高等职业技术院校教材

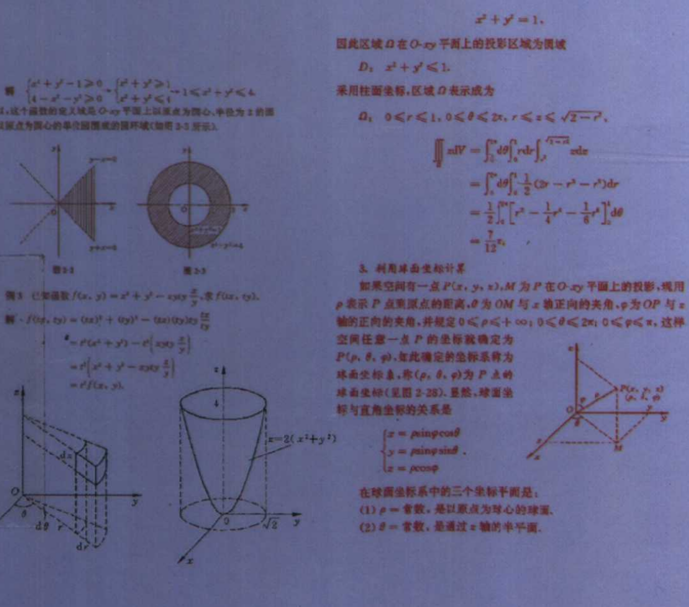
数学

总主编　张圣勤　史　历

应用数学

主　编　史　历

副主编　岳中玉　吴羽萍



复旦大学出版社

高等职业技术院校教材

数　学

总主编　张圣勤　史　历

应用数学

主　编　史　历
副主编　岳中玉　吴羽萍

复旦大学出版社

内 容 提 要

本教材共分五册，各册本着“降低理论要求，优化结构体系，加强实际应用，注重能力培养”的原则，在结构处理上和内容安排上力求做到学习理论知识与培养能力相结合，各册中还选配了大量的例题和习题.

本册是本教材中的一册，共分七章，介绍向量、解析几何、微积分学、线性代数、概率与数理统计、线性规划、数学建模等内容.

本册可作为招收初中毕业生的五年制和招收高中毕业生的三年制的高职、高专工科学生的数学教材，也可作为成人高职、高专的教材.

前　言

欢迎使用这本高职数学教材.本教材是根据现行全日制普通初级中学、高级中学数学教学大纲和五年制高职协作会高职数学教学基本要求,组织全国部分高等职业技术院校长期从事高职教学的教师及部分具有教学经验的重点中专学校数学教师编写的.主要适用于招收初中毕业生的五年制高职工科学生,其中三、四两册还适用于招收高中毕业生的三年制的高职工科学生,也可供高职成人教育和中专教育使用,也可作为一般工程技术人员参考书.

在本教材的编写过程中,作者本着"降低理论要求,优化结构体系,加强实际应用,注重能力培养"的原则,在教学内容上删去了一些繁琐的数学证明,力求把数学内容讲得简单易懂,选配了大量的例题和习题,以便于教师的教学和学生的自学;在结构处理上注意与现行初高中数学教学内容的衔接,结合理工科高职教育的特点照顾到专业教学的需要;在习题的编排上照顾到高职工科多专业的特点,力求做到理解数学知识和加强实际应用相结合,主观题和客观题相结合,学习理论知识与培养能力相结合,并力求做到习题难易搭配得当.为跟上计算机发展的步伐和加强学生的数学应用能力,本书特意增加了应用 MATHMATIC 软件的实验和数学建模的内容.书中带有 * 号的内容为选学内容.

本教材共分五册.第一册为初等数学(上);第二册为初等数学(下);第三册为高等数学;第四册为应用数学;第五册为数学实验.本册为应用数学,内容包括向量的概念与运算,空间解析几何,二元函数的微分学、积分学,线性代数,概率与数理统计初步,线性规划,数学建模等.

本教材由上海电机技术高等专科学校张圣勤和西安航空技术高等

专科学校史历担任总主编.本册为应用数学,由西安航空技术高等专科学校史历任主编,由西安航空技术高等专科学校岳中玉和山东轻工业经济管理学校吴羽萍任副主编.各章参编人员是:第一章西安航空技术高等专科学校王静,第二章上海电机技术高等专科学校赵宁军,第三章山东轻工业经济管理学校吴羽萍,第四章岳中玉,第五章湖南工业职业技术学院邓新春,第六章湖南工业职业技术学院陈珊,第七章史历.

