高/等/学/校/教/材

概率论与数理统计例题分析与解题指导

天津市大学数学教学研究会 组编

俞钟祺 刘振航 主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高 等 学 校 教 材

概率论与数理统计
例题分析与解题指导

天津市大学数学教学研究会 组编
主编 俞钟祺 刘振航

机 械 工 业 出 版 社

概率论与数理统计是高等院校各专业的一门重要的基础理论课程，它具有高度的抽象性、严密的逻辑性以及广泛的应用性。为了不断提高学生素质，培养学生分析问题、解决问题的能力，天津市数学教学研究会组织天津市8所院校的中青年骨干教师编写了此书。

本书根据教学大纲要求，围绕概率论与数理统计的基本概念、基本理论和基本方法精选了典型例题进行分析，对于有一定难度的题目给予了指导。内容包括概率论的基本概念，随机变量及其分布，随机变量的数字特征，大数定律及中心极限定理，样本及抽样分布，参数估计，假设检验，方差分析与正交试验设计，回归分析与随机过程基础。

本书适合作为高等院校师生的概率论与数理统计课程的教学参考书，也可供科技人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计例题分析与解题指导/俞钟祺等主编．—北京：机械工业出版社，2004.1

高等学校教材

ISBN 7-111-13641-1

Ⅰ.概… Ⅱ.俞… Ⅲ.①概率论－高等学校－解题②数理统计－高等学校－解题 Ⅳ.021－44

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第115927号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
责任编辑：郑 玫 版式设计：张世琴 责任校对：张 嫒
封面设计：陈 沛 责任印制：李 妍
北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2004年4月第1版·第1次印刷
787mm×1092mm 1/16·17.25印张·426千字
定价：25.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68993821、88379646
封面无防伪标均为盗版

序

教学改革和教材建设最近已被国家教委列入发展我国高等教育事业的一项重要任务。教学教材的改革主要有两个方面。一方面，随着教学本身的发展和工业技术等领域的飞速革新，教材需要现代化，加强现代数学思想和内容的比重，反映数学应用的新理论。另一方面，也要适应我国社会主义市场经济的需要，编写适合于新兴专业特点的教材。多年来，全国高校广大数学教师在教学中付出辛勤的劳动，在教学实践中结合各自专业特点，积累了丰富的经验，将他们编写的优秀教材加以出版并相互交流和切磋，对于促进教学教育改革无疑是非常有益的。

天津商学院俞钟祺教授等人执教数学多年，具有丰富的教学经验，他们编写的这套高等学校数学教材是长期教学实践的结晶。这套教材的对象是工科以及经济管理类专业的学生，教材在材料取舍方面可以看出作者做了许多精心的考虑。另一方面，教材有不少创新，比如说，书中有相当多的内容讲述高等数学、线性代数、概率论与数理统计在工业设计、经济管理领域内的各种应用。又比如说，讲述常系数差分方程、随机过程等内容，这是传统教材通常没有的。在经济和管理等方面，有大量实际问题的教学模型需要用差分方程或随机过程来描述。另一方面，随着计算机科学的飞速发展，连续数学模型在进行实际数值计算时也需要差分化。所以，向学生比较系统地讲述差分方程和随机过程的理论是一个有益的尝试。

基于此，我愿意向大家推荐这套有益培养学生素质和创新意识的教材。

冯克勤

前　言

概率论与数理统计是高等院校各专业的一门重要基础理论课，它具有高度的抽象性、严密的逻辑性以及广泛的应用性。它既是学习后续课程的基础，又是学生从事各种科学研究、生产实践以及日常生活所不可缺少的有力工具。为了培养跨世纪人才，需要不断提高学生素质，培养创新意识。除了使学生掌握必要的数学基础知识之外，更主要的是培养学生分析问题和解决问题的能力，而解题是学好概率论与数理统计的一个重要环节。广大学生都希望教师能对审题的思维方法和解题的基本技能给予指导。为此，天津市大学数学教学研究会组织天津科技大学、天津工业大学、中国民航学院、天津城建学院、天津理工学院、天津财经学院、天津商学院以及河北工业大学等院校有多年教学经验的老教师和具有博士、硕士学位的中青年骨干教师共同编写了这套高等院校数学教材，包括《高等数学例题分析与解题指导》、《线性代数与空间解析几何例题分析与解题指导》、《概率论与数理统计例题分析与解题指导》，教育部数学课程教学指导委员会主任、清华大学数学学院院长冯克勤教授还专门为此套书写了序。其中《概率论与数理统计》一书，经过多次修改及专家的支持和鼓励而形成，中国科学院院士陈希孺教授、项可风教授给予了充分肯定。该书根据教学大纲要求，围绕概率论与数理统计基本概念、基本理论和基本方法，精选了典型例题进行分析，对于有一定难度的题目给予了解题方法的指导。主要目的是为了帮助学生切实提高解题能力、学会解题方法、归纳解题技巧，通过学习概率论与数理统计课程，达到提高学生素质的目的。

本书由俞钟祺教授、刘振航副教授主编，马秀兰教授主审。参加编写的有中国民航学院杨彩萍（第一章）、天津商学院梁邦助（第二章）、天津科技大学张绍璞（第三章、第四章）、天津财经学院姜铭久（第五章例题分析、第六章解题指导）、天津商学院刘振航（第五章解题指导、第六章例题分析、附录）、天津商学院杨富贵（第七章）、天津工业大学李学堃（第八章）、天津商学院俞钟祺（第九章）。

