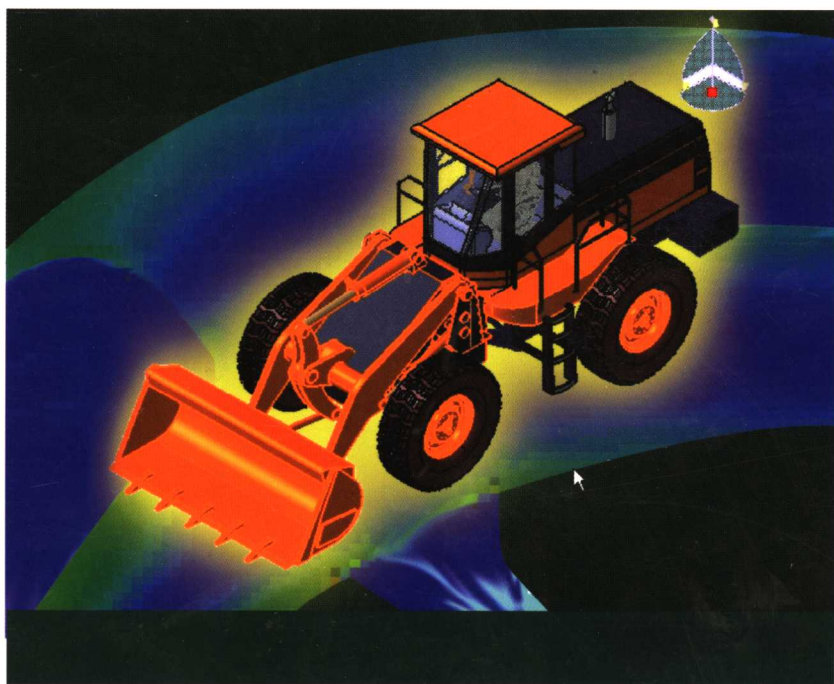


高秀华 王智明 王继新 等编著

附光盘

工程分析及电子样机模拟

—— CATIA V5 在工程实践中的应用



Chemical Industry Press



化学工业出版社
工业装备与信息工程出版中心

工程分析及电子样机模拟

——CATIA V5 在工程实践中的应用

高秀华 王智明 王继新 等编著



化学工业出版社
工业装备与信息工程出版中心

· 北京 ·

(京) 新登字 039 号

图书在版编目(CIP)数据

工程分析及电子样机模拟: CATIA V5 在工程实践中的应用 / 高秀华等编著. —北京: 化学工业出版社, 2004.8
ISBN 7-5025-6043-2

I. 工… II. 高… III. 机械设计: 计算机辅助设计—应用软件, CATIA V5 IV. TH122

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 097415 号

工程分析及电子样机模拟
——CATIA V5 在工程实践中的应用

高秀华 王智明 王继新 等编著

责任编辑: 任文斗

文字编辑: 廉 静

责任校对: 郑 捷

封面设计: 于 兵

*

化 学 工 业 出 版 社 出版发行
工业装备与信息工程出版中心

(北京市朝阳区惠新里 3 号 邮政编码 100029)

发行电话: (010) 64982530

[http: // www.cip.com.cn](http://www.cip.com.cn)

*

新华书店北京发行所经销

北京永鑫印刷有限责任公司印刷

三河市东柳装订厂装订

开本 787mm×1092mm 1/16 印张 19½ 字数 500 千字

2004 年 9 月第 1 版 2004 年 9 月北京第 1 次印刷

ISBN 7-5025-6043-2/TH·226

定 价: 47.00 元

版权所有 违者必究

该书如有缺页、倒页、脱页者, 本社发行部负责退换

前 言

企业要在激烈的市场竞争中立于不败之地，就必须不断地保持产品创新。CAD/CAM 是技术创新的关键手段。CATIA V5 是 IBM/DS 开发的个人计算机版本的高端 CAD/CAE 软件，CATIA 从产品的概念设计到最终产品的形成，以其精确可靠的解决方案提供了完整的 2D、3D 参数化建模、电子样机建立及数据管理手段，同时，作为一个完全集成化的软件系统，CATIA 将机械设计、工程分析仿真、数控加工及 CAT web 网上解决方案有机地结合在一起，为用户提供了严密的无纸工作环境，从而帮助客户达到缩短设计生产周期，提高质量，减少成本的目的。随着新的 CATIA 个人计算机版本（V5）的推出，许多世界级的汽车、航空航天、造船、电子等部门的企业广泛地采用了 CATIA V5。

目前，市场上有关 CATIA 这个应用软件的书籍仅有几种，而且只是针对建模、装配设计、曲面设计等模块的介绍，数字样机这个模块还没有涉及，而这个模块中的装配分析、空间分析、优化分析等单元又是工程技术人员迫切需要的知识。

本书对 CATIA V5 分析和仿真模块、数字样机模块的常用单元进行了详尽的介绍，从熟悉基本使用环境开始，介绍各个单元的高级功能。采用循序渐进的方式，结合范例对 CATIA V5 的常用单元进行了描述。

