大学课程
辅导与应试
系列丛书

●南北名校联合 ●四方名师打造 ●天下名品汇粹

经济类高等数学
课程学习及考研辅导

陆全 主编

- 重点难点
- 典题例题
- 真题解析
- 强化训练

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

大学课程辅导与应试系列丛书

经济类高等数学
课程学习及考研辅导

陆 全 主编
陆 全 刘 哲 编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是高等学校经济类高等数学的同步教学辅导书.其特色是按专题(共132个专题)分类讲解典型例题,按章介绍考试要求、考点研究、重点难点以及真题解析、错误剖析、知识结构,按节(与教学同步)设置知识网络、释疑解难、典型例题、基础训练、强化训练、点拨与答案等栏目,揭示了高等数学的解题规律,使学生举一反三,融汇贯通.

本书适宜初学经济类高等数学的读者阅读,特别适宜期末复习备考和报考经济类硕士研究生的考生作为备考资料,亦可供数学教师教学参考.

图书在版编目(CIP)数据

经济类高等数学课程学习及考研辅导/陆全主编.
—天津:天津大学出版社,2004.3
ISBN 7-5618-1916-1

Ⅰ.经… Ⅱ.陆… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第013916号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨风和
地　　址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
网　　址 www.tjup.com
电　　话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742
印　　刷 河北省昌黎县人民胶印厂
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 170mm×240mm
印　　张 14.5
字　　数 439千
版　　次 2004年3月第1版
印　　次 2004年3月第1次
印　　数 1—4 000
定　　价 19.00元

大学课程辅导与应试系列丛书
编纂指导委员会

（按姓氏笔画排列）

前　言

经济类高等数学是高等学校经济类专业的核心课程之一，也是经济类硕士研究生入学考试的必考科目．为了帮助读者学好这门课程，我们根据多年的教学经验编写了《经济类高等数学课程学习及考研辅导》这本书．该书紧扣教材内容，与教学同步，又能反映当前期末考试及研究生入学考试的特点与动向，是大学生学好这门课程及考研复习的良师益友．

本书分为9章，每章均由以下三部分组成．

一、考试要求、考点研究、重点难点

编写此部分内容的目的是明确每章考试大纲的要求，指出本章的重点、难点与考点，帮助考生宏观了解每章内容的范围与侧重点，以利于系统学习．

二、知识网络、释疑解难、专题归类

每章分为若干节(与教学次序相同)，并设置一节为综合问题．每节设"知识网络"、"释疑解难"、"典型例题"、"基础训练"、"强化训练"及"点拨与答案"等栏目．

[知识网络]概括本节所对应教材内容中的知识要点．

[释疑解难]剖析教与学中的难点问题．

[典型例题]编写特点是按专题分类讲解(共132个专题)．通过典型例题，介绍解题思路、方法与技巧，并给予引导性的归纳总结．

[基础训练]配制一定量的练习题，通过多种题型，检查学生对本节基本知识掌握的程度．

[强化训练]这部分练习题有一定难度与综合性，可帮助学生对所学知识较全面、深入地理解掌握，达到课程的较高要求．

[点拨与答案]给出习题答案，并对较难的题给出了提示或简解．

三、真题解析、错误剖析、知识结构

这部分按章介绍历年经济类考研真题(约150题)，均放在章末，作为最后一节．这一节分析所涉及的知识点及解题要点，帮助学生走近考研状态；指出学生在运用基本概念、基本理论、基本方法时易犯的错误及产生错误的原因，使学生对三基(即基本概念、基本理论、基本方法)内容能正确地理解与运用，最后按章给出知识结构图．

本书可作为高等学校经济类高等数学的同步教学参考书，也可作为经济类考研应试者考研复习、强化训练的指导书．

本书的第1章至第6章由陆全编写，第7章至第9章由刘哲编写，陆全统稿．

由于水平所限，加之时间仓促，书中疏漏与不妥之处，恳请读者批评指正．

编　者

2003年6月于西北工业大学

目　　录

第1章 函数、极限与连续

[考试要求][1]

1.理解[2]函数的概念,掌握函数的表示法,会建立简单应用问题的函数关系.

2.了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3.理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念.

4.掌握基本初等函数的性质及图形,理解初等函数的概念.

5.了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念.

6.理解无穷小的概念和基本性质,掌握无穷小的比较方法.了解无穷大的概念及其与无穷小的关系.

7.了解极限的性质与极限存在的两个准则,掌握极限四则运算法则,会应用两个重要极限.

8.理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.

9.了解连续函数的性质和初等函数的连续性,了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)及其简单应用.

注 本章数学四与数学三考试要求相同.

[考点研究]

1.求极限或已知极限来确定极限式中的常数.

2.比较无穷小阶的高低或已知两无穷小为同阶(或等价或高阶),确定其中参数.

