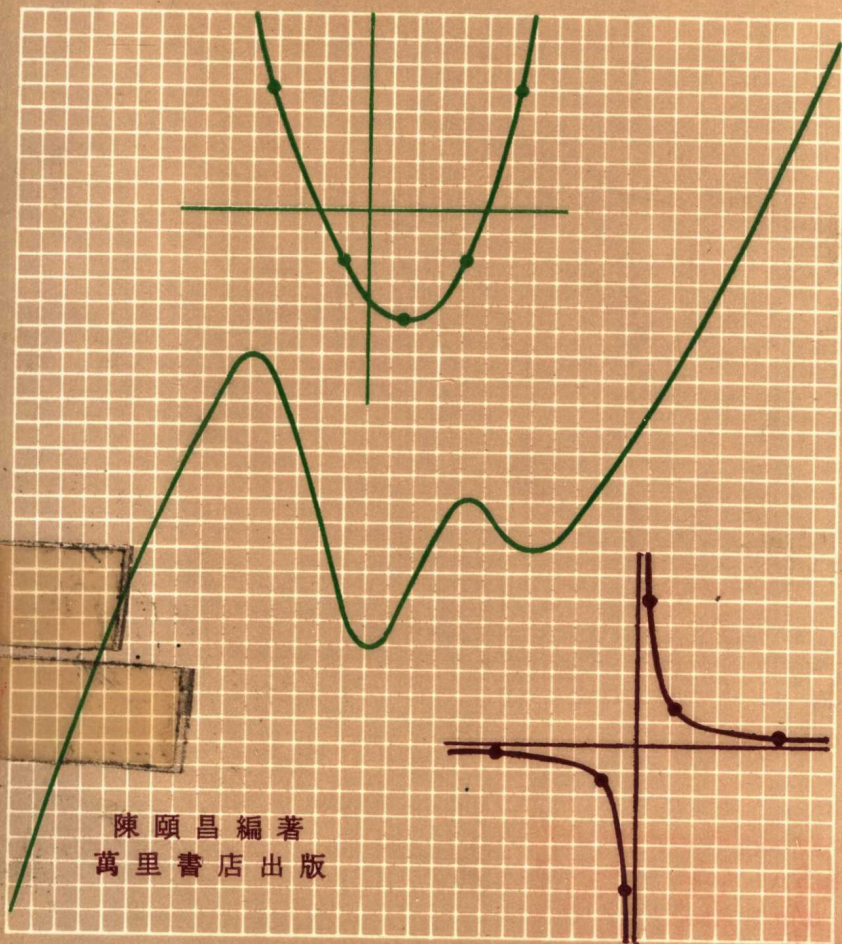


數理邏輯與集論

—新數入門概念—



陳頤昌編著
萬里書店出版

數理邏輯與集論

陳頤昌編著

香港萬里書店出版

數理邏輯與集論

陳頤昌 編著

出版者：萬里書店

香港北角英皇道486號三樓

電話：5-632411 & 5-632412

承印者：雷鴻製版印刷公司

香港北角電氣道208號

定價：港幣九元四角

版權所有 * 不准翻印

(一九七七年三月版)

前 言

新數學——現代數學在近年來已廣泛地成爲學校和專上學院必修的課程。事實上，新數學早已在各個科學、技術、工業、商業範圍內派上用場了。無論在化學化工方面、心理學、生物學、經濟學、社會學、教育學、工程學、政治學、工商業的經濟模型等等，都離不開新數學的應用。

現在有許多在數學研究和發展方面，趨於注重實際的應用。以往把學習數學作爲純粹思維的東西，似乎已經落伍了。

我們知道，數學是從人類實際生活的要求所發展起來的。後來，許多題材都獲得廣義化，漸漸形成了所謂抽象的東西而已。

本書是爲了便利青年人自學而編寫的。題材方面，主要是從新數在應用方面着眼。不過，在討論到應用方面之前，我們必須做些準備功夫，先行學習一些基礎知識。如果連基本的預備知識也缺乏，那就無從談到應用了。