在编写过程中，得到天津市教委高教处及天津地区各高等院校有关领导的大力支持，天津大学熊洪允教授、南开大学陈吉象教授都对编写作了具体指导。教育部启动“世界银行贷款项目—基础课程教学中加强素质教育和创新意识的培养的研究与实践”，有力推动了本书的编写工作。

本书初稿曾在天津市部分院校试用后，受到师生好评，在此基础上又作了认真修改。但由于水平有限，书中若有错漏之处，恳请读者批评指正。

编者

目　　录

第一章　概率论的基本概念

第一节　例题分析

例 1-1　在某城市中发行三种报纸 A、B、C，经调查，订阅 A 报的有 45%，订阅 B 报的有 35%，订阅 C 报的有 30%，同时订阅 A 及 B 报的有 10%，同时订阅 A 及 C 报的有 8%，同时订阅 B 及 C 报的有 5%，同时订阅 A、B、C 报的有 3%。试求下列事件的概率：

(1) 只订 A 报的；(2) 只订 A 及 B 报的；(3) 只订一种报纸的；(4) 恰好订两种报纸的；(5) 至少订阅一种报纸的；(6) 不订阅任何报纸的；(7) 至多订阅一种报纸的。

解

(1) $$\begin{aligned}P(A\overline{B}\,\overline{C})&=P(A-B-C)=P(A-(B\cup C))=P(A-A(B\cup C))\\&=P(A)-P(A(B\cup C))=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)\\&=0.45-0.1-0.08+0.03=0.30\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}P(AB\overline{C})&=P(AB-C)=P(AB-ABC)\\&=P(AB)-P(ABC)=0.10-0.03=0.07\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}&P(A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C)=P(A\overline{B}\,\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}C)\\&=0.30+P(B-B(A\cup C))+P(C-C(A\cup B))\\&=0.30+P(B)-P(BA)-P(BC)+P(ABC)+P(C)-P(CA)-P(CB)+P(ABC)\\&=0.30+0.35-0.10-0.05+0.03+0.30-0.08-0.05+0.03=0.73\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}&P(AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC)=P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}BC)\\&=P(AB)-P(ABC)+P(AC)-P(ABC)+P(BC)-P(ABC)\\&=P(AB)+P(AC)+P(BC)-3P(ABC)\\&=0.10+0.08+0.05-3\times0.03=0.14\end{aligned}$$

(5) $$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=0.45+0.35+0.30-0.10-0.08-0.05+0.03=0.90\end{aligned}$$

(6) $$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-0.90=0.10$$

(7) $$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C)&=P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})+P(A\overline{B}\,\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}C)\\&=0.10+0.73=0.83\end{aligned}$$

注　事件的运算非常重要，务必娴熟，这是因为在今后的概率计算中，经常将所求事件用已知事件的运算来表示。

例 1-2　箱中盛有 α 个白球及 β 个黑球，从其中任意取 $a+b$ 个，试求所取的球恰含 a 个白球和 b 个黑球的概率。

解　这里的随机试验 $E=\{$自 $\alpha+\beta$ 个球中取出 $a+b$ 个$\}$，每 $a+b$ 个球构成一基本事件，所以共有 $C_{\alpha+\beta}^{a+b}$ 个基本事件，所论事件 $A=\{$恰好取中 a 个白球 b 个黑球$\}$ 共含 $C_{\alpha}^{a}\cdot C_{\beta}^{b}$ 个基本事件，故

$$P(A)=C_{\alpha}^{a}C_{\beta}^{b}/C_{\alpha+\beta}^{a+b}$$

例 1-3 箱中盛有 α 个白球和 β 个黑球，从其中任意地接连取 $k+1(\leqslant\alpha+\beta)$ 个球。如每球被取出后不还原，试求最后取出的球是白球的概率。

解 这里 $E=\{$自 $\alpha+\beta$ 个球中接连不还原地取 $k+1$ 个球$\}$，由于注意了球的次序，故应考虑排列。每 $k+1$ 个排列好的球构成一基本事件，接连不还原地取 $k+1$ 个可看成一次取 $k+1$ 个，所以共有 $C_{\alpha+\beta}^{k+1}$种不同取法，一种取法对应$(k+1)!$ 个排列，故共有 $C_{\alpha+\beta}^{k+1}(k+1)!$ 个基本事件，最后取出的白球可以是 α 个中的任一个，有 α 种选法，其余 k 个可以是其余$\alpha+\beta-1$ 个中的任意 k 个，有 $C_{\alpha+\beta-1}^{k}$种选法，因而事件 $A=\{$取出的 $k+1$ 个球中最后一球是白球$\}$共含 $\alpha\cdot C_{\alpha+\beta-1}^{k}\cdot k!$ 个不同的基本事件，于是

$$P(A)=\frac{\alpha\cdot C_{\alpha+\beta-1}^{k}\cdot k!}{C_{\alpha+\beta}^{k+1}\cdot(k+1)!}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

值得注意的是 $P(A)$与 k 无关。

注 例 1-2、例 1-3 是古典概型事件概率计算中非常典型的一种类型，称为“抽球问题”。以后还会遇到各种各样的抽球问题，注意这里的“白球”、“黑球”可换为“甲物”、“乙物”或“合格产品”、“不合格产品”等，之所以说抽球问题有典型意义，原因就在于此。

