

MATRIX ANALYSIS AND APPLICATIONS

矩阵分析与应用

张贤达 著

Zhang Xianda



清华大学出版社

 Springer

---

MATRIX ANALYSIS AND APPLICATIONS  
矩阵分析与应用

---

张贤达 著  
Zhang Xianda



清华大学出版社  
北京



Springer

## 内 容 简 介

本书将矩阵的分析分为梯度分析、奇异值分析、特征分析、子空间分析与投影分析五大部分,以一个新的体系,系统、全面地介绍矩阵分析的主要理论、方法及应用。全书共10章,内容包括矩阵与线性方程组、特殊矩阵、Toeplitz矩阵、矩阵的变换与分解、梯度分析与最优化、奇异值分析、总体最小二乘方法、特征分析、子空间分析、投影分析。本书取材广泛,内容新颖,理论与应用密切结合。书中介绍了矩阵分析的丰富理论和大量生动应用,可以帮助读者学会如何使用矩阵这一重要数学工具,灵活解决科学和工程技术中的大量问题。

本书适合于需要矩阵知识比较多和比较深的理科(数学、物理、力学等)和信息科学与技术(电子、通信、自动控制、计算机、系统工程、模式识别、信号处理等)等各学科有关教师、研究生和科技人员教学、自学或进修之用。书中归纳了矩阵的众多数学性质和大量有关公式,还可作为矩阵手册使用。

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13901104297 13801310933

本书封面贴有清华大学出版社激光防伪标签,无标签者不得销售。

### 图书在版编目(CIP)数据

矩阵分析与应用/张贤达著. —北京:清华大学出版社,2004.9

ISBN 7-302-09271-0

I. 矩… II. 张… III. 矩阵分析 IV. O151.21

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第084526号

出 版 者: 清华大学出版社

<http://www.tup.com.cn>

社 总 机: 010-62770175

地 址: 北京清华大学学研大厦

邮 编: 100084

客 户 服 务: 010-62776969

组稿编辑: 王一玲

文稿编辑: 陈 力

印 装 者: 三河市春园印刷有限公司

发 行 者: 新华书店总店北京发行所

开 本: 185×260 印 张: 47.75 字 数: 1130 千字

版 次: 2004年9月第1版 2004年9月第1次印刷

书 号: ISBN 7-302-09271-0/O·390

印 数: 1~4000

定 价: 68.00 元

---

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:(010)62770175-3103或(010)62795704

# 前 言

矩阵不仅是各数学学科,而且也是许多理工学科的重要数学工具。就其本身的研究而言,矩阵理论和线性代数也是极富创造性的领域。它们的创造性又极大地推动和丰富了其他众多学科的发展:许多新的理论、方法和技术的诞生与发展就是矩阵理论和线性代数的创造性应用与推广的结果。可以毫不夸张地说,矩阵理论和线性代数在物理、力学、信号与信息处理、通信、电子、系统、控制、模式识别、土木、电机、航空和航天等众多学科中是最富创造性和灵活性,并起着不可替代作用的数学工具。

作者在从事信号处理、神经计算、通信和模式识别的长期科学研究中,深刻感受到矩阵分析在科学研究中所起的重要作用,并体现在作者和合作者在国际权威和著名杂志发表的一系列论文中。另一方面,在十余年的研究生教学中,笔者对工科尤其是信息科学与技术各学科的研究生在矩阵理论与线性代数方面知识的不足与欠缺颇有体会。矩阵分析理论与方法的重要性,以及作者的教学和研究体会,催发了作者著作本书的意愿。虽然作者的《信号处理中的线性代数》一书曾由科学出版社于1997年出版,但本书无论是在体系结构上,还是在内容的组织与安排上,都与《信号处理中的线性代数》大不相同。

国内外出版了不少深受读者喜爱的矩阵理论和线性代数的书籍,而本书试图从一个新的角度,提出从矩阵的梯度分析、奇异值分析、特征分析、子空间分析、投影分析出发,构筑论述矩阵分析的一个新体系。此外,在国内外的有关书籍中,涉及矩阵理论和线性代数的应用时,一般都侧重于某一、二个特定的学科,本书则介绍矩阵分析在数理统计、数值计算、信号处理、电子、通信、模式识别、神经计算、系统科学等多学科中的大量生动应用。鉴于本书介绍的理论与应用的广泛性,故取名《矩阵分析与应用》。

