{cases}$$

$$y=\begin{cases}x+1 & x<0\\0 & x=0\\x-1 & x>0\end{cases}$$

都是定义在$(-\infty,+\infty)$上的分段函数，其图形分别如图 1-2 和图 1-3。

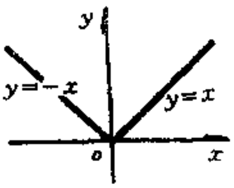

图 1-2

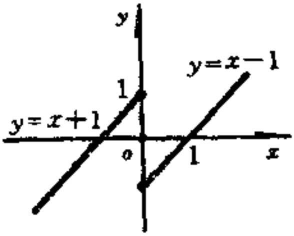

图1-3

注意:(1)分段函数是用几个公式合起来表示一个函数,而不是表示几个函数。

(2)求分段函数的函数值时,要注意自变量的范围。对于自变量的某一部分数值要代入相应式于中去求,

2. 图示法:就是用图形表示两个变量之间的函数关系的方法。如例 2 中由温度自动记录仪记录的温度变化曲线,就是表示温度 T 与时间 t 之间的函数关系。

3. 列表法:就是把一系列自变量的值,以及与它对应的函数值,列成表格来表示函数关系的方法。如例 3 中某城市毛线零售量与随月份变化而变化的函数关系就是用列表法来表示的。

习　　题

1. 设 $f(x)=\dfrac{1}{2+x^2}$

求: $f(0)$, $f(\dfrac{1}{2})$, $f(\dfrac{1}{x})$, $f(x^2)$

2. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1 & x\leqslant 1\\ x+3 & 1<x<3\end{cases}$$

求: $f(\dfrac{1}{2})$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, 指出函数的定义域,并作函

数的图形。

3. 设 $\varphi(t)=a^t$，证明：

$$\varphi(x)\cdot\varphi(y)=\varphi(x+y)$$

4. $y=\frac{x^2}{x}$ 与 $y=x$ 是不是相同的函数关系，为什么？

5. 求下列函数的定义域，并用区间表示。

(1) $y=\frac{4}{x+1}$　　(2) $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$

(3) $y=\sqrt{3x+4}$　　(4) $u=u(t)=\sqrt{t^2-4}$

(5) $y=\sqrt[3]{9-x^2}$　　(6) $y=\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$

第二节　建立函数关系举例

为了解决实际问题，我们往往先要建立函数关系。建立函数关系，要具体问题具体分析，要明确问题中的因变量与自变量，要根据条件，利用几何关系或物理定律及各种经济关系来建立，下面举例说明：

例 1. 要造一个容积为 300 立方米的贮水池，池底材料造价为周围材料造价的两倍，已知周围材料造价为 K 元$/m^2$，试求造价与贮水池底半径 r 的函数关系，如图 1-4。

解：设贮水池底半径为 r，高为 h，总表面积为 S。

因为 $V=300m^3$

$$V=\pi r^2h=300$$

所以 $h=\frac{300}{\pi r^2}$

故水池面积

$$S=\pi r^2+2\pi rh$$

$$=\pi r^2+2\pi r\cdot\frac{300}{\pi r^2}$$

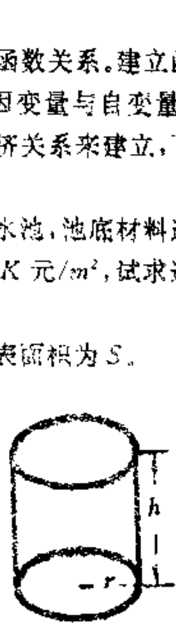

图 1-4

$$=\pi r^2+\frac{600}{r}$$

即：

$$\text{总造价 } A=2K\cdot\pi r^2+K\cdot\frac{600}{r}(\text{元})。$$

例 2. 某产品年产量为 x 台，每台售价 200 元，当年产量在 500 台以内时，可以全部售出，当年产量超过 500 台时，经广告宣传后又可以多售出 200 台，每台平均广告费 20 元，生产再多，本年就售不出去了，试将本年的销售总收入 R 表示为年产量 x 的函数。

解：当年产量 $x\leqslant 500$ 台时，销售总收入为：

$$R=200\cdot x=200x(\text{元})$$

当年产量 x 在 $500<x\leqslant 500+200$ 即 $500<x\leqslant 700$ 时，销售总收入为：

$$\begin{aligned}R&=500\times 200+(x-500)\times 200-(x-500)\times 20\\&=10000+180x-90000=180x+10000(\text{元})\end{aligned}$$