本书共分为 8 章，各部分的主要内容如下。

第 1 章 有限单元法基础，介绍有限单元法的基本概念，杆系结构单元、平面以及空间结构单元、轴对称单元、板壳单元以及结构动力学分析的有限单元法等。

第 2 章 创成式零件有限元分析。介绍 GPS 分析功能，包括模型管理工具、附加质量、定义约束、定义载荷、求解计算、结果分析等内容。

第 3 章 创成式装配部件结构有限元分析，介绍 GAS 分析过程，定义零部件之间的连接关系，添加连接特性等内容。

第 4 章 高级网格划分，介绍 CATIA V5 的高级网格划分方法。

第 5 章 电子样机漫游器，介绍电子样机漫游器基础、部件管理、仿真管理、视频动画管理、场景管理、2D 文件管理等内容。

第 6 章 电子样机运动机构模拟，介绍电子样机仿真的一般步骤、约束的类型及运动副的施加、电子样机运动模拟机构的建立、电子样机运动分析等内容。

第 7 章 电子样机空间分析，介绍样机测量、截面选取、干涉分析、产品比较等内容。

第 8 章 电子样机的优化，介绍电子样机优化一般概念、交互式图形的管理等内容。

本书由高秀华、王智明、王继新、王云超、姜国庆编著，参加编写工作的人员还有马利军、杨文志、廉伟东、平海涛、龙浩、郑振涛、王博、葛艳霞、王妍静、杨永海、郭建华、黄大巍、李炎亮、蔡世伟、孙凯、杨彬、谢春山、王育民、王雪等。全书由王云超、姜国庆统稿。

本书由丁树奎主审。

本书在编写的过程中得到了各界同仁和朋友的大力支持、鼓励和帮助，并参阅了 CATIA 在线帮助的相关资料，在此一并致谢！

由于时间仓促，书中纰漏与错误之处在所难免，敬请读者批评指正。

作 者

2004 年 6 月于吉林大学

内 容 提 要

CATIA V5 是 IBM/DS 开发的个人计算机版本的高端 CAD/CAE 软件,其分析仿真模块和数字样机模块功能强大且方便使用。本书结合大量实例按照循序渐进的方式,首先介绍了工程分析常用工具——有限单元法的基本知识,然后介绍了 CATIA 中的创成式零件有限单元、创成式装配部件的有限单元分析、高级网格划分工具、电子样机漫游器、电子样机运动机构模拟、电子样机空间分析和电子样机优化。本书还附有 CD 光盘一张,供读者熟练掌握 CATIA 软件使用。

本书可作为从事机械制造、石油化工、轻工、造船、航空航天、汽车交通、电子、土木工程、水利、铁道、日用家电、生物医学等专业的科学研究人员和工程技术人员进行工程设计的参考书。也可作为高校相关专业的高年级本科生、研究生及教师的使用教材,以及学习 CATIA 软件的培训教材。

第 1 章 有限单元法基础

工程结构造型设计的目的归根结底是为了应用于工程实践，满足于工程实践的要求，因而工程结构的设计除了要求结构设计合理、可实现之外，必须具有足够的强度、刚度和稳定性能。如今由于结构的复杂性和大型化，传统的设计与验证方法已经满足不了设计的要求。

自 20 世纪 70 年代以来随着计算机的出现，现代设计方法如 CAD、优化设计、有限单元法以及三维动态设计等应运而生，解决了传统的设计方法无法解决的或难以解决的工程实际问题。求解工程问题可以用解析解和数值方法，但复杂的工程问题通常是得不到解析解的，只能依靠数值方法得出足以满足工程需要的解答。有限单元法借助于矩阵分析求解联立代数方程组，是解决工程和数学物理问题十分有效的数值分析与计算方法。

有限单元法首先应用于航空工程，由于其方法的有效性，迅速被推广应用于机械工程的结构分析中。随着电子计算机的发展而从固体力学领域扩展到流体力学、传热学、电磁学、生物工程学、声学以及振动学等领域。

1.1 有限单元法的基本概念

有限单元法是借助于电子计算机解决工程问题的近似方法。它运用离散的概念，把整个求解域离散成为有限个单元（子域），如图 1.1 所示。并利用单元（子域）的力学特性，经数学规划后，得到一个表征整个求解域问题的线性方程组，由此得到数值解答的数值分析与计算方法。

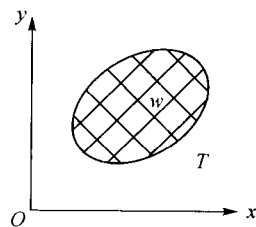


图 1.1 求解区域单元的离散图

有限单元法按照其推导方法可以分成三大类型。

(1) 直接刚度法

直接刚度法简称为直接法。它是根据单元的物理意义，建立有关场变量表示的单元性质方程。例如，利用虚功原理直接将这单元方程集合而形成整个求解域的控制方程。这种方法的优点是推导直观、易于理解，广泛应用于固体力学求解运算中。但缺点是单元特征分析