例 1-4 有 n 个人，每个人都以同样的概率$\frac{1}{N}$被分配在$N(n\leqslant N)$间房中的每一间。试求下列各事件的概率：

$A=\{$指定 n 间房中各有一人$\}$

$B=\{$恰有 n 间房，其中各有一人$\}$

$C=\{$某指房中恰有 $m(m\leqslant n)$人$\}$

解 将 n 个人分配到N 间房中去，每一种分配方法是一基本事件。易知，这是古典概型概率问题，因每一人都可以分配到任一房中去，故共有 N^n 个基本事件。

今指定某 n 间房，第一人可分配到其中任一间，故有 n 种分法，第二人可分配到余下的 $n-1$ 间中任一间，故有 $n-1$ 种分法……因而事件 A 共含$n!$ 个基本事件，于是

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}$$

从 N 间房中任意选定n 间，共有 C_N^n 种选法，因而事件 B 共含$C_N^n n!$ 个不同的基本事件，于是

$$P(B)=\frac{C_N^n n!}{N^n}=\frac{N!}{N^n(N-n)!}$$

事件 C 中的m 个人可自n 个人中任意选出，共有 C_n^m 种选法，其余 $n-m$ 个人可以任意分配在其余的$N-1$ 间房里，共有$(N-1)^{n-m}$种分配法，因而事件 C 共有 $C_n^m(N-1)^{n-m}$个基本事件，于是

$$P(C)=\frac{C_n^m(N-1)^{n-m}}{N^n}=C_n^m\left(\frac{1}{N}\right)^m\cdot\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-m}$$

注 本例是古典概型概率中又一典型类型，称为“分房问题”。许多表面上提法不同的问题实际上属于同一类型，试看下例：

例 1-5 (1) 有 n 个质点，设每个都以同样的概率$\frac{1}{365}$落于 365 个格子中的每一格中，试求每一格至多只含一点的概率 p。

(2) 有 n 个人,设每人的生日是任何一日的概率为$\frac{1}{365}$,试求此 n 个人的生日互不相同的概率 p'。

(3) 有 n 个旅客乘火车途经 365 站,设每人在每站下车的概率为$\frac{1}{365}$,试求没有一人以上同时下车的概率 p''。

在(1)、(2)、(3)中都假定 $n \leqslant 365$。

解 这三个问题其实本质上都与例 1-4 中求 $P(B)$的问题等价(取 $N=365$),只要把"人"、"质点"、"旅客"看成一样,把"房子"、"格子"、"日"、"站"看成一样,因而由例 1-4 的解答知

$$p = p' = p'' = P(B) = \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365-n+1)}{365^n}$$

例 1-6 某城有 N 部货车,车牌号从 1 到 N,有一个外地人到该城去,把遇到的 n 部车子的牌号抄下(可能重复抄到某些车牌号),问抄到的最大号码正好为 k 的概率($1 \leqslant k \leqslant N$)。

解 这种抄法可以看作是对 N 个车牌号进行 n 次有放回的抽样,所有可能的抽法共有 N^n 种,这就是基本事件总数。由于每部货车被遇到的机会可以认为相同,因此这是一个古典概型概率的计算问题。设 $A=\{$抄到的最大号码正好为 $k\}$,先考虑最大车牌号不大于 k 的取法,这样的取法共有 k^n 种,再考虑最大车牌号不大于 $k-1$ 的取法,其数目有$(k-1)^n$ 种,因此 A 包含的基本事件总数为$k^n-(k-1)^n$。故所求概率为

$$P(A) = \frac{k^n-(k-1)^n}{N^n}$$

例 1-7 从 1 至 9 这 9 个数字中,有放回地取 3 次,每次任取 1 个,求所取的 3 个数之积能被 10 整除的概率。

解 设 $A_1=\{$所取的 3 个数字中含有数字 5$\}$,$A_2=\{$所取的 3 个数中有偶数$\}$,$A=\{$所取的 3 个数之积能被 10 整除$\}$,则 $A=A_1A_2$,所以

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1A_2) = 1-P(\overline{A_1A_2}) = 1-P(\overline{A_1} \cup \overline{A_2}) \\ &= 1-P(\overline{A_1})-P(\overline{A_2})+P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}) \\ &= 1-\left(\frac{8}{9}\right)^3-\left(\frac{5}{9}\right)^3+\left(\frac{4}{9}\right)^3 \\ &= 1-0.786 = 0.214 \end{aligned}$$

注 关于古典概型概率的计算,实际中许多具体问题可以大致归并为三类:(Ⅰ)抽球问题;(Ⅱ)分房问题;(Ⅲ)随机取数问题。例 1-6 与例 1-7 属于第Ⅲ类。

例 1-8 某人午觉醒来发觉表停了,他打开收音机想听电台报时。求他等待的时间短于 10min 的概率。

解 此题属几何概型。因为电台每小时报时一次,我们自然认为这个人打开收音机时处于两次报时之间,例如(13:00,14:00),而且取各时刻的可能性一样。要遇到等待时间短于 10min,当且仅当他打开收音机的时间正好处于 13:50~14:00 之间,相应概率是$\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$。

例 1-9 两人相约 7 点到 8 点在某地会面,先到者等候另一人 20min,过时就可离去。试求这两人能会面的概率。

解 此题仍属几何概型，以 x、y 分别表示两人到达的时刻，则会面的充要条件为

$$|x-y| \leqslant 20$$

可能的结果全体是边长为 60 的正方形里的点，能会面的点的区域用阴影标出(图 1-1)，从而所求概率为

$$p=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}$$

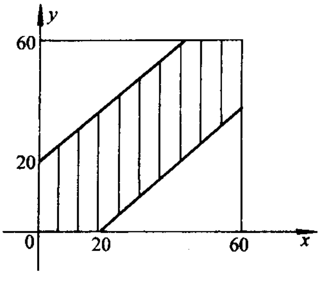

图 1-1

例 1-10 一袋中装有 $N-1$ 只黑球及 1 只白球，每次从袋中随机地摸出 1 球，并换入 1 只黑球，这样继续下去。问第 k 次摸球时，摸到黑球的概率是多少？

