三导丛书

微积分

（人大·修订版）

导教·导学·导考

DAOJIAO DAOXUE DAOKAO

于力　马华　任春丽　李广民　编

- 重点内容提要
- 重点知识结构图
- 常考题型及考研典型题精解
- 学习效果两级测试题
- 课后习题全解

西北工業大學出版社

三导丛书

微积分

（人大·修订版）

导教·导学·导考

于力　马华　任春丽　李广民　编

西北工业大学出版社

【内容简介】本书是为配合人大版经济应用数学基础《微积分》(修订版)而编写的教学辅导书。按该教材的章节结构，给出了每章的重要内容提要、重点知识结构图、常见题型及考研题型精解、学习效果两级测试题、课后习题全解。本书旨在指导课程教学，帮助学习者提高解题能力。

图书在版编目(CIP)数据

微积分(人大·修订版)导教·导学·导考/于力等编. 西安：西北工业大学出版社，2004.3

(三导丛书)

ISBN 7-5612-1751-X

Ⅰ.微… Ⅱ.于… Ⅲ.微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第014100号

出版发行：西北工业大学出版社

通信地址：西安市友谊西路127号　邮编：710072　电话：(029) 88493844

网　　址：www.nwpup.com

印 刷 者：陕西友盛印务有限公司

开　　本：850 mm×1 168 mm　1/32

印　　张：11.25

字　　数：372千字

版　　次：2004年3月第1版　2004年3月第1次印刷

印　　数：1～6 000册

定　　价：15.00元

前　言

经过多年的教学实践，我们深感大学低年级的学生对微积分课程中的基本概念理解不深，且容易混淆；许多同学对于教材中的定义、定理也能记住一些，对定理的证明也能看懂，但在独立做习题时经常出错，错了也不知错在何处，为什么出错？对于灵活性较大，综合性较强的题目更觉得无从下手；不少学生将来还要报考研究生，对于这部分学生，提高数学解题技能和掌握好解题方法尤为重要。为了帮助学生进一步加深对微积分课程基本概念的理解，灵活运用所学知识去分析问题和解决问题，提高解题技巧，我们编写了本书，希望对广大读者学好本课程能有所帮助。

本书是与中国人民大学出版社出版的《经济应用数学基础（一），微积分》配套合使用的教学参考书。根据教材的章节编写为九章，每章设计了五个板块。

一、重要内容提要。列出了基本概念，重要定理和公式，突出考点的核心知识。

二、重点知识结构图。用框图列出了各章内容的

基本结构，指出了各知识点的有机联系。

三、常见题型及考研典型题精解。从历年的本科生期末试题和历届研究生入学统考题中精选出题目，还选编了部分方法灵活，综合性较强的例题，并进行了解答。

四、学习效果两级测试题。（一）基础知识测试题及答案；（二）考研训练模拟题及答案。这一部分是为读者检查学习效果和应试能力而设计的。通过两级测试，读者可以进一步加深对所学内容的理解，提高解题能力。

五、课后习题全解。对中国人民大学出版社出版的《经济应用数学基础（一），微积分》的课后习题（A），（B）两部分习题全部做了详细解答。解答中，力求推理严谨，解法新颖，表达流畅，通俗易懂。

本书旨在指导课程教学，帮助读者学好微积分课程，提高解题能力以及适应各类考试。限于篇幅，例题选编没有求全、求多，力争体现突出重点，少而精。

本书共分九章，第一、二章由马华编写，第三、四、八章由于力编写，第五、六章由任春丽编写，第七、九章由李广民编写并负责统稿。

由于作者水平所限，尽管做了很大的努力，书中可能还存在缺点、疏漏甚至错误，恳请读者批评指正。

编者

2003年10月

于西安电子科技大学

目　录

第一章 函 数

一、重要内容提要

(一)集合

1. 集合的概念

集合是具有某种属性的事物的全体,或是一些确定对象的汇总.构成集合的事物或对象,称为集合的元素.

2. 集合的运算

设 A,B 是两个集合,规定

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \quad \text{或} \quad x\in B\}$$

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \quad \text{且} \quad x\in B\}$$

$$A-B=\{x\mid x\in A \quad \text{且} \quad x\overline{\in} B\}$$

3. 集合的运算律

(1) 交换律:$A\cup B=B\cup A \qquad A\cap B=B\cap A$

(2) 结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(3) 分配律:$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

(4) 摩根律:$(A\cup B)'=A'\cap B' \qquad (A\cap B)'=A'\cup B'$

4. 集合的笛卡尔乘积

设有集合 A 和 B,$x\in A$, $y\in B$,所有二元有序数组(x, y)构成的集合,称为集合 A 与 B 的笛卡尔乘积,记为 $A\times B$,即

$$A\times B=\{(x, y)\mid x\in A, \quad y\in B\}$$

（二）实数集

1. 绝对值

一个实数 x 的绝对值，记为 $|x|$，定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

绝对值及其运算有下列性质：

(1) $|x|=\sqrt{x^2}$

(2) $|x|\geqslant 0$

(3) $|-x|=|x|$

(4) $-|x|\leqslant x\leqslant|x|$

(5) $\{x\,|\,|x|<a\}=\{x\,|-a<x<a\}$，其中 $a>0$.