全书共分10章,其主要内容可概括如下:

- (1) 矩阵分析的基础知识(第1~4章): 矩阵与线性方程组、特殊矩阵、Toeplitz矩阵、矩阵的变换与分解。
- (2) 梯度分析(第5章): 包括一阶梯度和二阶梯度的计算,以及实现最优化的梯度算法及其重要改进(递推最小二乘算法、共轭梯度算法、仿射投影算法和自然梯度算法)。
- (3) 矩阵的奇异值分析(第6~7章): 第6章介绍奇异值分解及其各种推广(乘积奇异值分解、广义奇异值分解、约束奇异值分解、结构奇异值)。第7章是奇异值分解在线性代数中的应用,介绍总体最小二乘方法、约束总体最小二乘、结构总体最小二乘。
- (4) 矩阵的特征分析(第8章): 包含矩阵的特征值分解以及各种推广(广义特征值分解、Rayleigh商、广义Rayleigh商、二次特征值问题、矩阵的联合对角化)。
- (5) 子空间分析(第9章): 子空间的构造、特征子空间分析方法、子空间的跟踪。
- (6) 投影分析(第10章): 包含沿着矩阵的基本空间(列空间或者行空间),到另一基本空间的正交投影和斜投影。

本书试图在以下方面形成特点:

- (1) 加大选材的广度和深度,充分体现内容的新颖性和先进性。为了与矩阵理论的国际新发展“接轨”,书中系统地介绍了矩阵分析的一些新领域、新理论和新方法,如总体最小二乘方法及其推广,二次特征值问题,矩阵的联合对角化,斜投影,子空间方法,仿射投影算法和自然梯度算法等。
- (2) 突出矩阵分析理论与科学技术应用的密切结合。本书在介绍每一种重要理论与方法的同时,都会选择介绍相应的应用。而在应用例子的选择上,则尽可能包括比较多的学科。事实上,本书的应用举例不仅涉及数理统计和数值计算等数学领域,更包括了信号处理、电子、通信、模式识别、神经计算、雷达、图像处理、系统辨识等信息科学与技术的不同学科与领域。
- (3) 强调创新能力的培养。书中介绍大量应用例子时,侧重于讲述应用的基本机理,其出发点是让读者体会矩阵分析的灵活性与创新性,学会如何使用矩阵分析的工具,进行创新研究。

为便于读者理解重要的概念和方法,书中穿插了大量的例题。为了方便读者检验学习效果,全书在参考全国硕士研究生招生部分数学试题和其他有关文献的基础上,选编了 340 余道习题。此外,本书不仅汇总了矩阵分析有关的大量数学性质和公式,而且汇编了 820 余条索引,可供读者作为一本矩阵手册使用。

本书是从一个工科研究和教学人员的视角进行材料的选择和内容论述的。作者在著作本书的过程中,参考了大量的国外有关矩阵分析与线性代数的论文和著作,其中以 SIAM 的多种杂志为主要参考文献源;而应用的举例则主要参考 IEEE 的几家汇刊。虽然作者竭力而为,但囿于理解水平和能力,书中未能如愿乃至不妥,甚至错误之处可能不乏其例。在此,诚恳希望诸位专家、同仁和广大读者不吝赐教。

作者原本打算对《信号处理中的线性代数》一书作较大修改,最终变成了重写,始自本人在西安电子科技大学任特聘教授之际,完成于回到清华大学任教二年之后,历时四载有余。然而,本书系作者积十余年教学和二十余年科学研究之体会与成果而成,借此机会感谢教育部“长江学者奖励计划”、国家自然科学基金委重大项目 and 多个基金项目、教育部博士点专项基金、国防重点实验室基金、航天支撑技术基金以及 Intel 公司等课题资助。