解 设 $A=\{$第 k 次摸到黑球$\}$，则 $\overline{A}=\{$第 k 次摸到白球$\}$，现在计算 $P(\overline{A})$。

因为袋中只有 1 只白球，而每次摸出白球总是换入黑球，故为了第 k 次摸到白球，则前面的 $k-1$ 次一定不能摸到白球。因此 $\overline{A}=\{$在前 $k-1$ 次摸球时都摸出黑球而第 k 次摸出白球$\}$，这一事件的概率为

$$P(\overline{A})=\frac{(N-1)^{k-1}\cdot 1}{N^k}=\left(1-\frac{1}{N}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{N}$$

所以
$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{N}$$

注 在不同的问题中，有的求 $P(A)$容易，求 $P(\overline{A})$困难，有的正好相反，利用公式 $P(\overline{A})=1-P(A)$，就可以先求容易的一个，再去求另一个，本例及下例主要说明这一点。

例 1-11 从一批由 45 件正品、5 件次品组成的产品中任取 3 件产品，求下列事件的概率：(1) 恰有 1 件次品；(2) 至少有 1 件次品；(3) 最多有两件次品。

解 从 50 件产品中任取 3 件产品属不放回抽样类，总取法为 C_{50}^3，这是古典概型问题。设 $A_i=\{$取到的 3 件产品中恰有 i 件次品$\}(i=0,1,2,3)$。

(1) 抽取的 3 件产品恰有 1 件次品，则此件次品应从 5 件次品中抽取，取法有 C_5^1 种，余下的 2 件正品应从 45 件正品中抽取，取法有 C_{45}^2种。由乘法原理知 A_1 包含的基本事件总数为 $C_5^1C_{45}^2$，故

$$P(A_1)=C_5^1C_{45}^2/C_{50}^3=\frac{99}{392}$$

(2) 注意到事件“至少有 1 件次品”与“没有次品”是对立事件，从而

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(A_0)=1-\frac{C_{45}^3}{C_{50}^3}=\frac{541}{1960}$$

(3) $P(A_0\cup A_1\cup A_2)=1-P(A_3)=1-\dfrac{C_5^3}{C_{50}^3}=\dfrac{1959}{1960}$

例 1-12 某种动物由出生到 20 岁的概率为 0.8，活到 25 岁的概率为 0.4。问现年 20 岁的这种动物活到 25 岁的概率是多少？

解 设 $A=\{$活到 20 岁以上$\}$，$B=\{$活到 25 岁以上$\}$，显然 $B\subset A$，故该问题是求条件概率 $P(B|A)$。因为 $P(A)=0.8$，$P(B)=0.4$，又 $B\subset A$，$AB=B$，$P(AB)=P(B)=0.4$ 所以

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.8}=\frac{1}{2}$$

例 1-13 甲乙两班共有 70 名同学,其中女同学 40 名。设甲班有 30 名同学,而女生 15 名,问在碰到甲班同学时,正好碰到的是一名女同学的概率。

解 设 $A=\{$碰到甲班同学$\}$,$B=\{$碰到女同学$\}$,这是一个有前提条件“碰到甲班同学”的问题,因此所求的是条件概率 $P(B|A)$。

因为 $P(AB)=\frac{15}{70},\quad P(A)=\frac{30}{70}$

所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{2}$

例 1-14 某厂的产品中有 4% 的废品,在 100 件合格品中有 75 件一等品。试求在该厂的产品中任取一件是一等品的概率。

解 事件 $A=\{$任取一件是合格品$\}$,事件 $B=\{$任取一件是一等品$\}$。因为是在该厂的产品中任取一件,即样本空间是该厂的产品,因此所求的是 $P(AB)$。

因为 $P(A)=1-P(\overline{A})=96\%,\quad P(B|A)=75\%$

所以 $P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{96}{100}\times\frac{75}{100}=0.72$

例 1-15 一批灯泡共 100 只,次品率为 10%。不放回抽取三次,每次 1 只,求第三次才取得合格品的概率。

解 用 $A_i=\{$第 i 次取得合格品$\}$,$i=1,2,3$。显然要求的概率是

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)$$

由 $P(\overline{A}_1)=\frac{10}{100},P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)=\frac{9}{99},P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{90}{98}$得

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=\frac{10}{100}\times\frac{9}{99}\times\frac{90}{98}\approx 0.0083$$

注 这里需注意,乘法公式与条件概率公式实际上是一个公式,或由 $P(B|A)$(或 $P(A|B)$)求 $P(AB)$,或由 $P(AB)$求 $P(B|A)$(或 $P(A|B)$),首要的问题是搞清要求的是积事件的概率,还是条件概率。关于这一点,读者可以从例 1-12~例 1-15 中仔细体会。

例 1-16 设甲、乙、丙向同一敌机射击,且甲、乙、丙击中敌机的概率分别为 0.4、0.5、0.7。若只有一人击中,飞机坠毁的概率为 0.2;若二人击中,飞机坠毁的概率为 0.6;若三人均击中,飞机坠毁的概率为 0.9。

