XINBIANGAODENGSHUXUEJIAOCHENG

新编高等数学教程

（上册）

翟忠信
刘　耀
陈知先　编　著

兰州大学出版社

新编
高等数学教程

（上册）

翟忠信　刘　耀　陈知先　编著

兰州大学出版社

新编高等数学教程

（上册）

翟忠信　刘耀　陈知先　编著

兰州大学出版社出版发行

兰州市天水路 308 号　电话:8617156　　邮编:730000

兰州大学出版社激光照排中心排版

甘肃省静宁印刷厂印刷

开本：850×1168 毫米 1/32　　印张:15.5

1999 年 9 月第 1 版　　1999 年 9 月第 1 次印刷

字数:371 千字　　印数:1—4000 册

ISBN7－311-01550-2/G・607　　定价:20.50 元

前　言

一、总结我教研室已出版过的三套《高等数学》(见参考书目[1]、[2]、[3])使用十年来各位任课教师在实践中的经验和体会,参考我校各专业师生对高等数学课程的意见和建议,尤其是照顾到理科基地班学生的特点和要求,我们重新编写了这套教材。

二、本教材完全涵盖了国家教委1989年11月15日印发的《综合大学本科物理类各专业高等数学基本要求》(国家教委理科数学、力学教材编审委员会高等数学编审小组1989年审订通过)中除高等代数外的有关内容,并符合国家教委制定的全国工学研究生入学考试(数学一)考试大纲的要求。由于考虑到基地班学生的特点,在内容的深度和广度上,较前都有所加强,尤其对基本概念、基本理论和基本方法,讲述得都比较细致和深入,以使学生在数学思想方法和逻辑推理能力上得到较为严格的训练,为进一步学习打下良好的基础。

三、本书分上、下两册,上册共七章,主要讲授一元函数微积分和简单微分方程;下册共六章,讲授空间解析几何、多元函数微积分、矢量分析和场论初步及微分方程(续)。另有两个附录,介绍实数理论的基本定理和微分方程的算子解法。全书力求基本理论的系统性和叙述的严密性,大部分定理都给出了严格的证明,在介绍经典数学内容的同时,还注意到渗透现代数学的思想观点和方法,为学生以后进一步学习近代数学提供阶梯。

四、本书在极限理论部分,用“时刻”、“之后”的语言统一了

各种类型极限的概念;在空间解析几何部分,引进压缩和伸展的方法,从而可以从旋转曲面出发引出各种二次曲面;在多元函数微积分部分,用 n 维空间的点函数提法统一多元函数的概念,用"可度量几何体上的积分"统一了定积分、重积分和第一类线、面积分的概念;在微分方程组部分,采用了矢量的记法。这不但可以简化概念的叙述,而且有利于对这些内容的深入理解和熟练掌握,起到以简驭繁的效果,通过我们多年来的教学实践,认为以上处理方法,有利于提高学生的数学素养和对近代数学方法的接受能力。

五、本书特别注意各种概念间的相互联系,如无穷积分和数项级数,含参变量的积分和重积分及函数项级数,特别是对各种类型的积分间的关系,作了较详细的归纳和简述。微分方程的两部分,各置于一元和多元微积分之后,这一方面是为了照顾到相关课程的需要,同时也加强了这门学科与数学分析相应内容的衔接。

六、本书对一些难点作了较详细的讲解,并适当增加了一些简单实用的解法。如对极限存在性的判定和极限的计算,我们介绍了海因定理、施笃兹定理和子数列法;对一致连续和一致收敛性的判定,介绍了几个简便的命题;在不定积分的计算中,介绍了奥氏法和欧拉代换;在三重积分的计算中,介绍了"穿线法"和"切片法";特别对微分方程的初等解法,我们除详细介绍了各种可解类型外,还往往对同一类型的方程给出几种解法。

七、本教材编写过程中,曾参考国内外相关教材和专著五十余种,这些著作中许多精辟的论述和精练的例子,都融入了本书。我们在下册末列出了这些参考著作的一部分,其它恕不一一指明了。

八、本书适合于理科(尤其是物理类)基地班作为教材。由于叙述深入浅出,通俗易懂,故经过适当删节(例如,略过打*号的内容)也可作为非基地班的教材与教学参考书。书中习题经过认真

筛选，并附有参考答案和提示，因此也适用于自学。

九、本书编写前经过认真讨论，初稿完成后又经我教研室多位教授、副教授和任课教师审阅，经反复修改后才最终定稿。参加编写及讨论的人员有翟忠信、刘耀、段炎伏、陈知先、赵华、苏志勇等多位同志，牛亚轩教授、李自珍教授、徐军民副教授和张志强讲师也对本书的编写提出了许多建设性的意见。此外，在本书编写过程中，还得到数学系领导的关心和支持，兰州大学教务处、科研处和物理系等单位的领导同志也提供了不少帮助，在此谨向他们表示衷心的感谢。