全书由笔者使用 L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 撰写及排版。

张贤达

2004 年 6 月谨识于清华大学

# 目 录

<b>第 1 章 矩阵与线性方程组</b>	<b>1</b>
1.1 矩阵的基本运算	1
1.1.1 矩阵与向量	1
1.1.2 矩阵的基本运算	3
1.1.3 向量的线性无关性与非奇异矩阵	7
1.1.4 初等行变换与阶梯型矩阵	8
1.1.5 基于初等行变换的矩阵方程求解	10
1.2 向量空间、内积空间与线性映射	14
1.2.1 集合的基本概念	14
1.2.2 向量空间	15
1.2.3 实内积空间	18
1.2.4 复内积空间	21
1.2.5 线性映射	22
1.3 随机向量	26
1.3.1 概率密度函数	26
1.3.2 随机向量的统计描述	28
1.3.3 正态随机向量	32
1.4 内积与范数	34
1.4.1 向量的内积与范数	35
1.4.2 向量的相似度	39
1.4.3 正交向量在移动通信中的应用	41
1.4.4 向量范数用作 Lyapunov 函数	43
1.4.5 矩阵的范数与内积	44
1.5 基与 Gram-Schmidt 正交化	47
1.5.1 向量空间的基	47
1.5.2 Gram-Schmidt 正交化	50
1.6 矩阵的标量函数	52
1.6.1 矩阵的二次型	53
1.6.2 矩阵的迹	54
1.6.3 行列式	56
1.6.4 矩阵的秩	59
1.7 逆矩阵	64
1.7.1 逆矩阵的定义与性质	64
1.7.2 矩阵求逆引理	68

1.8 广义逆矩阵	71
1.8.1 左逆矩阵与右逆矩阵	72
1.8.2 广义逆矩阵的定义及性质	74
1.8.3 广义逆矩阵的计算	77
1.8.4 一致方程的最小范数解	80
1.8.5 非一致方程的最小二乘解	83
1.9 Moore-Penrose 逆矩阵	85
1.9.1 Moore-Penrose 逆矩阵的定义与性质	85
1.9.2 Moore-Penrose 逆矩阵的计算	90
1.9.3 非一致方程的最小范数最小二乘解	94
1.9.4 广义逆矩阵的阶数递推计算	95
1.9.5 超定二维超越方程的求解	96
1.10 Hadamard 积与 Kronecker 积	100
1.10.1 矩阵的直和	100
1.10.2 Hadamard 积	101
1.10.3 矩阵化函数和向量化函数	105
1.10.4 Kronecker 积	107
1.10.5 Kronecker 积的应用	114
本章小结	118
习题	118
<b>第 2 章 特殊矩阵</b>	<b>133</b>
2.1 对称矩阵、Hermitian 矩阵与循环矩阵	133
2.2 基本矩阵	136
2.3 置换矩阵、互换矩阵与选择矩阵	139
2.3.1 置换矩阵与互换矩阵	139
2.3.2 广义置换矩阵	143
2.3.3 选择矩阵	144
2.4 正交矩阵与酉矩阵	145
2.5 带型矩阵与三角矩阵	150
2.5.1 带型矩阵	150
2.5.2 三角矩阵	151
2.6 中心化矩阵与对角加矩阵	153
2.6.1 求和向量与中心化矩阵	153
2.6.2 对角加矩阵	156
2.7 相似矩阵与相合矩阵	158
2.7.1 相似矩阵	158
2.7.2 相合矩阵	160