(1) 求飞机坠毁的概率;(2) 若已知飞机坠毁,求是二人击中的概率。

解 (1) 设 $A_i=\{$恰有 i 人击中飞机$\}$,$i=0,1,2,3$。其中 A_0 实际上表示三人均未击中,设 $B=\{$飞机坠毁$\}$,可以看出 A_0、A_1、A_2、A_3 组成样本空间的一个划分。又注意到甲、乙、丙三人是否击中敌机是相互独立的,利用概率的加法与乘法公式,有

$$P(A_0)=(1-0.4)\times(1-0.5)\times(1-0.7)=0.09$$

$$\begin{aligned}P(A_1)&=P(\text{甲}\overline{\text{乙}}\,\overline{\text{丙}}+\overline{\text{甲}}\text{乙}\overline{\text{丙}}+\overline{\text{甲}}\,\overline{\text{乙}}\,\text{丙})\\&=0.4\times(1-0.5)\times(1-0.7)+(1-0.4)\times0.5\times(1-0.7)\\&\quad+(1-0.4)\times(1-0.5)\times0.7\\&=0.36\end{aligned}$$

$$P(A_2)=P(\text{甲乙}\overline{\text{丙}}+\overline{\text{甲}}\text{乙丙}+\text{甲}\overline{\text{乙}}\text{丙})$$

$$=0.4\times0.5\times(1-0.7)+(1-0.4)\times0.5\times0.7+0.4\times(1-0.5)\times0.7$$
$$=0.41$$

$P(A_3)=P(\text{甲乙丙})=0.4\times0.5\times0.7=0.14$

又由题意有

$$P(B|A_0)=0,\quad P(B|A_1)=0.2,\quad P(B|A_2)=0.6,\quad P(B|A_3)=0.9$$

由全概率公式得

$$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B|A_i)$$
$$=0.09\times0+0.36\times0.2+0.41\times0.6+0.14\times0.9=0.444$$

(2) 由贝叶斯公式,得

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{0.41\times0.6}{0.444}\approx0.554$$

注 在求复杂随机事件的概率时,全概率公式是一个有力的工具。当所求概率为许多因素引发的某种结果,而该结果又不能简单地看作这诸多事件之和时,可考虑用全概率公式,而贝叶斯公式用于试验结果已知,追查是何种原因(或情况、条件)下引发的概率,故也称其为后验概率公式。

例 1-17 设一个口袋中有 6 个球,令 A_1、A_2、A_3 依次表示这 6 个球分别为 4 红 2 白,3 红 3 白,2 红 4 白。设先验概率为 $P(A_1)=\frac{1}{2}$,$P(A_2)=\frac{1}{6}$,$P(A_3)=\frac{1}{3}$。现从这口袋中任取一球,得到白球,求相应的后验概率?

解 设 $B=\{$任取一球为白球$\}$。由题设知 $P(B|A_1)=\frac{2}{6}$,$P(B|A_2)=\frac{3}{6}$,$P(B|A_3)=\frac{4}{6}$,由贝叶斯公式有

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{6}}=\frac{6}{17}$$

同理可得 $P(A_2|B)=\frac{3}{17}$,$P(A_3|B)=\frac{8}{17}$。

例 1-18 张三欲与李四通话,李的电话为分机。假设张挂通总机的概率为 80%,李的分机占线的概率 10%,求张三与李四通话的概率。

解 设 $A=\{$挂通总机$\}$,$B=\{$分机不占线$\}$,$D=\{$张与李通话$\}$,因为挂通总机与分机是否占线是相互独立的,故

$$P(D)=P(AB)=P(A)P(B)=P(A)[1-P(\overline{B})]$$
$$=80\%\times(1-10\%)=0.72$$

例 1-19 一工人看管三台机床,在一小时内甲、乙、丙三台机床需工人照看的概率分别为 0.9、0.8 和 0.85。求在一小时中

(1) 没有机床需要照看的概率;(2) 至少有一台机床不要照看的概率;(3) 至多只有一台

机床需要照看的概率。

解 设 $A_i=\{$第 i 台机床需要照看$\}$，$i=1,2,3$。$A=\{$没有一台机床需照看$\}$，$B=\{$至少有一台机床不要照看$\}$，$C=\{$至多只有一台机床需要照看$\}$

因为三台机床要不要照看是相互独立的，故

(1) $P(A)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=(1-0.9)(1-0.8)(1-0.85)=0.003$

(2) 因为有“至少”二字，用对立事件的概率性质做题更简便，即

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-P(A_1A_2A_3)=1-P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$
$$=1-0.9\times0.8\times0.85=0.388$$

(3) $P(C)=P\{$全不需要照看或恰有一台需照看$\}$

$$=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$$
$$=0.003+0.9\times0.2\times0.15+0.1\times0.8\times0.15+0.1\times0.2\times0.85=0.059$$

注 独立性是非常重要的概念，必须正确理解，例如多个事件的独立性并不等价于事件两两独立。另一方面，正如以上两例所示，事件的独立性常常不是根据定义，而是根据实际问题来判断的。