中要引入结点力的概念及结点平衡条件，不易直接推广到流场、温度场等非结构问题中。

(2) 变分法

变分法直接从求解泛函的极值问题入手，把泛函的极值问题规划成线性代数方程组，然后求其近似解的一种计算方法。它是从里兹法（Ritz Method）的基础上发展变化而来的。有限单元变分法与里兹法实质上相同，两者主要不同点在于前者假设的坐标函数不需要满足整个求解域，只需要满足离散后的单元（子域）。所以变分法对坐标函数的选取比里兹法容易。由于引入了离散化的概念，对复杂求解域可以用单元的简单形状集合而成，可以解决实际工程中提出的各类复杂的问题。

(3) 加权余量法

对于某些工程问题，相应的泛函难以得到，或者根本不存在相应的泛函时，则无法采用变

分法。加权余量法则直接从控制方程中得到有限单元方程，是一种近似解法，如温度场求解。

加权余量法基本上包括两个解题步骤。首先设定一个近似函数，使它的性态近似满足给定的微分方程和边界条件。将该近似函数代入原始微分方程和边界条件中，这样产生一个误差，该误差称为余量。让这个余量在整个求解域平均值为零，即选取一组线性独立的余量加权函数 W_i ，使之在整个求解域 Ω 满足

$$\int_{\Omega} RW_i dw = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

这样，在某种平均意义上，认为余量 $R \approx 0$ 。

有限单元法解题步骤一般如下所述。

(1) 待求解域离散化

将求解域或连续体划分成以单元（子域）表示的组合体。单元和单元之间以结点相连。

(2) 选择插值函数

选择适当的插值函数以表达单元内的场变量的变化规律。场变量可以是标量、向量或者高阶张量。常数多项式为场变量的近似表达式，多项式的阶数取决于单元的结点数、结点的自由度，以及单元间边界的变量的协调性等。场变量以及其导数都可以作为结点的未知量。

(3) 形成单元性质的矩阵方程

利用有限单元法的不同解法，求出表达单个单元性质的矩阵方程。

(4) 形成整体系统的矩阵方程

综合求解域上所有的单元性质矩阵方程，形成整体系统的矩阵方程。

(5) 约束处理，求解系统方程

利用系统矩阵方程建立求解方程组，引入边界条件，即约束处理，求解出结点上的未知场变量。

(6) 其他参数计算

利用已求出的场变量，计算一些其他所希望的参数。例如，对于一个流场解出压力分布后，还要计算流体边界上所受到的合力等。

1.2 杆系结构静力分析的有限单元法

本节介绍杆系结构静力分析的有限单元法的目的，旨在让读者在做工程结构分析时，对有限单元法有比较整体的、系统的概念。同时也便于读者由浅入深地了解、掌握有限单元法的基本原理和过程。

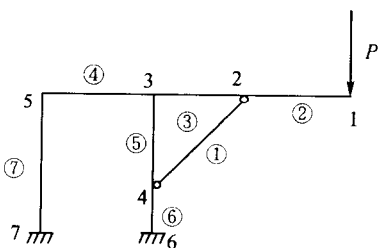


图 1.2 杆系结构离散化示意图

工程上许多由金属构件所组成的结构，如起重机起重臂架、塔式桁构支撑架等可以归结为杆系结构。杆系结构按各杆轴线及外力作用线在空间的位置分为平面杆系和空间杆系结构。杆系结构可以由杆单元、梁单元组成。由于杆系结构本身是由真实杆件连接而成，故离散化比较简单。一般将每一根杆件作为一个单元，杆件与杆件相连接的交点称为结点（见图 1.2），杆件的自由端、集中载荷作用点、支撑点以及沿杆长截面突变处等均可设置成结点。如若提高计算精度，也可以在杆件中间增加结点。

杆系结构中各个单元的轴线方向大多不一致，难以直接表征单元的物理特性，故在做单元

分析时，需要建立各单元的局部坐标系 (x, y, z) 。一般规定局部坐标系的 x 轴与单元的截面形心轴重合，坐标原点取在杆件的 i 点。从 i 点到 j 点的方向为正， y, z 轴以右手法则定出。

为了建立结构的平衡条件，对结构进行整体分析，尚需要建立一个对每个单元都适用的统一坐标系，即结构坐标系或整体坐标系 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ，如图 1.3 所示。

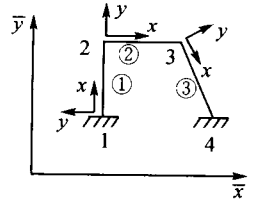


图 1.3 坐标系示意图

力学向量的规定如下。

当线位移及相应力与坐标轴方向一致时为正，反之为负；转角位移和力矩，按右手法则定出的向量方向若与坐标轴正向相一致时为正。对于任意方向的力学向量，应分解为沿坐标轴方向的分量。

为了便于理解和说明，下面以图 1.4 (a) 所示平面刚架为例来说明杆系结构的有限单元法的基本原理。

在平面刚架中，可将单元视为处于轴向拉压和平面弯曲的组合变形状态。任意结点 i 有 3 个自由度：沿单元轴线方向的位移 u_i 、垂直于单元轴线的横向位移 v_i 及绕 z 轴的截面转角 θ_i ，其相应的结点力分量分别为轴向力 U_i 、剪力 V_i 和弯矩 M_i 。如图 1.4 (b) 所示。