除了本書目次中所列出的題材之外，將來我們還要編寫其他題材，例如向量、矩陣、綫性方程組、行列式、二項式係數、排列、有序樣本、組合、劃分、有序劃分、概率、樣本空間、有限概率空間、有限隨機過程、獨立試驗、重複試驗、博奕遊戲、隨

機矩陣、凸集理論、單純形法、對策論、策畧、最優策畧、嚴格決定的對策、回收行列等等。至於有關工業、商業日益應用的題材，也盡量編寫。這方面包括複利、折扣、價值、資金的賦值、投資計劃、存貨處理、排隊論、決策制定、回歸分析和預測、相關性、抽樣意義等。

筆者在撰寫本書時，雖然花費了不少時間參考各種文獻資料，但由於水平所限，錯誤之處在所難免。敬希讀友批評指正爲幸。

陳頤昌

一九七六年夏天

目 次

前 言	1
§ 1. 簡介	1
§ 2. 述詞和複合述詞	5
§ 3. 合取和析取	7
§ 4. 不可兼析取	11
§ 5. 否定 $\sim p$	13
§ 6. 命題和真值表	15
§ 7. 恒真命題、矛盾命題	29
§ 8. 邏輯、等價、命題代數	32
§ 9. 條件述詞	48
§ 10. 雙條件述詞	53
§ 11. $p \rightarrow q$ 的逆命題、反命題、逆反命題	58
§ 12. 論證	68
§ 13. 論證和述詞	76
§ 14. 邏輯蘊涵	83
§ 15. 集和集的形式	90
§ 16. 等集、有限集、無限集	92

§ 17. 單元集、子集、泛集、空集·····	94
§ 18. 集的類、集體、族·····	100
§ 19. 集的運算·····	102
§ 20. 圖解與論證·····	114
§ 21. 序偶·····	133
§ 22. 積集·····	135
§ 23. 命題的真值集·····	141
§ 24. 關係——二元關係·····	149
§ 25. 關係和序偶集、逆關係·····	151
§ 26. 等價關係·····	156
§ 27. 分割·····	162
§ 28. 劃分和等價的關係·····	165
§ 29. 什麼叫映射·····	174
§ 30. 實值映射的圖形·····	181
§ 31. 合成映射·····	187
§ 32. 一一映射、上映射·····	192
§ 33. 逆映射·····	197
§ 34. 恒等映射·····	200

§ 1. 簡 介

什麼叫命題演算 (Propositional Calculation)? 什麼叫述詞 (Statement)? 合取 (Conjunction)? 析取 (Disjunction)? 什麼叫真值表 (Truth Tables)? 它們有什麼用處? 這種種都是本書討論的課題。本節我們作一概括性的敘述。自然，單閱讀概括性的引論，一般初學者大都難以徹底了解其真相的。至於要徹底了解各題材的意義並不是困難的，我們只須按部就班地仔細地閱讀下文各節就行了。

實際上，命題演算不過是一種速記 (Shorthand)，只是它跟商行辦公室裏秘書用的速寫形式不同而已。通常，採用 p 、 q 等字母代表述詞、或代表命題，其涵義可屬真，也可屬假。如果 p 屬真實，用數值 1 代表之，如果 p 屬假的話，則用數值 0 表之。

舉個例子，學校班會裏有幾位同學很聰明能幹，受同學們推舉擔任班會幹事職務。由於某些同學不能身兼數職等種種關係，往往會發生這樣的問題：「如果蘇甲擔任了幹事的一職，馬乙就不能成為另一位幹事。只要蘇甲當了幹事，陳丙才可能擔任另一位幹事之職。現在，蘇甲、馬乙兩人中，其中一人必須擔當幹事，那末，這三位候選人有多少種組合的可能呢？」

這類簡單的邏輯問題，我們只須細想想就會找出答案來。不過，遇到較複雜的問題，用機械性的步法就似乎更勝一籌。事實上，今天，用機器解決問題的方法都已獲得廣泛的採用了。學習本書的課題，對於了解人類自己設計的機器為什麼會解決問題，是有所幫助的。