第二节 解题指导

1-1 写出下列各随机试验的样本空间：

(1) 记录一个小班数学考试的平均分数(设以百分制记分)。

(2) 同时掷三颗骰子，记录三颗骰子点数之和。

(3) 10 只产品中有 3 只次品，每次从中取一只(不放回抽样)直到将 3 只次品都取出，记录抽取的次数。

(4) 生产某产品直到得到 10 件正品，记录生产产品的总件数。

(5) 一个小组有 A、B、C、D、E 五个人，要选正副组长各一人(一个人不能兼二职)，观察选举结果。

(6) 甲乙二人下棋一局，观察棋赛结果。

(7) 一口袋中有许多红色、白色、蓝色乒乓球，在其中任取 4 只，观察它们具有哪几种颜色。

(8) 对某工厂出产的产品进行检查，合格的盖上“正品”，不合格的盖上“次品”，如连续查出 2 个次品就停止检查，或检查 4 个产品就停止检查，记录检查结果。

(9) 有 A、B、C 三只盒子，a、b、c 三只球，将三只球装入三只盒子中，使每只盒子装一只球，观察装球情况。

(10) 将一尺之棰折成三段，观察各段的长度。

解 (1) 某小班人数为 n，每个人的考分可为 $0,1,2,\cdots,100$，于是该小班的平均考分可为 $\frac{0}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{n\times100}{n}$，故样本空间 $\Omega=\left\{\frac{0}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{n\times100}{n}\right\}$。

(2) 掷一骰子可能出现点数为 $1,2,\cdots,6$，掷三颗骰子可能出现的点数之和为 $3,4,5,\cdots,18$，故样本空间 $\Omega=\{3,4,5,\cdots,18\}$。

(3) 要将 3 只次品都取出，抽取的次数至少要 3 次，最多是 10 次(因为只有 10 件产品)，

故样本空间 $\Omega=\{3,4,\cdots,10\}$。

(4) 要得到10件正品,产品总件数起码该是10件,故样本空间 $\Omega=\{10,11,12,\cdots\}$。

(5) 写在前表示正组长,写在后表示副组长,于是样本空间 $\Omega=\{AB,AC,AD,AE,BA,BC,BD,BE,CA,CB,CD,CE,DA,DB,DC,DE,EA,EB,EC,ED\}$。

(6) 样本空间 $\Omega=\{$甲胜乙负,乙胜甲负,和局$\}$。

(7) 设 r、w、b 分别表示红色、白色、蓝色,rw 表示红色和白色,rb 表示红色和蓝色,wb 表示白色和蓝色,rwb 表示红、白、蓝三色,样本空间 $\Omega=\{r,w,b,rw,rb,wb,rwb\}$。

(8) 设0表示次品,1表示正品,由题设可知样本空间 $\Omega=\{00,0100,0101,0110,0111,100,1010,1011,1100,1101,1110,1111\}$。

(9) 设 A、B、C 为三个盒子,A_a 表示球 a 放在盒子 A 中,其余类推,于是样本空间 $\Omega=\{A_aB_bC_c,A_aB_cC_b,A_bB_aC_c,A_bB_cC_a,A_cB_aC_b,A_cB_bC_a\}$。

(10) 设 x、y、z 分别为折后的第一段、第二段、第三段的长度,于是样本空间 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z>0,x+y+z=1\}$。

1-2 设一个工厂生产了四个零件,A_i 表示生产的第 i 个零件是正品($i=1,2,3,4$)。试用 A_i 表示下列各事件:

(1) 没有一个次品;(2) 至少有一个次品;(3) 只有一个次品;(4) 至少有三个不是次品;(5) 恰有三个次品;(6) 至多有一个次品。

解 (1) $A_1A_2A_3A_4$

(2) $\overline{A_1A_2A_3A_4}$

(3) $\overline{A_1}A_2A_3A_4\cup A_1\overline{A_2}A_3A_4\cup A_1A_2\overline{A_3}A_4\cup A_1A_2A_3\overline{A_4}$

(4) $A_1A_2A_3\overline{A_4}\cup A_1A_2\overline{A_3}A_4\cup A_1\overline{A_2}A_3A_4\cup\overline{A_1}A_2A_3A_4\cup A_1A_2A_3A_4$

(5) $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\overline{A_4}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4$

(6) $A_1A_2A_3A_4\cup\overline{A_1}A_2A_3A_4\cup A_1\overline{A_2}A_3A_4\cup A_1A_2\overline{A_3}A_4\cup A_1A_2A_3\overline{A_4}$

1-3 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4},P(AB)=0,P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{6}$,求 A、B、C 全不发生的概率。

解
$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})&=1-P(A\cup B\cup C)=1-P((A\cup B)\cup C)\\&=1-[P(A\cup B)+P(C)-P(A\cup B)C]\\&=1-[P(A)+P(B)-P(AB)+P(C)-P(AC\cup BC)]\\&=1-P(A)-P(B)-P(C)+P(AB)+P(AC\cup BC)\\&=1-\frac{3}{4}+P(AC)+P(BC)-P(ABC)\\&=1-\frac{3}{4}+\frac{2}{6}-P(ABC)=1-\frac{3}{4}+\frac{1}{3}-0=\frac{7}{12}\end{aligned}$$

注 $ABC\subset AB$,所以 $P(ABC)=0$。

1-4 已知 $P(A)=0.4,P(B)=0.3,P(A\cup B)=0.6$,求 $P(A\overline{B})$。

解 由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,得 $P(AB)=0.1$,而
$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.4-0.1=0.3$$

1-5 设 A、B 是两事件且 $P(A)=0.6,P(B)=0.7$。问:

(1) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最大值,最大值是多少?(2) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最小值,最小值是多少?