2.8 Vandermonde 矩阵与 Fourier 矩阵 . . . . .	161
2.8.1 Vandermonde 矩阵 . . . . .	162
2.8.2 Fourier 矩阵 . . . . .	166
2.9 Hankel 矩阵 . . . . .	169
2.10 Hadamard 矩阵 . . . . .	172
本章小结 . . . . .	174
习题 . . . . .	174
<b>第 3 章 Toeplitz 矩阵</b> . . . . .	<b>179</b>
3.1 半正定性 . . . . .	179
3.2 Toeplitz 线性方程组的 Levinson 递推求解 . . . . .	181
3.2.1 经典 Levinson 递推 . . . . .	182
3.2.2 Levinson 算法 . . . . .	183
3.2.3 分基 Schur 算法 . . . . .	189
3.2.4 Hermitian Levinson 递推 . . . . .	190
3.2.5 多信道 Toeplitz 线性方程组的 Levinson 递推求解 . . . . .	194
3.3 求解 Toeplitz 线性方程组的快速算法 . . . . .	195
3.3.1 循环镶嵌 . . . . .	196
3.3.2 Toeplitz 矩阵的部分求逆 . . . . .	197
3.3.3 Toeplitz 线性方程组求解 . . . . .	198
3.4 Toeplitz 矩阵的快速余弦变换 . . . . .	200
本章小结 . . . . .	204
<b>第 4 章 矩阵的变换与分解</b> . . . . .	<b>205</b>
4.1 Householder 变换 . . . . .	205
4.1.1 Householder 变换与 Householder 矩阵 . . . . .	206
4.1.2 Householder 变换的保范性 . . . . .	208
4.1.3 Householder 变换算法 . . . . .	210
4.2 Givens 旋转 . . . . .	214
4.2.1 反射与旋转 . . . . .	214
4.2.2 Givens 旋转 . . . . .	216
4.2.3 快速 Givens 旋转 . . . . .	218
4.2.4 Kogbetliantz 算法 . . . . .	220
4.3 矩阵的标准型 . . . . .	221
4.4 矩阵分解的分类 . . . . .	222
4.5 对角化分解 . . . . .	224
4.6 Cholesky 分解与 LU 分解 . . . . .	225
4.6.1 Cholesky 分解 . . . . .	225



4.6.2 LU分解	227
4.7 QR分解及其应用	229
4.7.1 QR 分解的性质	229
4.7.2 采用修正 Gram-Schmidt 法的 QR 分解	230
4.7.3 Householder QR 分解	232
4.7.4 采用 Givens 旋转的 QR 分解	236
4.7.5 基于 QR 分解的参数估计问题	237
4.7.6 基于 Householder 变换的快速时变参数估计	240
4.7.7 基于 Givens 旋转的时变参数估计	242
4.8 三角 - 对角化分解	244
4.8.1 $LDM^T$ 和 $LDL^T$ 分解	244
4.8.2 Schur 分解	245
4.9 三对角化分解	248
4.10 矩阵束的分解	250
本章小结	252
习题	252
<b>第 5 章 梯度分析与最优化</b>	<b>255</b>
5.1 梯度与无约束最优化	255
5.1.1 目标函数的极小点	255
5.1.2 实值函数相对于实向量的梯度	258
5.1.3 实值函数的梯度矩阵	261
5.1.4 迹函数的梯度矩阵	262
5.1.5 行列式的梯度矩阵	266
5.1.6 Hessian 矩阵	268
5.1.7 局部极小点的条件	270
5.2 矩阵微分及其在最优化中的应用	271
5.2.1 矩阵微分与偏导	271
5.2.2 标量函数的梯度	277
5.2.3 二阶微分矩阵与 Hessian 矩阵	282
5.3 共轭梯度与无约束最优化	285
5.3.1 实值函数相对于复变量的偏导数	286
5.3.2 标量函数相对于复向量的梯度	287
5.3.3 迹函数的共轭梯度	292
5.3.4 Hessian 矩阵 (共轭梯度的梯度)	295
5.4 约束最优化	297
5.4.1 局部解的一阶必要条件	298
5.4.2 局部解的二阶条件	302

5.4.3	线性约束的消去	304
5.4.4	线性约束的二次规划	305
5.5	梯度算法	310
5.5.1	统计逼近法	310
5.5.2	LMS 算法及其变型	312
5.5.3	解相关 LMS 算法	314
5.6	递推最小二乘算法	317
5.7	共轭梯度算法	320
5.7.1	共轭方向算法	321
5.7.2	共轭梯度算法	326
5.7.3	自适应滤波的共轭梯度算法	329
5.8	仿射投影算法	331
5.9	自然梯度算法	333
	本章小结	336
	习题	336
<b>第 6 章</b>	<b>奇异值分析</b>	<b>341</b>
6.1	数值稳定性与条件数	341
6.2	奇异值分解	344
6.2.1	奇异值分解及其解释	344
6.2.2	奇异值的性质	348
6.2.3	奇异值的性质汇总	352
6.2.4	秩亏缺最小二乘解	354
6.3	奇异值分解的数值计算	358
6.3.1	奇异值分解的 QR 分解算法	359
6.3.2	奇异值分解的精确计算	360
6.4	乘积奇异值分解	361
6.4.1	乘积奇异值分解问题	362
6.4.2	乘积奇异值分解的三角型 Kogbetliantz 算法	363
6.4.3	乘积奇异值分解的精确计算	365
6.5	广义奇异值分解	367
6.5.1	对称正定问题	367
6.5.2	广义奇异值分解	369
6.5.3	广义奇异值分解的实际算法	374
6.5.4	二次型不等式约束最小二乘	378
6.6	约束奇异值分解	381
6.6.1	约束奇异值	381
6.6.2	约束奇异值分解	383