3.函数连续与间断点的判断,特别是由分段函数在分段点处的连续性确定参数.

4.讨论连续函数零点的个数(即方程实根的个数).

5.求函数定义域及函数的复合,特别是分段函数的复合.

应注意极限问题及闭区间上连续函数的性质与其他知识的综合问题.

[重点难点]

本章的重点是极限问题,复合函数,无穷小量,函数的连续性概念.

本章的难点是闭区间上连续函数的性质,极限存在的两个准则,建立应用问题中的函数关系式.

1.1 函　数

[知识网络]

函数概念
- 函数,分段函数,反函数,复合函数.
- 基本初等函数,初等函数.
- 总成本函数,总收入函数,总利润函数.
- 需求函数,供给函数.

---

① 本考试要求出自全国硕士研究生入学统一考试数学三考试大纲.

② 请读者注意体会考试要求中"理解"、"了解"、"掌握"、"会"等用词的区别.

$$\text{常见的函数形式}\begin{cases}\text{初等函数}. \\ \text{由极限确定的函数}\quad f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}g(x,n). \\ \text{隐函数}\quad F(x,y)=0\quad(\text{第 2 章}). \\ \text{由变限积分确定的函数}\quad y=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(t)\mathrm{d}t\quad(\text{第 5 章}). \\ \text{由函数项级数确定的函数}\quad S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)\quad(\text{第 7 章}).\end{cases}$$

$$\text{函数性质}\begin{cases}\text{有界函数 } f(x)\text{:存在 } M>0\text{,使 }|f(x)|\leqslant M, x\in X\subset D. \\ \text{单调增加(减少)函数 } f(x): x_1<x_2\text{ 时,}f(x_1)<(>)f(x_2), x_1,x_2\in I\subset D. \\ \text{偶(奇)函数 } f(x): f(-x)=f(x)(f(-x)=-f(x)), x\in[-a,a]. \\ \text{周期函数 } f(x)\text{:存在 } T>0\text{,使 } f(x+T)=f(x), x, x+T\in D.\end{cases}$$

[释疑解难]

1. 怎样判断两函数是否为同一函数?

确定函数的两个要素是定义域 D 和对应规律 f. 只有当两个函数的定义域及对应规律完全相同时,它们才是同一函数.

例如,$f_1(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}$ 与 $g_1(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}}$ 是同一函数. 因为它们的定义域均为 $[1,2)$,且当 $x\in[1,2)$ 时,总有 $f_1(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}}=g_1(x)$.

又 $f_2(x)=\sqrt{(x-1)^2}$ 与 $g_2(x)=x-1$ 不是同一函数. 因为,虽然 $f_2(x)$ 与 $g_2(x)$ 的定义域相同,均为 $(-\infty,+\infty)$,但 $f_2(x)=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|=\begin{cases}1-x, & x<1, \\ x-1, & x\geqslant 1.\end{cases}$ 显然 $f_2(x)$ 与 $g_2(x)$ 的对应规律不同,故 $f_2(x)\neq g_2(x)$.

2. 两函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 需满足什么条件才能构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$?

不是任意两个函数都能构成复合函数. 例如,$y=\sqrt{u}$ 与 $u=\sin x-3$ 就不能构成复合函数 $y=\sqrt{\sin x-3}$. 因为 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 $D_f=[0,+\infty)$ 与 $u=\sin x-3$ 的值域 $R_\varphi=[-4,-2]$ 的交集为空集.

一般地,当函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_f 与 $u=\varphi(x)$ 的值域 R_φ 的交集 $D_f\cap R_\varphi$ 不空时,这两个函数才能构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$,但其定义域 $D_y\subset D_\varphi$.

例如,$y=\ln u(u>0)$ 和 $u=x-2(x\in(-\infty,+\infty))$ 能构成复合函数 $y=\ln(x-2), x\in(2,+\infty)$. 此处,复合函数的定义域 $D_y=(2,+\infty)$ 是内层函数定义域 $D_\varphi=(-\infty,+\infty)$ 的子集.

复合函数是本章的重要概念. 将复合函数分解为若干个简单函数,这会为函数的研究(如求极限、求导数等)带来方便. 复合函数的分解过程是由外层到内层,逐层进行的. 例如:$y=\mathrm{e}^{(\arctan\sqrt{x})^2}$ 分解为

$$y=\mathrm{e}^u, u=v^2, v=\arctan w, w=\sqrt{x}.$$

[典型例题]

专题(一) 求函数的定义域

例 1.1 求函数的定义域 D:

(1) $y=\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{\sin x}$;(2) $y=\sqrt{\ln\dfrac{3x-x^2}{2}}$;(3) $y=\begin{cases}\arcsin\dfrac{1}{x}, & x\geqslant 1, \\ \dfrac{1}{\ln(1-x)}, & x<1.\end{cases}$

解 (1)(交集法)和函数的定义域是各函数定义域之交集.由于负数不能开平方根,分母不能为零,有$\begin{cases}1-x^2\geqslant 0,\\ \sin x\neq 0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1,\\ x\neq 0.\end{cases}$所求定义域为 $D=[-1,0)\cup(0,1]$.