(6) $\{x\,|\,|x|>b\}=\{x\,|\,x<-b\}\cup\{x\,|\,x>b\}$，其中 $b>0$.

(7) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$

(8) $|x-y|\geqslant|x|-|y|$

(9) $|xy|=|x|\cdot|y|$

(10) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$, $y\neq 0$

2. 区间与邻域

(1) 区间

$$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$$
$$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$$
$$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$$
$$(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\}$$
$$[a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\}$$
$$(-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\}$$
$$(-\infty,b]=\{x\,|\,x\leqslant b\}$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x\,|-\infty<x<+\infty\}$$

(2) 邻域：称实数集合 $\{x\,|\,|x-x_0|<\delta,\ \delta>0\}$ 为点 x_0 的 δ 邻域．x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径．称实数集合 $\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta,\ \delta>0\}$ 为以 x_0 为中心，以 δ 为半径的空心邻域．

(三) 函数关系

1. 函数关系的定义

若 D 是一个非空实数集合，设有一个对应规则 f，使每一个 $x \in D$，都有一个确定的实数 y 与之对应，则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数．记作 $y = f(x)$，$x \in D$. x 称为自变量，y 称为因变量．

2. 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 $D(f)$，若函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 $z(\varphi)$，$z(\varphi) \cap D(f)$ 非空，则称 $y = f[\varphi(x)]$ 为复合函数．x 为自变量，y 为因变量，u 称为中间变量．

注　(1) 不是任意两个函数都可以复合成一个复合函数；

(2) 复合函数可以由多个函数复合构成，但不是无条件的。

3. 基本初等函数

下列函数统称为基本初等函数：

(1) 常函数：　$y = C$

(2) 幂函数：　$y = x^{\alpha}$（α 为任何实数）

(3) 指数函数：　$y = a^{x}\ (a > 0,\ a \neq 1)$

(4) 对数函数：　$y = \log_{a}x\ (a > 0,\ a \neq 1)$

(5) 三角函数：　$y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \tan x,$

$y = \cot x,\ y = \sec x,\ y = \csc x$

(6) 反三角函数：　$y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = \arctan x$

$y = \operatorname{arccot} x,\ y = \operatorname{arcsec} x,\ y = \operatorname{arccsc} x$

4. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，统称为初等函数．

(四) 函数的四种特性

1. 函数的奇偶性

给定函数 $y = f(x)$，$x \in (-l, l)$，若 $\forall x \in (-l, l)$，有 $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$，则称 $f(x)$ 为偶函数(奇函数).

2. 函数的周期性

给定函数 $y=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，若 $\exists a>0$，使 $f(x+a)=f(x)$，则称 a 为 $f(x)$ 的周期．

3. 函数的单调性

给定函数 $y=f(x)$，$x\in(a,b)$，$\forall x_1,x_2\in(a,b)$，$x_1<x_2$，若有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调增加的；若有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调减少的．

4. 函数的有界性

给定函数 $y=f(x)$，$x\in(a,b)$，若 $\forall x\in(a,b)$，$\exists M>0$，使 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，对称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的．如果不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是无界的．

二、重点知识结构图

- 集合
  - 集合的概念
  - 集合的运算
  - 集合的运算律
  - 集合的笛卡尔乘积
- 函数
  - 函数的定义
  - 反函数、复合函数及隐函数的定义
  - 基本初等函数及初等函数的定义
  - 函数的三种表示法
    - 公式法
    - 表格法
    - 图形法
  - 函数的四种特性
    - 函数的奇偶性
    - 函数的周期性
    - 函数的单调性
    - 函数的有界性

三、常考题型及考研典型题精解

例 1－1 选择题

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x^2+x, & x>0\end{cases}$

则下式中正确的是(　).

(A) $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0\\ -(x^2+x), & x>0\end{cases}$

(B) $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x^2-x, & x>0\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0\\ -x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

(D) $f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

(2) (2001 年考研题) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$,则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于(　).

(A) 0　　(B) 1

(C) $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$

解　(1) 因 $f(-x)=\begin{cases}(-x)^2, & -x\leqslant 0\\ (-x)^2+(-x), & -x>0\end{cases}=$

$$\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ x^2-x, & x<0\end{cases}$$

故应该选 D.

(2) 因 $f[f(x)]=\begin{cases}1, & |f(x)|\leqslant 1\\ 0, & |f(x)|>1\end{cases}=1$

$$f\{f[f(x)]\}=1$$

故应该选 B.

例 1-2　已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$,且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

解　由于 $f[\varphi(x)]=\mathrm{e}^{\varphi^2(x)}=1-x$,可得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$,再根据 $\ln(1-x)\geqslant 0$ 知 $1-x\geqslant 1$,即 $x\leqslant 0$,故 $\varphi(x)$ 的定义域为 $x\leqslant 0$.

例 1-3　设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $f_n(x)=f(f\cdots(f(x)))$,并讨论 $f_n(x)$ 的奇偶性.