解 (1) 由 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$ 知,当 $A\cup B=\Omega$(样本空间)时,$P(A\cup B)=1$,$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.6+0.7-1=0.3$(最小值)。

(2) 当 $A\subset B$ 时,$P(A\cup B)=P(B)=0.7$,从而 $P(A\cup B)$ 达最小值,$P(AB)$ 最大,此时 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.6+0.7-0.7=0.6$(最大值)。

1-6 某旅行社 100 人中有 43 人会讲英语,35 人会讲日语,32 人会讲日语和英语,9 人会讲法语、英语和日语,且每人至少会讲英、日、法三种语言中的一种语言。若从中任选一人,求:

(1) 此人会讲英语和日语,但不会讲法语的概率;(2) 此人只会讲法语的概率。

解 设 $A=\{$此人会讲英语$\}$,$B=\{$此人会讲日语$\}$,$C=\{$此人会讲法语$\}$则

(1) $P(AB\,\overline{C})=P(AB-ABC)=P(AB)-P(ABC)=\dfrac{32}{100}-\dfrac{9}{100}=\dfrac{23}{100}$

(2) $$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B}C)&=P(\overline{A}\,\overline{B}-\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A}\,\overline{B})-P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A\cup B})-0\\&=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)\\&=1-\frac{43}{100}-\frac{35}{100}+\frac{32}{100}=\frac{27}{50}\end{aligned}$$

1-7 设事件 A 与 B 满足 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$,求 $P(A\cup B)$。

解 A 与 B 为对立事件,事实上 $A=AB\cup A\,\overline{B}=\overline{A}\,\overline{B}\cup A\,\overline{B}=\overline{B}$,从而 $A\cup B$ 是必然事件,故 $P(A\cup B)=1$。

1-8 某校在 100 名学生中开设德语、管理学和法学三门选修课,其中有 42 人选修德语,68 人选修管理学,54 人选修法学,22 人选修德语和法学,25 人选修德语和管理学,10 人三门都选,8 人一门也不选。若从中任选一人,求下列事件的概率:

(1) 此人选修法学与管理学,但不选修德语;(2) 此人只选修德语。

解 设 $A=\{$此人选修德语$\}$,$B=\{$此人选修法学$\}$,$C=\{$此人选修管理学$\}$,依题意有 $P(A)=42\%$,$P(B)=54\%$,$P(C)=68\%$,$P(AB)=22\%$,$P(AC)=25\%$,$P(ABC)=10\%$,$P(A\cup B\cup C)=92\%$

(1) 由 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$ 得 $P(BC)=35\%$,而 $P(BC)=P(\overline{A}BC)+P(ABC)$,故

$$P(\overline{A}BC)=P(BC)-P(ABC)=0.25$$

(2) $$\begin{aligned}P(A\,\overline{B}\,\overline{C})&=P(\overline{B}\,\overline{C})-P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{B\cup C})-P(\overline{A\cup B\cup C})\\&=1-P(B\cup C)-(1-P(A\cup B\cup C))\\&=P(A\cup B\cup C)-P(B)-P(C)+P(BC)\\&=92\%-54\%-68\%+35\%=0.05\end{aligned}$$

1-9 (1) 已知 A_1 与 A_2 同时发生则 A 发生,试证:$P(A)\geqslant P(A_1)+P(A_2)-1$

(2) 若 $A_1A_2A_3\subset A$,试证:$P(A)\geqslant P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-2$

证 (1) $A\supset A_1A_2$,由单调性及 $P(A_1\cup A_2)\leqslant 1$ 得

$$P(A)\geqslant P(A_1A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cup A_2)\geqslant P(A_1)+P(A_2)-1$$

(2) $A\supset A_1A_2A_3$,两次利用(1)的结果得

$$P(A)\geqslant P((A_1A_2)A_3)\geqslant P(A_3)+P(A_1A_2)-1$$

$$\geqslant P(A_3)-1+P(A_1)+P(A_2)-1$$
$$=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-2$$

1-10 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是随机事件，试用归纳法证明公式

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

证 当 $n=2$ 时，$A_1\cup A_2=A_1\cup(A_2\overline{A_1})$，$A_1$ 与 $A_2\overline{A_1}$ 两者不相容，所以

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2\overline{A_1})=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)$$

即当 $n=2$ 时原式成立。

设对 $n-1$ 原式成立，现证对 n 原式成立。

$$P(A_1\cup\cdots\cup A_{n-1}\cup A_n)=P((A_1\cup\cdots\cup A_{n-1})\cup A_n)$$
$$=P(A_1\cup\cdots\cup A_{n-1})+P(A_n)-P(A_1A_n\cup\cdots\cup A_{n-1}A_n)$$

对前后两项分别应用归纳法假设得

$$P(A_1\cup\cdots\cup A_{n-1}\cup A_n)$$
$$=\sum_{i=1}^{n-1}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{n-2}P(A_1\cdots A_{n-1})+P(A_n)-$$
$$\left[\sum_{i=1}^{n-1}P(A_iA_n)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}P(A_iA_nA_jA_n)+\cdots+(-1)^{n-2}P(A_1A_nA_2A_n\cdots A_{n-1}A_n)\right]$$
$$=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

至此，原式得证。

1-11 已知 $P(AB)=P(A)P(B)$，$C\supset AB$，$\overline{C}\supset\overline{A}\,\overline{B}$，证明：$P(AC)\geqslant P(A)P(C)$。