综上所述，本年的售销总收入 R 可以表示为年产量 x 的函数关系是：

$$R=\begin{cases}200x & 0<x\leqslant 500\\180x+10000 & 500<x\leqslant 700\end{cases}$$

例 3. 设某工厂每生产一个单位产品总成本增加 5 元，固定成本为 100 元，求 (1) 总成本与产量的函数关系，(2) 平均单位产品的成本函数。

解：(1) 设此产品的产量为 x 单位，总成本为 C，则总成本函数为：

$$C=C(x)=100+5x(\text{元})$$

(2) 平均单位成本函数为：

$$\bar{C}=\frac{C(x)}{x}=\frac{100+5x}{x}=\frac{100}{x}+5(\text{元})$$

例 4. 设某工厂生产某种产品，单位产品售价为 100 元，若已知总成本函数是产量 x 的函数，且 $C(x)=0.01x^2+5x+100$，又

假定此产品供不应求，试建立利润与产量的函数关系。

解：设产量为 x，销售总收入为 R，利润为 L，则总收入函数

$$R=R(x)=100x$$

故总利润函数为

$$L(x)=R(x)-C(x)=100x-0.01x^2-5x-100$$
$$=-0.01x^2+95x-100(\text{元})$$

习　　题

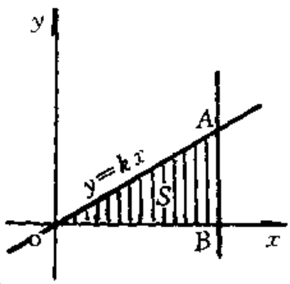

图 1-5

1. 如图 1-5，由直线 $y=k\cdot x$，x 轴及平行于 y 轴的直线 AB，围成一个直角三角形当 AB 线平行移动时，求三角形的面积 S 与 x 的函数关系。

2. 设生产与销售某产品的总收入是产量 x 的二次函数，经统计得知，当产量 $x=0$，2，4 时，总收入 $R=0$，6，8，试确定总收入 R 与产量 x 的函数关系。

3. 某工厂生产一批产品 x 个单位，总成本 $C(x)=5x+200$(元)，每批产品得到的收入 $R(x)=10x-0.01x^2$(元)，试确定利润与产量 x 的关系。

第三节　　函数的几种简单性质

一、函数的奇偶性

设函数 $f(x)$在$[-a,a]$上有定义，若 $f(x)=f(-x)$则称函数 $f(x)$在$[-a,a]$上为偶函数。它的图形对称于 y 轴，若 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$在区间$[-a,a]$上为奇函数，它的图形

关于原点对称。

例 1. 判断 $y=f(x)=x^4+x^2$ 的奇偶性。

解：因为 $f(-x)=(-x)^4+(-x)^2=x^4+x^2=f(x)$

所以 $y=f(x)=x^4+x^2$ 为偶函数。

例 2. 判断 $y=f(x)=x^3+2x$ 的奇偶性。

解：因为 $f(-x)=(-x)^3+2(-x)=-x^3-2x=-f(x)$

所以函数 $y=f(x)=x^3+2x$ 为奇函数。

例 3. 判断 $y=f(x)=x^3+x^2+5$ 的奇偶性。

解：因为 $f(-x)=(-x)^3+(-x)^2+5=-x^3+x^2+5$

既不等于 $f(x)=x^3+x^2+5$，也不等于

$-f(x)=-x^3-x^2-5$

所以 $y=f(x)=x^3+x^2+5$ 既非奇函数，也非偶函数。

二、函数的周期性

对于函数 $y=f(x)$，如果存在正的常数 l，使得 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，则称 $y=f(x)$ 为周期函数。满足这个等式的最小正数 l，称为周期函数的周期。

如：$y=\sin x$，$y=\cos x$ 均为以 2π 为周期的周期函数，$y=\mathrm{tg}x$ 是以 π 为周期的周期函数。

三、函数的单调性

若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上随自变量 x 增大而增大，即对于区间内任意两点 x_1,x_2 且 $x_1<x_2$ 若有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上为单调增加函数。它的图形是一条沿 x 轴正向上升的曲线，如图 1-6。

若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内随自变量 x 的增大而减小，即对于 (a,b) 内任意两点 x_1,x_2 且 $x_1<x_2$ 有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上为单调减少函数。它的图形是一条沿 x 轴正向下降的曲