十、由于我们水平有限，兼之教材中有些内容有别于传统讲法，缺点和错误一定还有不少，诚请各位专家、同行和读者批评指正。

编　者

1999年9月于

兰州大学

目 录

第一章　函数与极限

我们将从两个方向研究变量：一是不同变量间的依赖关系，由此引出函数的概念。这是数学中的一个最基本而又最重要的概念，也是数学分析的主要研究对象。中学数学已对函数的若干内容作过一定的介绍，尤其是对初等函数已经进行了较为详细的讨论。在本章，我们将进行简单的回顾，提出另外几种类型的函数，并统一某些术语。二是变量在一定过程下的变化趋势，由此引出极限的概念，极限是数学分析的基本工具，我们将对此做比较细微的研究，并用极限的观点来讨论函数的连续性。

§1　变量与函数

高等数学区别于初等数学的一个重要标志，就是用变化的观点来考察事物，研究问题。客观事件总是处于不断地运动变化之中。静止状态只是暂时的和相对的，而变量这一概念正是反映了客观世界的这一根本属性。各种事物的变化又不是彼此孤立，而是相互依赖、相互制约的，函数这一概念就反映了这种相互依赖性的一个重要侧面 —— 变量间的一种确定的依存关系。

§1.1　变量

我们在观察各种自然现象或者研究实际问题的时候，会遇到各式各样的量，这些量可分为两种：一种是在我们所考察的过程中保持不变的量，称为**常量**，还有一种是在这一过程中会起变化的量，称为**变量**。例如，在某一固定地点观察自由落体，该落体的下降

时间和距离是变量，而落体的质量和重力加速度则可以看做常量。再如，在平面上固定两点 B、C，并作直线 $l \parallel BC$，使 l 与 BC 的距离为 h，在 l 上任取一点 A，并令 A 沿 l 任意移动，则 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}ah$ 和底边 BC 的长，高 h 均为常量，而另外两条边 AB、AC 之长及三个顶角在 A 沿 l 运动的过程中是变量。

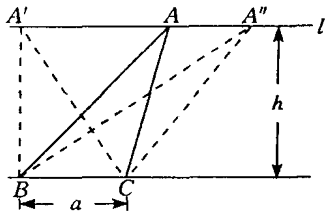

图 1—1

不过应注意，“常量”这个概念是相对的，是依赖于具体过程和条件的。例如，在固定地点所观察到的重力加速度是常量，但如果在不同的地点进行观察，重力加速度就不能认为是常量而是变量了。因此，为方便起见，我们今后常常把常量当做一种特殊形式的变量来看待。

这些量，如时间、质量、距离、加速度、边长、面积、角度等等，尽管各自都有不同的含意，但它们都可以用实数来表示（例如，当取定单位后，说边长为 3(cm)，时间为 10(秒)，质量为 8(克) 等）。而**变量就是在过程中可以取不同值的量，常量就是在过程中取固定值的量**。确定一个变量所使用的实数值的集合，或者说变量的取值范围，叫做这个变量的**变域**。在数学中，总是抽掉所研究的量的具体意义，只注意它们的数值。通常用字母 a、b、c 等来表示常量，用字母 x、y、z 等来表示变量。这样，由数轴和实数的对应关系，一个变量可以看做是数轴上的动点，而常量则可视为定点。变量的变域是数轴上的一部分，显然，常量的变域只是数轴上的一个点。

经常用到变域是这样或那样的一些区间，它们的定义和记号如下：

开区间 $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$，

闭区间 $[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$，

半开区间$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$，这是一个左开右闭的区间。

半开区间$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$，这是一个左闭右开区间。

上面的几类区间，都是**有限区间**，其中a、b是任意实数，$a<b$. 还有几类**无限区间**：

$(-\infty,+\infty)=\{x|x$ 是任意实数$\}$，也记作 R.

$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$，

$(a,+\infty)=\{x|x>a\}$，

$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$，

$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$.

记号 $+\infty$ 和 $-\infty$ 分别读作正无穷大和负无穷大。

今后凡说到闭区间，总指有限区间$[a,b]$，而开区间也可能是无限区间$(-\infty,+\infty)$，$(a,+\infty)$或$(-\infty,b)$；半开区间也包含无限区间$[a,+\infty)$和$(-\infty,b]$。

此外，设 x_0 与 δ 是两个固定的实数，$\delta>0$，称集合

$$N(x_0,\delta)=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta\}$$

为**点 x_0 的 δ 邻域**。有时也用记号 $B(x_0,\delta)$，$K(x_0,\delta)$ 或 $O(x_0,\delta)$，点 x_0 称为**这邻域的中心**，δ 称为**这邻域的半径**，又称$\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$为 x_0 的**去心 δ 邻域**。注意

$$|x-x_0|<\delta$$
$$\Leftrightarrow -\delta<x-x_0<\delta$$
$$\Leftrightarrow x_0-\delta<x<x_0+\delta$$

因之，邻域 $N(x_0,\delta)$ 实际上就是开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$(图 1.2)

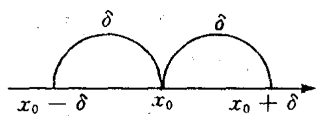

图 1.2

§1.2 函数的概念

变量与变量之间可以有各种不同形式的联系。有些联系较为紧密，有些则较为松散，甚至彼此间几乎没有什么关系。如人的身