(2)(限制法)因为负数不能开平方根,有 $\ln\dfrac{3x-x^2}{2}\geqslant 0$,又对数的真数部分应满足$\dfrac{3x-x^2}{2}\geqslant 1$,即$(x-1)(x-2)\leqslant 0$.得$\begin{cases}x-1\leqslant 0,\\ x-2\geqslant 0,\end{cases}$ 或$\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\ x-2\leqslant 0.\end{cases}$前者无解,后者的解即为所求定义域 $D:1\leqslant x\leqslant 2$.

(3)(并集法)当 $x\geqslant 1$ 时,由 $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$应有$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$,即$|x|\geqslant 1$,故子定义域为 $D_1=[1,+\infty)$,

当 $x<1$ 时,由 $y=\dfrac{1}{\ln(1-x)}$,零和负数不能取对数及分母不为零,有$\begin{cases}1-x>0,\\ 1-x\neq 1,\end{cases}$ 即$\begin{cases}1>x,\\ x\neq 0.\end{cases}$故子定义域为 $D_2=(-\infty,0)\cup(0,1)$.

因此,分段函数的定义域是各段上子定义域之并集:$D=D_1\cup D_2=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

小结 (1)求具体函数的定义域,应注意对常见函数的某些限制.

1° 分式的分母不能为零;

2° 根式中负数不能开偶次根;

3° 零和负数不能取对数;

4° 三角函数、反三角函数的定义域.如 $\arccos x$ 中 $|x|\leqslant 1$,$\tan x$ 中 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$等.

(2)求函数定义域的方法:

1° 交集法:由四则运算所构成函数的定义域是各局部函数定义域的交集(如例 1.1(1));

2° 并集法:分段函数的定义域是其各段函数定义域的并集(如例 1.1(3));

3° 限制法:求复合函数的定义域,应按复合过程,由外至内一层层寻找限制条件,直至得到对自变量的限制(如例 1.1(2));

4° 应用交集法:应用问题中函数的定义域是该函数解析表示式自然定义域 D_1 的子集.此子集是其自然定义域 D_1 与实际意义的限制 D_2 之交集 $D_1\cap D_2$.

专题(二) 函数关系

例 1.2 (1)$f(x)=x^2+1$,则 $f(x_0)=$______,$f(2x+1)=$______,$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+1\right)=$______,$f[f(x)]=$______;

(2)设 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\leqslant 1,\\ x^2-1, & x>1,\end{cases}$则 $f(x+1)=$______;

(3)(研 90—1—03)①设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$则 $f[f(x)]=$______.

分析 (1)$y=f(x)$给出的是 y 与 x 的函数关系.例如,对 $f(x)=x^2+1$,规则 f 表示:"对括号内量 x 求平方,再加上 1".如果将 $f(x)$括号内 x 换成$\varphi(x)$,即成为函数 $f[\varphi(x)]$,它表示"将 $\varphi(x)$求平方,再加上 1".

解 (1)$f(x)=x^2+1$,得 $f(x_0)=x_0^2+1$,$f(2x+1)=(2x+1)^2+1=4x^2+4x+2$,

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)^2+1=\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}+2,\ f[f(x)]=f^2(x)+1=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2.$$

① 研 90—1—03 表示该题是 1990 年考研数学(一)中的 3 分题.

(2)由 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\leqslant 1,\\ x^2-1, & x>1,\end{cases}$ 将 $f(x)$ 表达式中所有的 x 都换成 $(x+1)$，得

$$f(x+1)=\begin{cases}2(x+1)+1, & (x+1)\leqslant 1,\\ (x+1)^2-1, & (x+1)>1,\end{cases} \text{即 } f(x+1)=\begin{cases}2x+3, & x\leqslant 0,\\ x^2+2x, & x>0.\end{cases}$$

(3)由 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 将表达式中的所有 x 换成 $f(x)$，得 $f[f(x)]=\begin{cases}1, & |f(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |f(x)|>1.\end{cases}$
由于对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，总有 $|f(x)|\leqslant 1$，所以 $f[f(x)]=\underline{1}$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

例 1.3 (1) $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，则 $f(\sqrt{2}\cos x)=$ ______；

(2)(研 92—4—03)设 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，则 $\varphi(x)=$ ______ 的定义域为______.

(1)**分析** 为求 $f(\sqrt{2}\cos x)$，应先由 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$ 求出 $f(u)$.