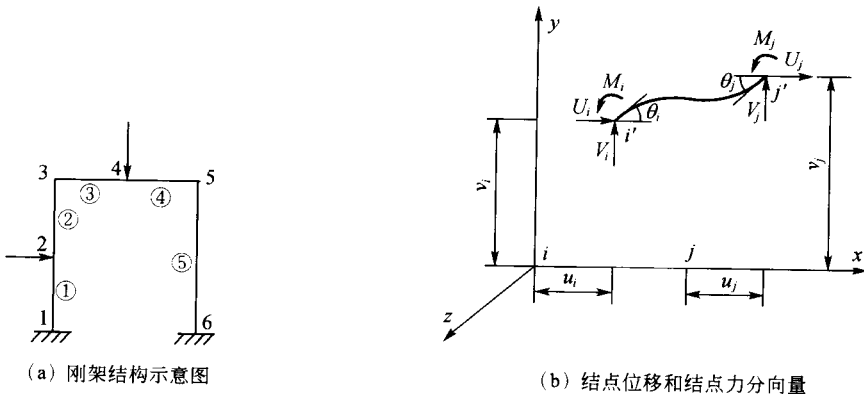


图 1.4 平面刚架分析示意图

结点位移列向量和结点力向量分别表示为

$$\{\delta\}^e = [\delta_i^T \quad \delta_j^T]^T = [u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j]^T$$

$$\{F\}^e = [F_i^T \quad F_j^T]^T = [U_i \quad V_i \quad M_i \quad U_j \quad V_j \quad M_j]^T$$

1.2.1 位移函数

1.2.1.1 轴向拉压杆单元的位移函数

为了用虚功原理导出单元结点力与单元结点位移之间的转换关系，即求出单元刚度矩阵，需假定单元的位移函数。为了保证解的收敛性，选用的位移函数应当满足下列要求。

- ① 单元位移函数的项数，至少应等于单元的自由度数。
- ② 单元的刚体位移状态和应变状态应当全部包含在位移函数中。
- ③ 单元的位移函数应保证相邻单元在公共边界处的位移连续性。

由于杆单元两结点位移为 u_i, u_j ，故其位移函数可设为含有两个待定系数 α_1 和 α_2 多项式。

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x \tag{1.1}$$

由单元结点位移，确定待定系数项

当 $x=0$ 时， $u=u_i$

当 $x=l$ 时， $u=u_j$

则有

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= u_i \\ \alpha_2 &= \frac{u_j - u_i}{l} \end{aligned} \quad (1.2)$$

将式 (1.2) 代入式 (1.1)，整理后得出单元内任意一点的位移，用结点位移表示

$$u(x) = N_{iu}u_i + N_{ju}u_j \quad (1.3)$$

其中

$$N_{iu} = 1 - \frac{x}{l}, \quad N_{ju} = \frac{x}{l} \quad (1.4)$$

分别表示当 $u_i=1, u_j=0$ 时和 $u_i=0, u_j=1$ 时的单元内的轴向位移状态，故称为轴向位移形函数。

1.2.1.2 梁单元平面弯曲的位移函数

梁单元平面弯曲仅考虑结点的 4 个位移分量 $v_i, \theta_i, v_j, \theta_j$ ，由材料力学知各截面的转角

$$\theta = \frac{dv}{dx}$$

故梁单元平面弯曲的位移表达式可分为仅包含 4 个待定系数 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 的多项式

$$v(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \beta_4 x^3$$

同样，根据单元结点位移条件可将上述 4 个待定系数求出，并整理得出

$$v(x) = N_{iv}v_i + N_{i\theta}\theta_i + N_{jv}v_j + N_{j\theta}\theta_j \quad (1.5)$$

其中形函数表为

$$\left. \begin{aligned} N_{iv} &= 1 - \frac{3}{l^2}x^2 + \frac{2}{l^3}x^3 \\ N_{i\theta} &= x - \frac{2}{l}x^2 + \frac{1}{l^2}x^3 \\ N_{jv} &= \frac{3}{l^2}x^2 - \frac{2}{l^3}x^3 \\ N_{j\theta} &= -\frac{1}{l}x^2 + \frac{1}{l^2}x^3 \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

将式 (1.3) 和式 (1.5) 合并写成矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{iu} & 0 & 0 & N_{ju} & 0 & 0 \\ 0 & N_{iv} & N_{i\theta} & 0 & N_{jv} & N_{j\theta} \end{bmatrix} \{\delta\}^e \quad (1.7)$$

简写成

$$\{f\} = [N] \{\delta\}^e$$

1.2.2 单元的应力和应变

在弹性范围内，并且不考虑剪力的影响时，平面刚架单元内任一点的轴向线应变为

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} - y \frac{d^2v}{dx^2} \quad (1.8)$$

即

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = & -\frac{1}{l}u_i - y\left(\frac{-6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x\right)v_i - y\left(\frac{-4}{l} + \frac{6}{l^2}x\right)\theta_i + \\ & \frac{1}{l}u_j - y\left(\frac{6}{l^2} - \frac{12}{l^3}x\right)v_j - y\left(\frac{-2}{l} + \frac{6}{l^2}x\right)\theta_j \end{aligned} \quad (1.9)$$