证 设 $BC=C_1$，$C(A-B)=C_2$，由 $\overline{C}\supset\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A\cup B}$ 可得 $C\subset A\cup B$，所以必有

$$C=C_1\cup C_2 \tag{1}$$

且 $C_1C_2=\varnothing$，又 $C\supset AB$，因而 $AC_1=A(BC)=AB$，再由 $P(B)\geqslant P(C_1)$ 得

$$P(AC_1)=P(AB)=P(A)P(B)\geqslant P(A)P(C_1) \tag{2}$$

由 $C_2\subset A$ 并利用 $P(A)\leqslant 1$ 得

$$P(AC_2)=P(C_2)\geqslant P(A)P(C_2) \tag{3}$$

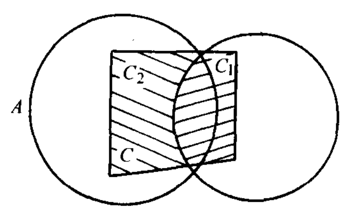

图 1-2

由式(1)、式(2)和式(3)可得

$$P(AC)=P(A(C_1\cup C_2))=P(AC_1\cup AC_2)$$
$$=P(AC_1)+P(AC_2)$$
$$\geqslant P(A)P(C_1)+P(A)P(C_2)$$
$$=P(A)[P(C_1)+P(C_2)]=P(A)P(C)$$

1-12 设在 n^2 张彩票中有 n 张有奖，求买 n 张彩票至少有一张中奖的概率。

解 记所求事件为 A，则易得 $P(\overline{A})=C_{n^2-n}^{n}/C_{n^2}^{n}$，于是

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-C_{n^2-n}^{n}/C_{n^2}^{n}$$

1-13 袋中有 7 个球，其中红球 5 个白球 2 个，从袋中取球两次，每次随机地取一个球，且第一次取出的球不放回袋中。求：

(1) 第一次取得白球，第二次取得红球的概率；

(2) 两次取得的球中一个是白球，另一个是红球的概率；

(3) 取得的两个球颜色相同的概率。

解 设 $A_i=\{$第 i 次取得红球$\}(i=1,2)$,第一次取球有 7 个球可供抽取,第二次取球只有 6 个球可供抽取,总取法 7×6 种,即样本空间有 7×6 个元素。

(1) 对事件 $\overline{A}_1A_2$ 而言,第一次有 2 个白球可供抽取,第二次有 5 个红球可供抽取,故 $\overline{A}_1A_2$ 中包含的基本事件数为 2×5,故

$$P(\overline{A}_1A_2)=\frac{2\times5}{7\times6}=\frac{5}{21}$$

另外,此概率也可由下法得到

$$P(\overline{A}_1A_2)=P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)=\frac{2}{7}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{21}$$

(2) 注意到 $\overline{A}_1A_2$ 与 $A_1\overline{A}_2$ 互不相容,即$(\overline{A}_1A_2)(A_1\overline{A}_2)=\varnothing$,于是有

$$P(\overline{A}_1A_2\cup A_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1A_2)+P(A_1\overline{A}_2)=\frac{2\times5}{7\times6}+\frac{5\times2}{7\times6}=\frac{10}{21}$$

(3) 因为$(A_1A_2)(\overline{A}_1\overline{A}_2)=\varnothing$,故

$$P(A_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(A_1A_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{5\times4}{7\times6}+\frac{2\times1}{7\times6}=\frac{11}{21}$$

1-14 从 n 双不同的鞋子中任取 $2r(2r<n)$只,求下列事件的概率:

(1) 没有成对的鞋子;(2) 只有一对鞋子;(3) 恰有两对鞋子;(4) 有 r 对鞋子。

解 (1) $A=\{$没有成对的鞋子$\}$,要使 A 发生,先从 n 双中取出 $2r$ 双,再从每双中取出一只,因此

$$P(A)=\frac{C_n^{2r}(C_2^1)^{2r}}{C_{2n}^{2r}}=\frac{2^{2r}C_n^{2r}}{C_{2n}^{2r}}$$

(2) 设 $B=\{$只有一对鞋子$\}$,要使 B 发生,先从 n 双中取一双(其两只全取),再从剩下的 $n-1$ 双中取出 $2r-2$ 双,从其每双中取出一只,所以

$$P(B)=\frac{C_n^1C_2^2C_{n-1}^{2r-2}(C_2^1)^{2r-2}}{C_{2n}^{2r}}=\frac{n\cdot2^{2r-2}\cdot C_{n-1}^{2r-2}}{C_{2n}^{2r}}$$

(3) 设 $C=\{$恰有两对鞋子$\}$,则

$$P(C)=\frac{2^{2r-4}C_n^2C_{n-2}^{2r-4}}{C_{2n}^{2r}}$$

(4) 设 $D=\{$恰有 r 对鞋子$\}$,则

$$P(D)=\frac{C_n^r}{C_{2n}^{2r}}$$

1-15 甲投 $n+1$ 次硬币,乙投 n 次硬币,双方投掷之后进行比较,求甲掷出的正面数比乙掷出的正面数多的概率。

解 设 $A=\{$甲掷出正面数多于乙掷出正面数$\}$,$B=\{$甲掷出反面数多于乙掷出反面数$\}$。设 $\overline{A}=\{$甲掷出正面数不多于乙掷出正面数$\}$发生,若乙掷出 x 次正面,则甲至多掷出 x 次正面,也就是说乙掷出 $n-x$ 次反面,则甲至少掷出 $n+1-x$ 次反面,从而甲掷出反面数多于乙掷出反面数。由此可得

$$\overline{A}=\{\text{甲掷出正面数}\leqslant\text{乙掷出正面数}\}=\{\text{甲掷出反面数}>\text{乙掷出反面数}\}=B$$

所以 $$P(A)+P(B)=P(A)+P(\overline{A})=1$$