在本教材的编写过程中,得到了各参编院校各级领导的关心和支持,同时也得到了北京防灾技术高等专科学校高盛义的支持和帮助,参阅了有关的文献和教材,在此一并表示衷心的感谢.

编者由于时间仓促,加之水平所限,虽经努力但教材中疏漏错误之处在所难免,恳切期望使用本教材的师生多提意见,以便再版时更正.

编 者

2000 年 3 月

目　　录

第一章　空间解析几何

解析几何是学习微积分的基础. 解析几何是用代数的方法研究、解决几何问题的综合性的数学分支. 本章将在平面解析几何理论的基础上运用向量的理论和方法研究空间解析几何.

§1-1　空间直角坐标系

平面上确定一个点需要两个条件,如(x, y),而空间上确定一个点则需要三个条件. 为此,我们建立空间直角坐标系:

在空间取定一点O,过O作三条互相垂直的直线Ox, Oy, Oz,并按右手系规定Ox, Oy, Oz的正向,再规定单位长度. 我们建立的空间直角坐标系如图1-1所示.

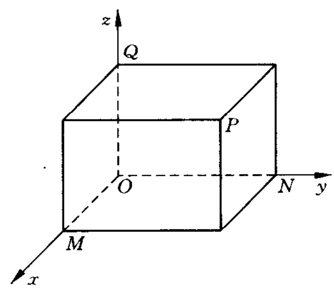


图 1-1

点O称为原点,三条直线分别称为x轴、y轴、z轴. 由两条坐标轴决定的平面称为坐标平面,有O-xy平面、O-yz平面、O-zx平面. 这三个平面把整个空间分为八个部分,每一部分称为一个卦限. 在O-xy平面上方逆时针方向依次为第1～第4卦限,下面对应的为第5～第8卦限.

在空间直角坐标系中,可以定义空间点的坐标.

设P为空间一点,过P点作垂直于三个坐标轴的平面,分别与x轴、y轴、z轴交于M, N, Q三点. 设$OM = x$, $ON = y$, $OQ = z$,则P点唯一地确定了一个三元有序数组(x, y, z);反之,任给一个有序数组(x, y, z),则在x, y, z三轴上分别取点M, N, Q,使$OM = x$,

$ON=y$, $OQ=z$，然后过 M, N, Q 分别作 x, y, z 轴的垂面，这三个平面相交于唯一点 P，称 P 点为由 (x, y, z) 唯一确定的空间点. 于是空间点 P 与一个三元有序数组 (x, y, z) 建立了一一对应关系. (x, y, z) 称为点 P 的空间直角坐标，简称坐标. 记为 $P(x, y, z)$.

特别地，原点坐标为 $O(0, 0, 0)$；x 轴上点的坐标为 $(x, 0, 0)$；y 轴上点的坐标为 $(0, y, 0)$；z 轴上的坐标为 $(0, 0, z)$.

1. 空间两点间的距离公式

由图 1-1 易知，点 P 到原点的距离为

$$|OP| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{1-1}$$

仿此，我们可以求得空间两点间的距离公式.

设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点. 过 P_1, P_2 各作三轴的垂面，构成以 P_1P_2 为对角线的长方体（如图 1-2 所示）. 三条棱长分别为 $|x_2-x_1|$, $|y_2-y_1|$, $|z_2-z_1|$，由勾股定理得

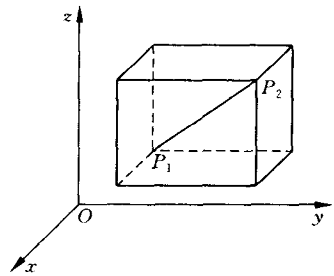


图 1-2

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \quad (1\text{-}$$

例 1 试判定以 $P_1(4, 3, 1)$, $P_2(7, 1, 2)$, $P_3(5, 2, 3)$ 为顶点的三角形的几何特性.

解 $|P_1P_2|^2 = (7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2 = 14$,

$|P_2P_3|^2 = (5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2 = 6$,

$|P_3P_1|^2 = (4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2 = 6$.