6.7	结构奇异值	385
6.7.1	结构奇异值的定义与性质	385
6.7.2	结构奇异值的计算	387
6.8	奇异值分解的应用	389
6.8.1	静态系统的奇异值分解	390
6.8.2	系统辨识	392
6.8.3	阶数确定	394
6.8.4	系统的可控性	397
6.8.5	图像压缩	398
6.9	广义奇异值分解的应用	398
	本章小结	400
	习题	401
<b>第7章</b>	<b>总体最小二乘方法</b>	<b>403</b>
7.1	最小二乘方法	403
7.1.1	参数的唯一可辨识性	403
7.1.2	Gauss-Markov 定理	405
7.2	总体最小二乘: 理论与方法	408
7.2.1	总体最小二乘解	408
7.2.2	总体最小二乘解的性能	413
7.3	总体最小二乘: 应用	418
7.3.1	总体最小二乘拟合	418
7.3.2	频率估计的总体最小二乘法	423
7.3.3	FIR 自适应滤波的总体最小二乘算法	428
7.4	约束总体最小二乘	431
7.4.1	约束总体最小二乘方法	432
7.4.2	约束总体最小二乘与极大似然的关系	435
7.4.3	约束总体最小二乘解的扰动分析	437
7.4.4	应用	439
7.4.5	正则化约束总体最小二乘图像恢复	440
7.5	结构总体最小二乘	442
7.5.1	结构总体最小二乘解	442
7.5.2	迭代算法	443
7.5.3	约束总体最小二乘与结构总体最小二乘的等价性	445
7.5.4	秩亏缺 Hankel 矩阵逼近	446
7.5.5	有噪声的实现问题	447
	本章小结	450
	习题	451

<b>第 8 章 特征分析</b>	<b>453</b>
8.1 特征值问题与特征方程	453
8.1.1 特征值问题	453
8.1.2 特征多项式	454
8.2 特征值与特征向量	456
8.2.1 特征值	456
8.2.2 特征向量	458
8.2.3 与其他矩阵函数的关系	462
8.2.4 特征值和特征向量的性质	466
8.2.5 矩阵的可对角化定理	471
8.3 Cayley-Hamilton 定理及其应用	474
8.3.1 Cayley-Hamilton 定理	474
8.3.2 逆矩阵和广义逆矩阵的计算	476
8.3.3 矩阵幂的计算	478
8.3.4 矩阵指数函数的计算	479
8.4 Hermitian 矩阵的特征值分解	484
8.4.1 Hermitian 矩阵的特征值和特征向量	485
8.4.2 Hermitian 矩阵的正定性	487
8.4.3 对称正定特征值问题的 Jacobi 算法	492
8.5 Fourier 矩阵与 Toeplitz 矩阵的特征值分解	493
8.5.1 Fourier 矩阵的特征值	493
8.5.2 Toeplitz 矩阵的特征值分解	495
8.6 特征问题与奇异值问题的扰动分析	498
8.6.1 特征问题的扰动分析	498
8.6.2 奇异值问题的扰动分析	500
8.7 特征值分解的几种典型应用	501
8.7.1 标准正交变换与迷向圆变换	501
8.7.2 Pisarenko 谐波分解	503
8.7.3 离散 Karhunen-Loeve 变换	506
8.7.4 主分量分析	508
8.7.5 降秩 Wiener 滤波器	513
8.8 广义特征值分解	515
8.8.1 广义特征值分解及其性质	516
8.8.2 广义特征值分解算法	519
8.8.3 广义特征值分解的总体最小二乘方法	520
8.8.4 应用举例——ESPRIT 方法	521
8.8.5 相似变换在广义特征值分解中的应用	525