写成矩阵的形式

$$\varepsilon_x = \left[-\frac{1}{l} - y\left(\frac{-6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x\right) - y\left(\frac{-4}{l} + \frac{6}{l^2}x\right) + \frac{1}{l} - y\left(\frac{6}{l^2} - \frac{12}{l^3}x\right) - y\left(\frac{-2}{l} + \frac{6}{l^2}x\right) \right] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

简写成

$$\varepsilon_x = [B] \{\delta\}^e \quad (1.10)$$

其中

$$[B] = \left[-\frac{1}{l} - y\left(\frac{-6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x\right) - y\left(\frac{-4}{l} + \frac{6}{l^2}x\right) + \frac{1}{l} - y\left(\frac{6}{l^2} - \frac{12}{l^3}x\right) - y\left(\frac{-2}{l} + \frac{6}{l^2}x\right) \right] \quad (1.11)$$

$[B]$ 为平面刚架梁单元的应变转换矩阵。

由虎克定律, 可得平面刚架梁单元的轴向应力

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E[B]\{\delta\}^e$$

1.2.3 平面刚架梁单元的刚度矩阵

设想如图 1.4 (b) 所示梁单元的 i 、 j 结点发生虚位移为

$$\{\delta^*\}^e = [u_i^* \quad v_i^* \quad \theta_i^* \quad u_j^* \quad v_j^* \quad \theta_j^*]^T \quad (1.12)$$

单元内相应的虚应变应为

$$\{\varepsilon_x^*\} = [B]\{\delta^*\}^e \quad (1.13)$$

由虚功原理有

$$\begin{aligned} \left(\{\delta^*\}^e\right)^T \{F\}^e &= \iiint_V \{\varepsilon_x^*\}^T \{\sigma_x\} dx dy dz \\ &= \left(\{\delta^*\}^e\right)^T \iiint_V [B]^T E [B] dx dy dz \{\delta\}^e \end{aligned}$$

由于结点虚位移 $\{\delta^*\}^e$ 的任意性, 故上式可写成

$$\{F\}^e = \iiint_V [B]^T E [B] dx dy dz \{\delta\}^e = [k]^e \{\delta\}^e \quad (1.14)$$

其中

$$[k]^e = \iiint_V [B]^T E [B] dx dy dz \quad (1.15)$$

称为局部坐标下平面刚架单元的刚度方程。在积分时有下列关系

横截面积 A $A = \iint_A dy dz$

横截面对形心轴 z 的静矩 S $S = \iint_A y dy dz = 0$

横截面对主惯性轴 z 的惯性矩 I $I = \iint_A y^2 dy dz$

积分后，得出 4 个 3×3 子块所组成的局部坐标系下的平面刚架梁单元的单元刚度矩阵。

$$[k]^e = \begin{bmatrix} k_{ii}^e & k_{ij}^e \\ k_{ji}^e & k_{jj}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{-12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{l^3} & \frac{-6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{-6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

1.2.4 坐标变换及单元刚度矩阵

在整体坐标系中单元结点力向量和结点位移列向量可分别表示成

$$\{F\}^e = [\bar{X}_i \quad \bar{Y}_i \quad \bar{M}_i \quad \bar{X}_j \quad \bar{Y}_j \quad \bar{M}_j]^T$$

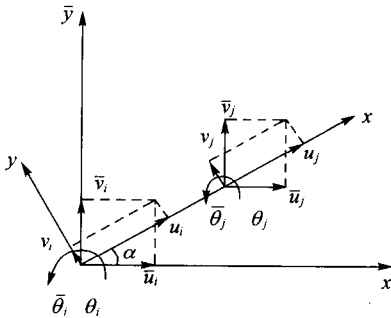
$$\{\delta\}^e = [\bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{\theta}_i \quad \bar{u}_j \quad \bar{v}_j \quad \bar{\theta}_j]^T$$

如图 1.5 所示，设整体坐标系与局部坐标系的夹角为 α ，则有

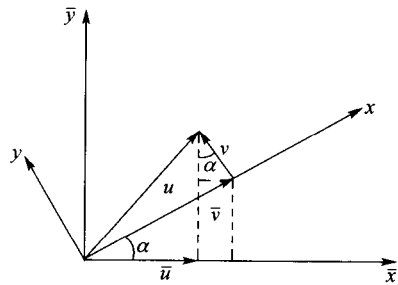
$$\bar{u} = u \cos \alpha - v \sin \alpha$$

$$\bar{v} = u \sin \alpha + v \cos \alpha$$

$$\bar{\theta} = \theta$$



(a) 向量转换



(b) 向量转换分析

图 1.5 向量转换示意图

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (1.17)$$

可简写为

$$\{\bar{\delta}\}^e = [T]\{\delta\}^e \quad (1.18)$$

同理

$$\{\bar{F}\}^e = [T]\{F\}^e \quad (1.19)$$

[T]称为平面刚架梁单元的从局部坐标系向整体坐标系的转换矩阵。

将式(1.14)代入到式(1.19)中,并考虑[T]是正交矩阵的特点,则有

$$\{\bar{F}\}^e = [T][k]^e [T]^{-1} \{\bar{\delta}\}^e = [T][k]^e [T]^T \{\bar{\delta}\}^e = [\bar{k}]^e \{\bar{\delta}\}^e \quad (1.20)$$

