MATRIX ANALYSIS AND APPLICATIONS

矩阵分析与应用

张贤达 著

Zhang Xianda

清华大学出版社

Springer

MATRIX ANALYSIS AND APPLICATIONS
矩阵分析与应用

张贤达 著
Zhang Xianda

清华大学出版社 Springer
北京

内容简介

本书将矩阵的分析分为梯度分析、奇异值分析、特征分析、子空间分析与投影分析五大部分，以一种新的体系，系统、全面地介绍矩阵分析的主要理论、方法及应用。全书共10章，内容包括矩阵与线性方程组、特殊矩阵、Toeplitz矩阵、矩阵的变换与分解、梯度分析与最优化、奇异值分析、总体最小二乘方法、特征分析、子空间分析、投影分析。本书取材广泛，内容新颖，理论与应用密切结合。书中介绍了矩阵分析的丰富理论和大量生动应用，可以帮助读者学会如何使用矩阵这一重要数学工具，灵活解决科学和工程技术中的大量问题。

本书适合于需要矩阵知识比较多和比较深的理科（数学、物理、力学等）和信息科学与技术（电子、通信、自动控制、计算机、系统工程、模式识别、信号处理等）等各学科有关教师、研究生和科技人员教学、自学或进修之用。书中归纳了矩阵的众多数学性质和大量有关公式，还可作为矩阵手册使用。

图书在版编目(CIP)数据

矩阵分析与应用/张贤达著. —北京：清华大学出版社，2004.9
ISBN 7-302-09271-0

Ⅰ. 矩…　Ⅱ. 张…　Ⅲ. 矩阵分析　Ⅳ. O151.21

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第084526号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969
组稿编辑：王一玲
文稿编辑：陈　力
印 装 者：三河市春园印刷有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　本：185×260　**印张**：47.75　**字数**：1130千字
版　次：2004年9月第1版　2004年9月第1次印刷
书　号：ISBN 7-302-09271-0/O・390
印　数：1～4000
定　价：68.00元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770175-3103或(010)62795704

前　言

矩阵不仅是各数学学科，而且也是许多理工学科的重要数学工具。就其本身的研究而言，矩阵理论和线性代数也是极富创造性的领域。它们的创造性又极大地推动和丰富了其他众多学科的发展：许多新的理论、方法和技术的诞生与发展就是矩阵理论和线性代数的创造性应用与推广的结果。可以毫不夸张地说，矩阵理论和线性代数在物理、力学、信号与信息处理、通信、电子、系统、控制、模式识别、土木、电机、航空和航天等众多学科中是最富创造性和灵活性，并起着不可替代作用的数学工具。

作者在从事信号处理、神经计算、通信和模式识别的长期科学研究中，深刻感受到矩阵分析在科学研究中所起的重要作用，并体现在作者和合作者在国际权威和著名杂志发表的一系列论文中。另一方面，在十余年的研究生教学中，笔者对工科尤其是信息科学与技术各学科的研究生在矩阵理论与线性代数方面知识的不足与欠缺颇有体会。矩阵分析理论与方法的重要性，以及作者的教学和研究体会，催发了作者著作本书的意愿。虽然作者的《信号处理中的线性代数》一书曾由科学出版社于 1997 年出版，但本书无论是在体系结构上，还是在内容的组织与安排上，都与《信号处理中的线性代数》大不相同。

国内外出版了不少深受读者喜爱的矩阵理论和线性代数的书籍，而本书试图从一个新的角度，提出从矩阵的梯度分析、奇异值分析、特征分析、子空间分析、投影分析出发，构筑论述矩阵分析的一个新体系。此外，在国内外的有关书籍中，涉及矩阵理论和线性代数的应用时，一般都侧重于某一、二个特定的学科，本书则介绍矩阵分析在数理统计、数值计算、信号处理、电子、通信、模式识别、神经计算、系统科学等多学科中的大量生动应用。鉴于本书介绍的理论与应用的广泛性，故取名《矩阵分析与应用》。

全书共分 10 章，其主要内容可概括如下：

(1) 矩阵分析的基础知识 (第 1 ～ 4 章)：矩阵与线性方程组、特殊矩阵、Toeplitz 矩阵、矩阵的变换与分解。

(2) 梯度分析 (第 5 章)：包括一阶梯度和二阶梯度的计算，以及实现最优化的梯度算法及其重要改进 (递推最小二乘算法、共轭梯度算法、仿射投影算法和自然梯度算法)。

(3) 矩阵的奇异值分析 (第 6 ～ 7 章)：第 6 章介绍奇异值分解及其各种推广 (乘积奇异值分解、广义奇异值分解、约束奇异值分解、结构奇异值)。第 7 章是奇异值分解在线性代数中的应用，介绍总体最小二乘方法、约束总体最小二乘、结构总体最小二乘。

(4) 矩阵的特征分析 (第 8 章)：包含矩阵的特征值分解以及各种推广 (广义特征值分解、Rayleigh 商、广义 Rayleigh 商、二次特征值问题、矩阵的联合对角化)。

(5) 子空间分析 (第 9 章)：子空间的构造、特征子空间分析方法、子空间的跟踪。

(6) 投影分析 (第 10 章)：包含沿着矩阵的基本空间 (列空间或者行空间)，到另一基本空间的正交投影和斜投影。

本书试图在以下方面形成特点：

(1) 加大选材的广度和深度，充分体现内容的新颖性和先进性。为了与矩阵理论的国际新发展“接轨”，书中系统地介绍了矩阵分析的一些新领域、新理论和新方法，如总体最小二乘方法及其推广，二次特征值问题，矩阵的联合对角化，斜投影，子空间方法，仿射投影算法和自然梯度算法等。