命題可用邏輯連詞 (Logical Connectives) 連結起來。例如， $p \wedge q$ 代表複合述詞 (Compound Statements) 「 p 和 q 」；如果 p 、 q 兩者兼屬真實，則 $p \wedge q$ 才屬真實。 $p \wedge q$ 的值是 p 的值和 q 的值的積 (Product)。又如， $p \vee q$ 代表複合述詞「 p 或 q 」。留意 $p \vee q$ 包含代表 p 、 q 兩者兼屬的意思。 $p \vee q$ 怎樣才屬假？要 p 或 q 兩者兼屬假時， $p \vee q$ 才屬假。

$p \Rightarrow q$ 代表述詞「若 p 為真，則 q 亦屬真」，意思是： q 為假時， p 不能屬真，因此， p 屬假或 q 屬真，或兩者兼屬同類，就是：「不是 p ，或 q 」。

假如兩項述詞 p 、 q 一併屬真或一併屬假，則可寫作

$$p \equiv q$$

即指 p 與 q 等價或等值。如果用 $\sim p$ 代表「不是 p 」，那末，我們有

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$$

$$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$$

$$\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)$$

讀了下文，就很易核驗出這兩項荻·摩根律 (De Morgan's Laws)。

p 、 q 這類述詞或其他函數 (Functions) 的真假值，可用方

便和令人一目瞭然的表列出。這就所謂真值表 (Truth Tables)。下面我們列出 p 、 q 的真假值的四種可能組合：（註：1 代表真，0 代表假）

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \equiv q$	$p \neq q$
1	1	0	0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0

舉個例來說，在最後一縱列和第二橫行的「1」表示，如果 p 為真而 q 為假的話，則 $p \neq q$ 為真；換言之，意思指「 p 與 q 不相同」。

現在，再回頭看看上述班會選幹事的問題。如果用 s 代表蘇甲、 m 代表馬乙、 c 代表陳丙，那末，用符號寫出問題如下：

$$(s \Rightarrow \sim m) \wedge (c \Rightarrow m) \wedge (s \vee m)$$

要待解決的問題是找尋 s 、 m 、 c 的值，務使上列的複合命題的值為 1。有兩種方法可辦：

（一）列出 s 、 m 、 c 八種可能組合的真值表，也就是絕大多數簡單邏輯機器的操作。

（二）發展命題代數 (Algebra of Propositions) 來整理 m 、 s 、 c 的值。

不妨將這問題分析如下：

$$s \Rightarrow \sim m \equiv \sim s \vee \sim m$$

$$\sim s \vee \sim m \wedge s \vee m \equiv s \neq m$$

這跟 $c \Rightarrow m$ 結合，即可得到 $c \wedge m$ ， m 、 s 作為唯一行得通的組合。其實這不過是把一般人所能想到的解法，用符號表達出來罷了。

這些都是籠統的說法。學習任何一種知識，像外國語文、物理學、天文學等等，都須作較具體、較認真的鑽研，方可徹底掌握整套理論，才可以好好地利用它。否則，只收「水過鴨背」的效果而已。學習數學也不例外。本章只是一個開頭。關於新數學的內容，將在下面分章敘述。

§ 2. 述詞和複合述詞

所謂述詞 (Statement)，是指能表示或真或假的一組文字、音韻或符號。數理邏輯通常用字母如 p 、 q 、 r 等等來表示述詞。在述詞的真性 (Truth) 或偽性 (Falsity)，是稱為它的真值 (Truth Value)。

考慮下列幾個句子，看看哪個是述詞，哪個不是述詞：

- (一) 英國地大物博。
- (二) $3 + 3 = 6$ (指一般十進制數)
- (三) 請您仔細閱讀一遍。
- (四) 明天假日需要加班嗎？

英國本土面積有限，資源有限，因此，第一句所述是屬假的，也就是個帶有虛偽性的述詞。同樣道理，我們知道第二句是個帶有真實性的述詞。至於第三和第四句，根本沒有真偽之辨，所以它們不是述詞。