式中, [k]^e即为整体坐标下的单元刚度矩阵。

$$[\bar{k}]^e = [T][k]^e [T]^T \quad (1.21)$$

无论是 [k]^e 还是 [\bar{k}]^e 均是对称阵, 并且为奇异阵。

1.2.5 整体刚度矩阵的求解

如图 1.6 所示, 设其载荷列向量为

$$\begin{aligned} \{\bar{P}\} &= [\bar{P}_1 \quad \bar{P}_2 \quad \bar{P}_3 \quad \bar{P}_4]^T \\ &= [\bar{P}_{1x} \quad \bar{P}_{1y} \quad \bar{M}_1 \quad \bar{P}_{2x} \quad \bar{P}_{2y} \quad \bar{M}_2 \quad \bar{P}_{3x} \quad \bar{P}_{3y} \quad \bar{M}_3 \quad \bar{P}_{4x} \quad \bar{P}_{4y} \quad \bar{M}_4]^T \end{aligned}$$

{P}应包括结点载荷及等效结点载荷。

根据结点的平衡条件可以得到结构的整体刚度方程

$$[\bar{K}]\{\bar{\delta}\} = \{\bar{P}\} \quad (1.22)$$

结点位移列向量

$$\begin{aligned} \{\bar{\delta}\} &= [\bar{\delta}_1 \quad \bar{\delta}_2 \quad \bar{\delta}_3 \quad \bar{\delta}_4]^T \\ &= [\bar{u}_1 \quad \bar{v}_1 \quad \bar{\theta}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{\theta}_2 \quad \bar{u}_3 \quad \bar{v}_3 \quad \bar{\theta}_3 \quad \bar{u}_4 \quad \bar{v}_4 \quad \bar{\theta}_4]^T \end{aligned}$$

首先建立结点平衡条件方程式。

$$\text{对于结点 1} \quad \begin{Bmatrix} \bar{X}_1^1 \\ \bar{Y}_1^1 \\ \bar{M}_1^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_{1x} \\ \bar{P}_{1y} \\ \bar{M}_1 \end{Bmatrix} \quad \text{即} \quad \{\bar{F}_1^1\} = \{\bar{P}_1\}$$

$$\text{对于结点 2} \quad \begin{Bmatrix} \bar{X}_2^1 \\ \bar{Y}_2^1 \\ \bar{M}_2^1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{X}_2^2 \\ \bar{Y}_2^2 \\ \bar{M}_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_{2x} \\ \bar{P}_{2y} \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix} \quad \text{即} \quad \{\bar{F}_2^1\} + \{\bar{F}_2^2\} = \{\bar{P}_2\}$$

$$\text{对于结点 3} \quad \{\bar{F}_3^2\} + \{\bar{F}_3^3\} = \{\bar{P}_3\}$$

$$\text{对于结点 4} \quad \{\bar{F}_4^3\} = \{\bar{P}_4\}$$

用分块矩阵的形式, 建立杆端内力与结点位移的关系式。

$$\text{对于杆元①有} \quad \begin{Bmatrix} \bar{F}_1^1 \\ \bar{F}_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{11}^1 & \bar{k}_{12}^1 \\ \bar{k}_{21}^1 & \bar{k}_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \end{Bmatrix}$$

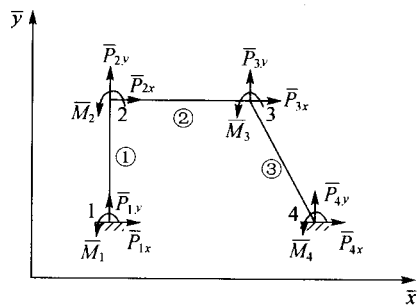


图 1.6 载荷向量示意图

对于杆元②有

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_2^2 \\ \bar{F}_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{22}^2 & \bar{k}_{23}^2 \\ \bar{k}_{32}^2 & \bar{k}_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_2 \\ \bar{\delta}_3 \end{Bmatrix}$$

对于杆元③有

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_3^3 \\ \bar{F}_4^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{33}^3 & \bar{k}_{34}^3 \\ \bar{k}_{43}^3 & \bar{k}_{44}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_3 \\ \bar{\delta}_4 \end{Bmatrix}$$

将杆端内力与结点位移关系式代入结点的平衡条件方程式中，经整理得

$$\begin{bmatrix} \bar{k}_{11}^1 & \bar{k}_{12}^1 & 0 & 0 \\ \bar{k}_{21}^1 & \bar{k}_{22}^1 + \bar{k}_{22}^2 & \bar{k}_{23}^2 & 0 \\ 0 & \bar{k}_{32}^2 & \bar{k}_{33}^2 + \bar{k}_{33}^3 & \bar{k}_{34}^3 \\ 0 & 0 & \bar{k}_{43}^3 & \bar{k}_{44}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \\ \bar{\delta}_3 \\ \bar{\delta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \bar{P}_4 \end{Bmatrix}$$