8.9	Rayleigh 商	528
8.9.1	Rayleigh 商	528
8.9.2	应用举例 1: 特征滤波器	532
8.9.3	应用举例 2: 快速最大似然序列解码	535
8.9.4	Rayleigh 商迭代	537
8.9.5	Rayleigh 商问题求解的共轭梯度算法	538
8.10	广义 Rayleigh 商	540
8.10.1	广义 Rayleigh 商	540
8.10.2	应用举例 1: 类鉴别有效性的评估	541
8.10.3	应用举例 2: 干扰抑制的鲁棒波束形成	546
8.11	二次特征值问题	548
8.11.1	二次特征值问题的描述	548
8.11.2	二次特征值问题求解	550
8.11.3	$\lambda$ 矩阵的逆矩阵	555
8.11.4	应用举例 1: AR 参数估计	558
8.11.5	应用举例 2: 约束最小二乘	560
8.11.6	应用举例 3: 多输入 - 多输出系统	561
8.12	联合对角化	562
8.12.1	联合对角化问题	562
8.12.2	近似联合对角化算法	565
8.12.3	近似联合对角化的另一种解法	569
8.13	特征分析与 Fourier 分析	571
8.13.1	线性算子	571
8.13.2	Fourier 分析与特征分析	573
	本章小结	579
	习题	579
<b>第 9 章</b>	<b>子空间分析与跟踪</b>	<b>589</b>
9.1	子空间的一般理论	589
9.1.1	子空间的基	589
9.1.2	无交连、正交与正交补	592
9.1.3	子空间的正交投影与夹角	595
9.1.4	主角与补角	597
9.1.5	子空间的旋转	598
9.1.6	信号空间的线性无关性	599
9.2	列空间、行空间与零空间	601
9.2.1	矩阵的列空间、行空间与零空间	601
9.2.2	子空间的基构造: 初等变换法	605

9.2.3	基本空间的标准正交基构造: 奇异值分解法	609
9.2.4	构造两个零空间交的标准正交基	612
9.3	子空间方法	613
9.3.1	信号子空间与噪声子空间	613
9.3.2	子空间方法 1: 多重信号分类 (MUSIC)	615
9.3.3	子空间方法 2: 方程 $\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{S}$ 求解	617
9.3.4	子空间白化	619
9.4	子空间跟踪方法的分类	621
9.5	基于扰动理论的子空间跟踪	622
9.5.1	秩 1 更新与扰动理论	623
9.5.2	无退化扰动子空间跟踪	625
9.5.3	退化扰动子空间跟踪	628
9.6	修正特征值分解及其递推更新	630
9.6.1	修正特征值问题	630
9.6.2	秩 1 修正	634
9.6.3	秩 2 修正	636
9.7	基于优化理论的子空间跟踪	637
9.7.1	Grassmann 流形和 Stiefel 流形	637
9.7.2	投影逼近子空间跟踪	642
9.8	快速子空间分解	647
9.8.1	Rayleigh-Ritz 逼近	647
9.8.2	基于三 Lanczos 迭代的快速子空间分解	650
9.8.3	基于双 Lanczos 迭代的快速子空间分解	651
本章小结		652
习题		653
<b>第 10 章</b>	<b>投影分析</b>	<b>657</b>
10.1	投影与正交投影	657
10.1.1	投影定理	658
10.1.2	均方估计	660
10.2	投影矩阵与正交投影矩阵	662
10.2.1	幂等矩阵	662
10.2.2	从数学角度看投影矩阵	664
10.2.3	从信号处理角度看投影矩阵	668
10.2.4	到列空间的投影矩阵与正交投影矩阵	669
10.2.5	正交投影矩阵	671
10.2.6	投影矩阵的导数	672
10.3	投影矩阵与正交投影矩阵的应用举例	674