显然

$$|P_2P_3| = |P_3P_1| \neq |P_1P_2|,$$

故 $\triangle P_1P_2P_3$ 为等腰三角形.

2. 中 点 公 式

与平面解析几何一样，空间解析几何也有中点公式. 如图 1-2，设 P_1P_2 的中点为 $P(x, y, z)$，则

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \\ z = \dfrac{z_1 + z_2}{2} \end{cases}. \tag{1-3}$$

例 2 求 $P_1(3, 2, 1)$与 $P_2(1, -2, 7)$的中点.

解 由公式(1-3)知

$$\begin{cases} x = \dfrac{3+1}{2} = 2 \\ y = \dfrac{2-2}{2} = 0, \\ z = \dfrac{1+7}{2} = 4 \end{cases}$$

故中点为(2, 0, 4).

习题 1-1

1. 在空间直角坐标系中作出下列各点并指出所在的卦限：

$A(4, 2, 9)$， $B(5, 9, -4)$， $C(6, -1, -5)$.

2. 写出 $P(1, 2, 3)$点的下列对称点的坐标：

(1) 与原点对称；

(2) 与三个坐标平面分别对称；

(3) 与三个坐标轴分别对称.

3. 求 $P(3, -4, 5)$点到原点及各坐标轴间的距离，到各坐标平面的距离.

4. 已知 $A(2, 3, 4)$和 $B(6, 2, z)$，$|AB| = 5$，又 $|AC| = 10$，C 在 AB 延长线上. 求 z 值和 C 的坐标.

5. 求 z 轴上与 $A(-4, 2, 5)$和 $B(3, 5, -2)$等距离的点.

§1-2 向量的概念

一、向量的一般概念及其表示法

通常我们遇到的量有两种：一种是数量，也称标量，这种量仅有大小，如时间、距离等就是标量；另一种量是向量，它不仅有大小而且有方向，如力、位移等都是向量．因此，我们有如下定义．

定义 既有大小也有方向的量称为向量．

向量的代数表示法有两种：一种用 $\boldsymbol{a}$ 表示；另一种用向量的始点 A 与终点 B 来表示，写成$\overrightarrow{AB}$．几何上 $\boldsymbol{a}$ 和$\overrightarrow{AB}$是一条有向线段(见图 1-3)．

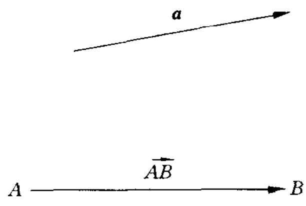


图 1-3

向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度称为向量的模，记作 $|\boldsymbol{a}|$．模为 1 的向量称为单位向量，记为$\boldsymbol{a}_0$．模为 0 的向量称为零向量，记为 $\boldsymbol{0}$．规定零向量的方向是任意的．

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同且 $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是相等的，记作 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$．应注意到它们的始点不一定重合．

与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等但方向相反的向量叫 $\boldsymbol{a}$ 的*反向量*，记作$-\boldsymbol{a}$．

二、向量在坐标轴上的投影

在物理等实际问题中，往往需要把向量分解为几个不同方向的分量以便于解题和分析．因此，我们有必要讨论向量的直角坐标表示法，即向量在坐标轴上的投影．

对于任意向量 $\boldsymbol{a}$ 将其平移使始点在原点 O，则 $\boldsymbol{a}$ 完全由其终点 P 所确定；反过来任给空间点 P，连结 O、P，则可唯一确定一个向量$\overrightarrow{OP}$，简记为 $\boldsymbol{a}$．因此，空间的点与始点在原点的向量有一一对应的关系．

在空间任取一个直角坐标系，并在 x 轴、y 轴、z 轴上各取单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，称为基本单位向量或坐标向量．任给一个向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$（如

图 1-4 所示).

我们定义:$\boldsymbol{a}$ 为其在三轴上的投影之和,即

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OQ},$$

或 $$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}, \quad (1\text{-}4)$$

显然 $|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

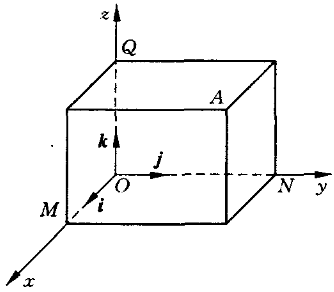


图 1-4

(1-4)式也可简记为

$$\boldsymbol{a}=\{x, y, z\},$$

其中 $x\boldsymbol{i}$, $y\boldsymbol{j}$, $z\boldsymbol{k}$ 分别称为 $\boldsymbol{a}$ 在三坐标轴上的分量;(x, y, z)称为 $\boldsymbol{a}$ 的坐标. 显然零向量 $\boldsymbol{0}=\{0, 0, 0\}$. $\{x, y, z\}$称为 $\boldsymbol{a}$ 的坐标形式.