(2) 突出矩阵分析理论与科学技术应用的密切结合。本书在介绍每一种重要理论与方法的同时，都会选择介绍相应的应用。而在应用例子的选择上，则尽可能包括比较多的学科。事实上，本书的应用举例不仅涉及数理统计和数值计算等数学领域，更包括了信号处理、电子、通信、模式识别、神经计算、雷达、图像处理、系统辨识等信息科学与技术的不同学科与领域。

(3) 强调创新能力的培养。书中介绍大量应用例子时，侧重于讲述应用的基本机理，其出发点是让读者体会矩阵分析的灵活性与创新性，学会如何使用矩阵分析的工具，进行创新研究。

为便于读者理解重要的概念和方法，书中穿插了大量的例题。为了方便读者检验学习效果，全书在参考全国硕士研究生招生部分数学试题和其他有关文献的基础上，选编了 340 余道习题。此外，本书不仅汇总了矩阵分析有关的大量数学性质和公式，而且汇编了 820 余条索引，可供读者作为一本矩阵手册使用。

本书是从一个工科研究和教学人员的视角进行材料的选择和内容论述的。作者在著作本书的过程中，参考了大量的国外有关矩阵分析与线性代数的论文和著作，其中以 SIAM 的多种杂志为主要参考文献源；而应用的举例则主要参考 IEEE 的几家汇刊。虽然作者竭力而为，但囿于理解水平和能力，书中未能如愿乃至不妥，甚至错误之处可能不乏其例。在此，诚恳希望诸位专家、同仁和广大读者不吝赐教。

作者原本打算对《信号处理中的线性代数》一书作较大修改，最终变成了重写，始自本人在西安电子科技大学任特聘教授之际，完成于回到清华大学任教二年之后，历时四载有余。然而，本书系作者积十余年教学和二十余年科学研究之体会与成果而成，借此机会感谢教育部“长江学者奖励计划”、国家自然科学基金委重大研究项目和多个基金项目、教育部博士点专项基金、国防重点实验室基金、航天支撑技术基金以及 Intel 公司等的课题资助。

全书由笔者使用 LaTeX 撰写及排版。

张贤达

2004 年 6 月谨识于清华大学

目　录

第 1 章　矩阵与线性方程组

在科学与工程中，经常会遇到求解线性方程组的问题。矩阵是描述和求解线性方程组最基本和最有用的数学工具。矩阵不仅有很多基本的数学运算，如转置、内积、外积、逆矩阵、广义逆矩阵等，而且还有多种重要的标量函数，如行列式、范数、迹、秩。本章将介绍矩阵与线性方程组的基本知识，为后面各章全面介绍矩阵的分析及应用提供基础知识。

1.1　矩阵的基本运算

首先引出矩阵和向量的概念，给出本书中经常使用的基本符号。

1.1.1　矩阵与向量

在科学和工程中，经常会遇到 $m \times n$ 线性方程组

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \tag{1.1.1}$$

它使用 m 个方程描述 n 个未知量之间的线性关系。这一线性方程组很容易用矩阵一向量形式简记为

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{1.1.2}$$

式中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.1.3}$$

称为 $m \times n$ 矩阵，是一个按照长方阵列排列的复数或实数集合；而

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{1.1.4}$$

分别为 $m\times 1$ 向量和 $n\times 1$ 向量，是按照列方式排列的复数或实数集合，统称列向量。类似地，按照行方式排列的复数或实数集合称为行向量，例如

$$\boldsymbol{a}=[a_1,a_2,\cdots,a_n] \tag{1.1.5}$$

是 $1\times n$ 向量。

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以是线性系统、滤波器、无线信道等的符号表示；而科学和工程中遇到的向量可分为三种 [240]：

(1) 物理向量：泛指既有幅值，又有方向的物理量，如速度、加速度、位移等。

(2) 几何向量：为了将物理向量可视化，常用带方向的 (简称有向) 线段表示之。这种有向线段称为几何向量。例如，$\boldsymbol{v}=\overrightarrow{AB}$ 表示的有向线段，其起点为 A，终点为 B。

(3) 代数向量：几何向量可以用代数形式表示。例如，若平面上的几何向量 $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{AB}$ 的起点坐标 $A=(a_1,a_2)$，终点坐标 $B=(b_1,b_2)$，则该几何向量可以表示为代数形式 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \end{bmatrix}$。这种用代数形式表示的几何向量称为代数向量。

推而广之，多维空间的几何向量也可用代数形式表示。如无特殊申明，本书今后将以代数向量作为讨论对象。

根据元素取值种类的不同，代数向量又可分为以下三种：

(1) 常数向量：向量的元素全部为实常数或者复常数，如 $\boldsymbol{a}=[1,5,4]^{\mathrm{T}}$ 等。

(2) 函数向量：向量的元素包含了函数值，如 $\boldsymbol{x}=[1,x^2,\cdots,x^n]^{\mathrm{T}}$ 等。

(3) 随机向量：向量的元素为随机变量或者随机过程，如 $\boldsymbol{x}(n)=[x_1(n),x_2(n),\cdots,x_m(n)]^{\mathrm{T}}$，其中，$x_1(n),x_2(n),\cdots,x_m(n)$ 是 m 个随机过程或随机信号。

图 1.1.1 归纳了向量的分类。

$$\text{向量}\begin{cases}\text{物理向量}\\ \text{代数向量}\begin{cases}\text{常数向量}\\ \text{函数向量}\\ \text{随机向量}\end{cases}\\ \text{几何向量}\end{cases}$$

图 1.1.1 向量的分类

若令

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix} a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{m2}\end{bmatrix},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{a}_n=\begin{bmatrix} a_{1n}\\ a_{2n}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{bmatrix} \tag{1.1.6}$$

则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以用列向量记作

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n] \tag{1.1.7}$$