一些述詞由好幾個句語組成，句語與句語之間，用各種不同的邏輯聯結詞 (Logical Connectives) 聯結起來，這就稱為複合述詞 (Composite Statements)。

例如：杜甫是唐代詩人而吳道子是畫家。這個複合述詞由兩個簡單述詞組成：「杜甫是唐代詩人」而「吳道子是畫家」。舉

另一個例：「他家境很貧窮，而他堅持努力學習」。這個複合述詞則由「他家境貧窮」和「他堅持努力學習」兩個述詞組成。

§ 3. 合取和析取

複合述詞的本質是取決於所組合用的簡單述詞。這些簡單述詞，叫做子述詞 (Sub Statements)。換句話說，複合述詞的真假值，由子述詞的真假值和聯結詞的類型決定。

最常見的聯結方法是合取 (Conjunction) 和析取 (Disjunction)。兩項述詞往往可用「和」(‘and’) (「與」、「而」) 這個聯結詞聯結起，所組成的複合述詞，稱為原來兩述詞的合取。兩個述詞 p 、 q 合取而成的複合述詞，可用符號書寫成

$$p \wedge q$$

「 $\wedge$ 」代表了聯結詞「和」(「與」、「而」)。

例如：用 p 代表「電視機採用集成電路」， q 代表「電子計算機有塑料外殼」，那末， $p \wedge q$ 就代表「電視機採用集成電路而電子計算機有塑料外殼」。

合取述詞的真假值，有下述性質：

若 p 真實、 q 真實，則 $p \wedge q$ 屬真實。不然， $p \wedge q$ 屬假。就是說，各子述詞都屬真的時候，合取述詞才屬真。

例如：考慮下列四項複合述詞：(數字計算概用十進制)

(一) $3 + 3 = 6$ 和新加坡在南洋

(二) $3 + 3 = 7$ 和新加坡在南洋

(三) $3 + 3 = 6$ 和新加坡在非洲

(四) $3 + 3 = 7$ 和新加坡在非洲

由上文談及有關合取述詞的性質，我們知道僅第一項屬真確。由於(二)、(三)、(四)中都有屬假的子述詞，所以(二)、(三)、(四)都屬假。用表可更清楚列出合取述詞的真假性：

p	q	$p \wedge q$
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

爲了省時、省力，我們習慣用1代表「真」，用0代表假。上表可簡化爲：

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

這表的第一行表示假如p屬真，q也屬真，則 $p \wedge q$ 也屬真。第二行表示若p屬真而q屬假，則 $p \wedge q$ 屬假。第三、四行

可類推。從表列出的資料，複合述詞 $p \wedge q$ 的真假值的定義，作為 p 、 q 的真假值的函數便清楚地決定了。

兩個述詞也可用「或」('or') 形成另一種複合述詞。這稱為原本兩述詞的析取。析取的符號是 $\vee$ ，例如：

$p \vee q$ 表示 p 、 q 的析取。留意「或」的涵義，它包括既屬 p 、也屬 q 的範疇。

例如：若 p 代表「張三在學校上課」、 q 代表「張三學習新數學」，那末， $p \vee q$ 就代表「張三在學校上課或〔張三〕學習新數學」。析取述詞的性質可概述如下：

如果 p 屬真或 q 屬真，或 p 、 q 兩者都屬真，則 $p \vee q$ 屬真；不然， $p \vee q$ 屬假。故此，僅當兩個子述詞都屬假的時候，其析取述詞始屬假。像合取一樣，我們也可以列表示之：

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

考慮下述四項析取述詞：

- (一) $3 + 3 = 6$ 或新加坡在南洋
- (二) $3 + 3 = 7$ 或新加坡在南洋
- (三) $3 + 3 = 6$ 或新加坡在非洲
- (四) $3 + 3 = 7$ 或新加坡在非洲

由上述原則，可見除（四）屬假以外，其餘三則都有屬真的子述詞，故屬真。