利用向量的分量与坐标形式,可以定义向量的加减法及数乘向量.

三、向量线性运算

1. 向量的加减法

设 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}=\{x_1, y_1, z_1\}$, $\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}=\{x_2, y_2, z_2\}$, 定义

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=\{x_1\pm x_2\}\boldsymbol{i}+(y_1\pm y_2)\boldsymbol{j}+(z_1\pm z_2)\boldsymbol{k}\\&=\{x_1\pm x_2, y_1\pm y_2, z_1\pm z_2\}. \quad (1\text{-}5)\end{aligned}$$

2. 数 乘 向 量

设 λ 为实数,$\boldsymbol{a}$ 为一个非零向量,定义

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda x\boldsymbol{i}+\lambda y\boldsymbol{j}+\lambda z\boldsymbol{k}=\{\lambda x, \lambda y, \lambda z\} \quad (1\text{-}6)$$

为数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的数乘向量.

显然,由(1-6)式可知:(a) $\lambda\boldsymbol{a}$ 仍为一个向量. 当 $\lambda>0$ 时 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向;当 $\lambda<0$ 时 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向;当 $\lambda=0$ 时 $\lambda\boldsymbol{a}=0$. (b) $\lambda\boldsymbol{a}$ 向量的模为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$.

利用向量的分量式或坐标式易证下列运算法则:

(1) 加法交换律:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

(2) 加法结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

(3) $\boldsymbol{a}+0=\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0$.

(4) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

(5) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

(6) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量的加减法及数乘向量运算通称为向量的线性运算，其运算结果仍为向量，也称为 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的线性组合.

运用投影法可得：始点为 $P_1(x_1, y_1, z_1)$、终点为 $P_2(x_2, y_2, z_2)$的空间向量$\overrightarrow{P_1P_2}$为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2}&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\\&=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\}.\end{aligned}\tag{1-7}$$

由公式(1-5)知(1-7)式可改写为

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1},\tag{1-8}$$

或

$$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}.$$

由公式(1-2)知，$\overrightarrow{P_1P_2}$的模为

$$|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.\tag{1-9}$$

四、向量的表示法

用向量的坐标表示向量的方向是我们要讨论的另一个问题. 首先，我们定义方向角：向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP}$ 分别与 x 轴、y 轴、z 轴的夹角 α, β, γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角. 规定 $0\leqslant\alpha$, β, $\gamma\leqslant\pi$. 那么，当方向角 α, β, γ 确定后，向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向也就随之确定了(见图 1-5).

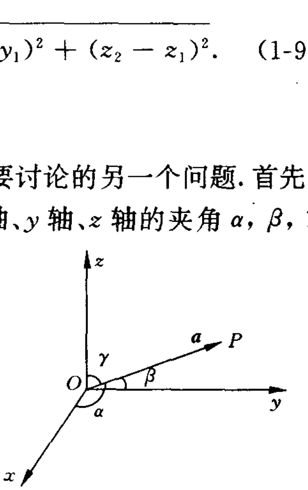


图 1-5

由于用坐标计算方向角较复杂，所以用方向角的余弦表示方向. 我们把向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角的余弦 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦. 由三角函数的定义可知：

$$
\begin{cases}
\cos\alpha = \dfrac{x}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
\cos\beta = \dfrac{y}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
\cos\gamma = \dfrac{z}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}
\end{cases}, \tag{1-10}
$$

显然
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{1-11}$$

例 1 设 $P_1(1,-1,2)$，$P_2(4,1,3)$，求$\overrightarrow{P_1P_2}$，$|\overrightarrow{P_1P_2}|$和$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向余弦.

解 $\overrightarrow{P_1P_2} = \{4-1, 1+1, 3-2\} = \{3, 2, 1\}$，

故
$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{3^2+2^2+1^2} = \sqrt{14}.$$

从而
$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{14}},\ \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{14}},\ \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

例 2 已知 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$，求 $2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$.