解　设 $f_1(x)=f(x)$，则

$$f_2(x)=f(f_1(x))=\frac{f_1(x)}{\sqrt{1+[f_1(x)]^2}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]^2}}=$$

$$\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

$$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{f_2(x)}{\sqrt{1+[f_2(x)]^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$

设 $f_k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$，则

$$f_{k+1}(x)=f(f_k(x))=\frac{f_k(x)}{\sqrt{1+[f_k(x)]^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$$

由数学归纳法知

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}},\quad n=1,2,3,\cdots$$

显然 $f_n(-x)=-f_n(x)$，即 $f_n(x)$ 为奇函数.

例 1-4　设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2\\ 2, & |x|>2\end{cases}$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

解　(1) $f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|\leqslant 1\\ 0, & |g(x)|>1\end{cases}$，现需求出使 $|g(x)|\leqslant 1$(或 $|g(x)|>1$) 的 x 的范围.

由于 $|x|>2$ 时，$g(x)=2>1$，故仅当 $|x|\leqslant 2$ 时，才可能有 $|g(x)|\leqslant 1$，而欲使 $|g(x)|\leqslant 1$，必须且只需 $|x|\leqslant 2$，$|2-x^2|\leqslant 1$，即 $1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3}$，于是有

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & 1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3}\\ 0, & |x|<1 \text{ 或 } |x|>\sqrt{3}\end{cases}$$

(2) $g[f(x)]=\begin{cases}2-[f(x)]^2, & |f(x)|\leqslant 2\\ 2, & |f(x)|>2\end{cases}$，由 $f(x)$ 的定义知，对任意 x 有 $|f(x)|\leqslant 1<2$，故有

$$g[f(x)]=2-[f(x)]^2=\begin{cases}2-1^2, & |x|\leqslant 1\\ 2-0, & |x|>1\end{cases}=$$

$$\begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1 \\ 2, & |x| > 1 \end{cases}$$

四、学习效果两级测试题

(一) 基础知识测试题及答案

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-1}$　　(2) $y = \arcsin(x-1)$

(答案:(1) $[-2, 2]$ 且 $x \neq \pm 1$; (2) $[0, 2]$)

2. 设 $f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geqslant 1 \end{cases}$, 求:$f(1)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $f(-2)$.

(答案:0, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 0)

3. 设 $f(x)$ 的定义域是$[0, 1]$,求 $f[\sin x]$ 的定义域.

(答案:$[2k\pi, (2k+1)\pi]$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$)

4. 设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x + x\sqrt{x^2+1}$, $x > 0$. 求 $f(x)$.

(答案:$\dfrac{1}{x^2}(x + \sqrt{1+x^2})$)

5. 设 $f(x) = x^a$, $g(x) = a^x$,求 $f[g(x)]$.

(答案:$(a^x)^a$)

6. 设 $f(x)$ 为奇函数且不恒为 0,令 $F(x) = x^3 \cdot f(x)$,问 $F(x)$ 的图形关于什么对称?

(答案:关于 y 轴对称)

7. 设 $f(x)$ 为奇函数,$g(x)$ 为偶函数,考察下列复合函数的奇偶性:$f[g(x)]$, $g[f(x)]$, $f[f(x)]$.

(答案:偶函数,偶函数,奇函数)

(二) 考研训练模拟题及答案

1. 求 $y = \log_a(x + \sqrt{x^2-1})$, $a > 0$, $a \neq 1$ 的反函数及其定义域.

(答案：$\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$，$(-\infty,+\infty)$)

2. 设 $f(x)=x\cdot 2^x$，问 $f\left(\frac{1}{a}\right)$，$f(a+1)$，$f(a)+1$，$f(a^2)$，$[f(a)]^2$ 各等于多少？

(答案：$\frac{1}{a}\cdot 2^{\frac{1}{a}}$，$(a+1)2^{a+1}$，$a\cdot 2^a+1$，$a^2\cdot 2^{a^2}$，$a^2\cdot 2^{2a}$)

3. 设 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\leqslant 0 \\ \ln x, & x>0 \end{cases}$，求 $f[f(e^{-2})]$.

(答案：e^{-2})

4. 判别下列函数的奇偶性：

(1) $y=x\cdot\frac{a^x-1}{a^x+1}$，$(a>1)$　　(2) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

(答案：(1) 偶函数；(2) 奇函数)

5. 设 $f(x)=2x^2+x$，$\varphi(x)=e^{x-1}$，求 $f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$.

(答案：$2e^{2(x-1)}+e^{x-1}$，e^{2x^2+x-1})

6. 设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，$g\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，求 $f(x)$ 与 $g(x)$.

(答案：$f(x)=x^2-2$，$g(x)=x^2+2$)

7. 设 $f(x)=\frac{x}{x-1}$，试验证 $f\{f[f(x)]\}=\frac{x}{x-1}$，并求 $f\left[\frac{1}{f(x)}\right]$，$x\neq 0$，$x\neq 1$.

(答案：$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=1-x$)

五、课后习题全解

(A)

1. 按下列要求举例：

(1) 一个有限集合；

(2) 一个无限集合；

(3) 一个空集；