10.3.1	投影梯度 . . . . .	674
10.3.2	解相关 . . . . .	676
10.3.3	前向预测滤波器的表示 . . . . .	677
10.3.4	后向预测滤波器的表示 . . . . .	678
10.4	投影矩阵和正交投影矩阵的更新 . . . . .	681
10.5	格型自适应滤波器设计 . . . . .	682
10.6	满列秩矩阵的斜投影算子 . . . . .	687
10.6.1	斜投影算子的定义 . . . . .	688
10.6.2	斜投影算子的性质 . . . . .	690
10.6.3	斜投影算子的几何解释 . . . . .	694
10.6.4	主角与斜投影矩阵的关系 . . . . .	696
10.6.5	多个子空间的斜投影算子 . . . . .	697
10.7	满行秩矩阵的斜投影算子 . . . . .	698
10.7.1	满行秩矩阵的斜投影算子定义 . . . . .	699
10.7.2	斜投影的计算 . . . . .	700
10.8	斜投影算子的应用 . . . . .	702
10.8.1	系统建模 . . . . .	702
10.8.2	信道与字符联合估计 . . . . .	704
	本章小结 . . . . .	708
	习题 . . . . .	708
	<b>参考文献</b> . . . . .	<b>711</b>
	<b>索引</b> . . . . .	<b>737</b>

# 第 1 章 矩阵与线性方程组

在科学与工程中,经常会遇到求解线性方程组的问题。矩阵是描述和求解线性方程组最基本和最有用的数学工具。矩阵不仅有很多基本的数学运算,如转置、内积、外积、逆矩阵、广义逆矩阵等,而且还有多种重要的标量函数,如行列式、范数、迹、秩。本章将介绍矩阵与线性方程组的基本知识,为后面各章全面介绍矩阵的分析及应用提供基础知识。

## 1.1 矩阵的基本运算

首先引出矩阵和向量的概念,给出本书中经常使用的基本符号。

### 1.1.1 矩阵与向量

在科学和工程中,经常会遇到  $m \times n$  线性方程组

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\} \quad (1.1.1)$$

它使用  $m$  个方程描述  $n$  个未知量之间的线性关系。这一线性方程组很容易用矩阵一向量形式简记为

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (1.1.2)$$

式中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.1.3)$$

称为  $m \times n$  矩阵,是一个按照长方阵列排列的复数或实数集合;而

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (1.1.4)$$



分别为  $m \times 1$  向量和  $n \times 1$  向量, 是按照列方式排列的复数或实数集合, 统称列向量。类似地, 按照行方式排列的复数或实数集合称为行向量, 例如

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n] \quad (1.1.5)$$

是  $1 \times n$  向量。

矩阵  $\mathbf{A}$  可以是线性系统、滤波器、无线信道等的符号表示; 而科学和工程中遇到的向量可分为三种<sup>[240]</sup>:

- (1) 物理向量: 泛指既有幅值, 又有方向的物理量, 如速度、加速度、位移等。
- (2) 几何向量: 为了将物理向量可视化, 常用带方向的 (简称有向) 线段表示之。这种有向线段称为几何向量。例如,  $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$  表示的有向线段, 其起点为  $A$ , 终点为  $B$ 。
- (3) 代数向量: 几何向量可以用代数形式表示。例如, 若平面上的几何向量  $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$  的起点坐标  $A = (a_1, a_2)$ , 终点坐标  $B = (b_1, b_2)$ , 则该几何向量可以表示为代数形式  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{bmatrix}$ 。这种用代数形式表示的几何向量称为代数向量。

推而广之, 多维空间的几何向量也可用代数形式表示。如无特殊申明, 本书今后将以代数向量作为讨论对象。

根据元素取值种类的不同, 代数向量又可分为以下三种:

- (1) 常数向量: 向量的元素全部为实常数或者复常数, 如  $\mathbf{a} = [1, 5, 4]^T$  等。
- (2) 函数向量: 向量的元素包含了函数值, 如  $\mathbf{x} = [1, x^2, \dots, x^n]^T$  等。
- (3) 随机向量: 向量的元素为随机变量或者随机过程, 如  $\mathbf{x}(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n)]^T$ , 其中,  $x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n)$  是  $m$  个随机过程或随机信号。

图 1.1.1 归纳了向量的分类。

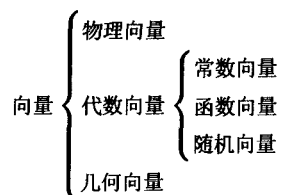


图 1.1.1 向量的分类

若令

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.1.6)$$

则矩阵  $\mathbf{A}$  可以用列向量记作

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n] \quad (1.1.7)$$