解
$$
\begin{aligned}
2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} &= 2(\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}) - 3(\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}) \\
&= -\boldsymbol{i} - 19\boldsymbol{j} + 18\boldsymbol{k}.
\end{aligned}
$$

习题 1-2

1. 设 $\boldsymbol{a} = \{3, 5, -1\}$，$\boldsymbol{b} = \{2, 2, 3\}$，$\boldsymbol{c} = \{4, -1, -3\}$，求下列向量：

(1) $2\boldsymbol{a}$；　(2) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$；

(3) $2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} + 4\boldsymbol{c}$；　(4) $\lambda\boldsymbol{a} - \mu\boldsymbol{b}$.

2. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴夹角分别为 $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$，$\beta = \dfrac{2\pi}{3}$，求 $\boldsymbol{a}$ 与 z 轴的夹角 γ.

3. 设 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$，求 $|\boldsymbol{a}|$ 及 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

4. 设点 $P_1(0,-1,2)$、点 $P_2(-1,1,0)$，求$\overrightarrow{P_1P_2}$及其方向余弦.

5. 已知向量 $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$，始点为$(1,-1,5)$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点.

6. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的始点为(2, 0, −1), $|\boldsymbol{a}|=3$, 方向余弦中 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\beta=\frac{1}{2}$, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式及其终点.

§1-3 向量的数量积与向量积

向量与向量的乘积有两种,分别为数量积和向量积. 称为向量的**非线性运算**. 它们都是从具体的问题中抽象出来的.

一、向量的数量积

由物理学的做功问题可知,一个物体在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿直线位移为 $\boldsymbol{s}$,若 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角为 θ,则力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功应为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta.$$

现把以上运算归结为数学模型.

定义 1 对于任意两个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$,其夹角为 $\theta\,(0\leqslant\theta<\pi)$,数 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**,记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$. 即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta; \tag{1-12a}$$

若记 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向的投影为 $\boldsymbol{a}_b$,则(1-12a)也可写成

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}_b||\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}_a|. \tag{1-12b}$$

由定义可将功的公式变为

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{a}.$$

作为特例,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos0=|\boldsymbol{a}|^2.$$

通常,把 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ 写作$\boldsymbol{a}^2$,即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2.$$

定理 两个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 互相垂直的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

证 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ. 先证必要性：

若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, 那么

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

再证充分性：若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,即 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=0$, 则

(1) 若 $\cos\theta=0$,则 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$,从而 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$;

(2) 若 $\cos\theta\neq0$,则 $|\boldsymbol{a}|=0$ 或 $|\boldsymbol{b}|=0$, 即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中至少有一个为零向量,故可认为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

由定理可知,单位向量 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 之间的数量积为

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=0;$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1.$$

容易证明数量积有以下运算律：

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

(2) 分配律：$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

(3) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$.

下面我们推导向量的数量积的分量公式：

设 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$, 那么

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}),$$

化简得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \tag{1-13}$$

把上式及模的公式代入(1-12a)式,得到

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}\cos\theta,$$

所以

$$\cos\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)}}. \tag{1-14}$$

这就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角余弦公式.

由上式可得非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 互相垂直的充要条件为

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0. \tag{1-15}$$

例1 若 $\boldsymbol{a} = \{1, \sqrt{2}, -1\}$，$\boldsymbol{b} = \{-1, 0, 1\}$，求 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ.

解 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1 \times (-1) + \sqrt{2} \times 0 + (-1) \times 1 = -2$，

而 $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{1+2+1} = 2$；$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$，

再由 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 得

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

故 $\theta = \frac{3}{4}\pi$.（注：也可用(1-14)式直接求解，请读者自行完成.）

例2 试证 $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2$.

证 $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2$.

例3 设有一力 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$，求力 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ 方向上的分力 $\boldsymbol{F}_a$.

解 由数量积定义可知，

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{F} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{F}_a|,$$

所以
$$|\boldsymbol{F}_a| = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{F}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{1-2+2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

再求 $\boldsymbol{a}$ 方向的单位向量 $\boldsymbol{a}_0$：

$$\boldsymbol{a}_0 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}),$$

所以
$$\boldsymbol{F}_a = |\boldsymbol{F}_a|\boldsymbol{a}_0 = \frac{1}{3}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}).$$