此式即为式 (1.22) 的分块矩阵表达式。整体刚度矩阵 $[\bar{K}]$ 通过刚度集成法表示为

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} \bar{k}_{11}^1 & \bar{k}_{12}^1 & 0 & 0 \\ \bar{k}_{21}^1 & \bar{k}_{22}^1 + \bar{k}_{22}^2 & \bar{k}_{23}^2 & 0 \\ 0 & \bar{k}_{32}^2 & \bar{k}_{33}^2 + \bar{k}_{33}^3 & \bar{k}_{34}^3 \\ 0 & 0 & \bar{k}_{43}^3 & \bar{k}_{44}^3 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

整体刚度矩阵为对称阵、奇异阵及稀疏阵。故整体刚度矩阵不能求逆，必须做约束处理方能正确地将结点位移求出，进而求出结构的应力场。

约束处理

$$[\bar{K}] \{\bar{\delta}\} = \{\bar{P}\}$$

即

$$\begin{bmatrix} \bar{k}_{22}^1 + \bar{k}_{22}^2 & \bar{k}_{23}^2 \\ \bar{k}_{32}^2 & \bar{k}_{33}^2 + \bar{k}_{33}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_2 \\ \bar{\delta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix}$$

求出位移 $\{\bar{\delta}\}$ 之后，即可以求出结构的应力场 $\{\sigma\}$ 。

用有限单元法计算空间刚架结构，其原理及推导过程与计算平面刚架结构相同。在此不再重复。但应注意到，由于空间的每一结点一般具有 6 个自由度，故计算较为复杂。

1.3 平面结构的有限单元法

1.3.1 平面结构问题的分类

弹性力学研究的问题可以分为空间及平面两大类。严格地说，任何弹性体都是处于三维受力状态，因而都是空间问题，但是在一定条件下，许多空间问题都可以简化成平面问题，从而可以大大减少计算工作量。

平面问题可以分为两类：平面应力问题和平面应变问题。

1.3.1.1 平面应力问题

如图 1.7 所示的深梁结构，其厚度方向的尺寸远比其他两个方向的尺寸小得多，可视为一薄板。它只承受作用在其平面内的载荷，且沿厚度方向不变，计算时以中性面为研究对象。

一般设中平面为 xy 坐标面，以垂直于中平面的任一直线为 z 轴。其力学特点是

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = 0, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0,$$

但是

$$\varepsilon_z \neq 0$$

平面应力问题的应力应变转换矩阵即弹性矩阵为

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

1.3.1.2 平面应变问题

图 1.7 (b) 所示为一圆形涵洞的横截面，其长度方向上的尺寸远比其他两个方向上的尺寸大得多。同样，载荷作用在 xy 坐标面内，且沿 z 轴方向均匀分布。其力学特点是

$$\varepsilon_z = 0, \quad \gamma_{xz} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0$$

但一般情况下

$$\sigma_z \neq 0$$

平面应变问题的弹性矩阵只需将式 (1.24) 中的 E 换成 $\frac{E}{1-\mu^2}$ ， μ 换成 $\frac{\mu}{1-\mu}$ 即可。

$$[D] = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix}$$

无论是平面应力问题还是平面应变问题的应力 $\{\sigma\}$ 与应变 $\{\varepsilon\}$ 之间的关系均为

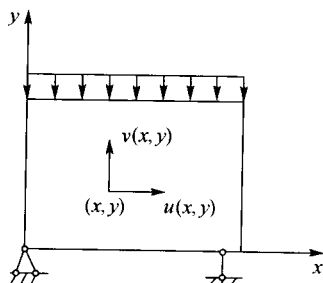
$$\{\sigma\} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) \quad (1.25)$$

其中

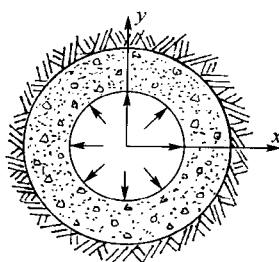
$$\{\sigma\} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T$$

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_{xy}]^T$$

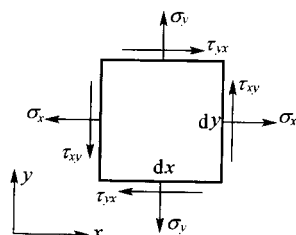
$\{\varepsilon_0\}$ 为初应变



(a) 平面应力问题



(b) 平面应变问题



(c) 平面问题应力状态

图 1.7 平面问题

1.3.2 平面问题的离散化

在弹性力学平面问题中用以离散的单元形式有很多种，如图 1.8 所示。

图 1.9 (a) 所示为带有椭圆孔的平板，在均匀拉伸作用下的应力集中问题。图 1.9 (b) 是利用结构的对称性，采用三结点三角形单元而离散后的力学模型，各单元之间以结点相连。

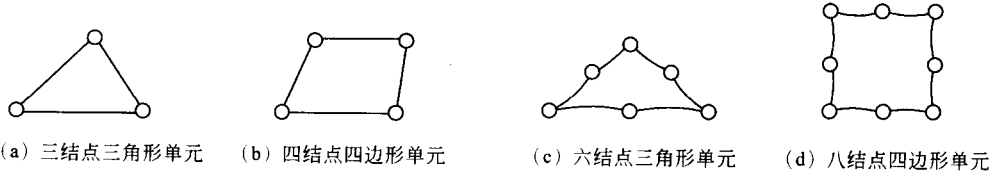


图 1.8 平面问题单元的主要类型

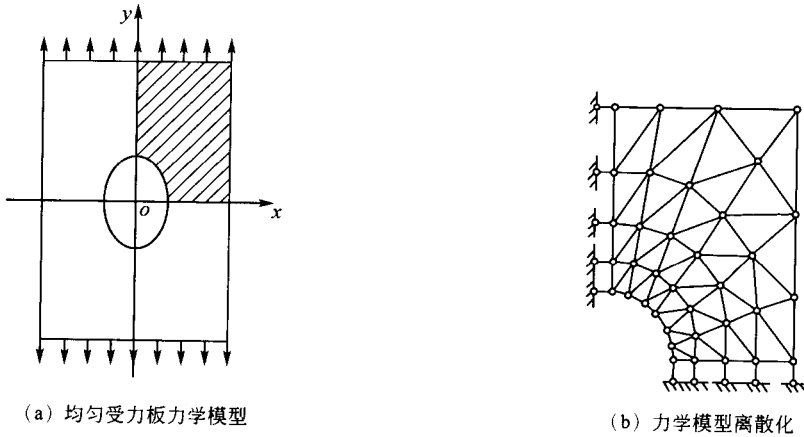


图 1.9 平面问题有限单元法的计算力学模型

1.3.3 平面三结点三角形单元

平面问题常采用三角形单元，三角形单元比较适应于模拟有曲线边界的结构。

1.3.3.1 位移函数

对于一个复杂的弹性体，要想用某种函数来描述结构整体内部任一点的位移是不大可能的。但是，如果把弹性体离散成有限个单元体，而且单元很小时，就很容易利用其结点的位移，构造出单元的位移插值函数。

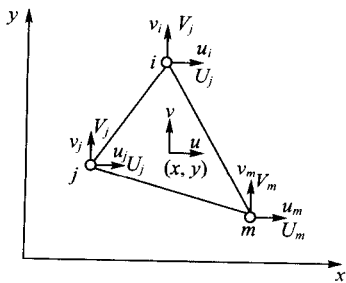


图 1.10 三角形单元

图 1.10 所示为任一三角形单元。其顶点为结点，结点编号为 i, j, m 。每个结点在平面内存在沿 x 轴和 y 轴的位移 u, v ，单元的 3 个结点共有 6 项位移分量。单元内任一点 (x, y) 的位移 $u(x, y), v(x, y)$ 可假设为坐标 x, y 的某种函数，即选用适当的位移函数。

其位移函数的一般表达式为

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= a_1 + a_2x + a_3y \\ v(x, y) &= a_4 + a_5x + a_6y \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

式 (1.26) 可写成矩阵形式，即

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (1.27)$$

可简写为 $\{f\} = [M]\{a\}$

其中, $\{a\}$ 称为位移参数, 为 6 个待定系数所构成的列向量。而 $[M]$ 为 2×6 的函数矩阵, 其元素是位移参数 $\{a\}$ 中的各项元素的函数。

由于式 (1.26) 的位移函数适用于单元中的任意一点, 所以代入 3 个结点的坐标后, 得出结点处位移函数为

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix}$$

简写为 $\{\delta\}^e = [A]\{a\}$ (1.28)

式中, $\{\delta\}^e$ 为 e 单元结点位移列向量; $[A]$ 为与 e 单元结点坐标有关的已知系数矩阵, 为 6×6 阶方阵。

1.3.3.2 形函数矩阵

由式 (1.28) 解出

$$\{a\} = [A]^{-1}\{\delta\}^e \quad (1.29)$$

$$[A]^{-1} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} a_i & 0 & a_j & 0 & a_m & 0 \\ b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ c_i & 0 & c_j & 0 & c_m & 0 \\ 0 & a_i & 0 & a_j & 0 & a_m \\ 0 & b_i & 0 & b_j & 0 & b_m \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

式中, Δ 为三角形面积, 当三角形单元结点 i, j, m 按逆时针次序排列时, 则有

$$\Delta = \frac{1}{2}|\Delta| = \frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_m + x_m y_i) - \frac{1}{2}(x_j y_i + x_m y_j + x_i y_m)$$

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_m & y_m \end{vmatrix} = x_j y_m - x_m y_j \\ b_i &= -\begin{vmatrix} 1 & y_j \\ 1 & y_m \end{vmatrix} = y_j - y_m \\ c_i &= \begin{vmatrix} 1 & x_j \\ 1 & x_m \end{vmatrix} = x_m - x_j \end{aligned} \right\} \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{matrix} \begin{matrix} i, j, m \\ i, j, m \end{matrix} \quad (1.31)$$

其中, 记号 $\overleftrightarrow{i, j, m}$ 表示将式 (1.31) 中 i, j, m 进行轮换后可得出另外两组 a, b, c 的公式。