解 因为 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$，所以 $f(u)=u^2-2$（视 $u=x+\dfrac{1}{x}$），

故 $\qquad f(\sqrt{2}\cos x)=(\sqrt{2}\cos x)^2-2=-2\sin^2 x$.

(2)**分析** 给定函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，需要求复合函数 $y=f[\varphi(x)]$，只需直接代入.此处是逆问题：已知复合函数 $f[\varphi(x)]$ 及外层函数 $f(x)$，要求内层函数 $u=\varphi(x)$，这需要由复合函数解出中间变量.为此，先将复合函数用中间变量表示.

解 由 $f(x)=\sin x$ 及 $f[\varphi(x)]=1-x^2$，得 $f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)=1-x^2$，解出 $\varphi(x)$，得 $\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$，其定义域为 $|1-x^2|\leqslant 1$，即 $-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1$，即 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.所以

$$\varphi(x)=\underline{\arcsin(1-x^2)}\text{的定义域为}\underline{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}.$$

小结 求分段函数的复合，应注意自变量和中间变量的取值范围，这是保证运算正确的一个重要环节.初学者容易犯这样的错误(以例 1.2(2)为例)：

由 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\leqslant 1,\\ x^2-1, & x>1.\end{cases}$ 得 $f(x+1)=\begin{cases}2(x+1)+1, & x\leqslant 1,\\ (x+1)^2-1, & x>1.\end{cases}$ 此解错在未正确地给出中间变量 $u=x+1$ 的取值范围.事实上，作分段函数的复合 $f(x+1)$ 时，应将 $f(x)$ 表达式中的所有 x 均换为 $x+1$，包括原表达式中 x 的取值不等式中的 x.

专题(三)　反函数、复合函数

例 1.4 求下列函数的反函数：

(1) $y=\ln(x+1)$；(2) $y=f(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ 2^x, & 1\leqslant x<+\infty.\end{cases}$

解 (1)由 $y=\ln(x+1)$ 解出 x，得 $x=e^y-1$，交换 x 与 y 的位置，得反函数

$$y=e^x-1\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

(2)由 $y=f(x)$ 解得 $x=\begin{cases}y, & -\infty<y<1,\\ \log_2 y, & 2\leqslant y<+\infty.\end{cases}$ 将式中的 x 与 y 对换，得 $y=f(x)$ 的反函数

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ \log_2 x, & 2\leqslant x<+\infty.\end{cases}$$

小结 求反函数的步骤为：
(1)由 $y=f(x)$ 中解出 $x=\varphi(y)$；
(2)对换自变量与因变量的记号，即得反函数 $y=\varphi(x)$.

例 1.5 将下列复合函数分解为基本初等函数：(1) $y=(\sin e^{\frac{1}{x}})^2$；(2) $y=2^{\sqrt{\tan\ln x}}$.

解 (1)$y=u^2, u=\sin v, v=e^w, w=\frac{1}{x}$.

(2)$y=2^u, u=\sqrt{v}, v=\tan w, w=\ln x$.

小结 函数的复合与分解是学习微积分常会遇见的运算,应做好此基本功训练.解题的关键是由外向内分清复合的层次,做到不漏掉任一中间环节.

专题(四) 函数的基本性质

例 1.6 判断下列函数的奇偶性:

(1)$f(x)=\frac{a^x-1}{a^x+1}$; (2)$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

(3)$f(x)=\sin x\cdot e^{x^2}$; (4)$f(x)=x^k-x^{-k}$(k 为非零整数).

解 (1)$f(-x)=\frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=\frac{1-a^x}{1+a^x}=-f(x)$,故 $f(x)=\frac{a^x-1}{a^x+1}$为奇函数.

$$
\begin{aligned}
(2)f(-x)&=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)\\
&=\ln\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{x+\sqrt{1+x^2}}=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\\
&=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),
\end{aligned}
$$

故 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$为奇函数.

(3)由于 $\sin x$ 为奇函数,e^{x^2} 为偶函数,因此,它们的乘积为奇函数.

(4)当 k 为奇数时,x^k 与 $x^{-k}=\frac{1}{x^k}$均为奇函数,因此,它们的差仍为奇函数;

当 k 为偶数时,x^k 与 $x^{-k}=\frac{1}{x^k}$均为偶函数,因此,它们之差仍为偶函数.

小结 (1)奇、偶函数的四则运算性质:

偶×(或÷)偶=偶; 奇×(或÷)奇=偶; 奇×(或÷)偶=奇;

偶+(或-)偶=偶; 奇+(或-)奇=奇(当"奇-奇≠0"时).

(2)判定函数奇偶性的常用方法为:

利用定义; 利用奇、偶函数的四则运算性质.

例 1.7 判断下列函数在其定义域内的有界性:(1)$y=\frac{1+\cos x}{2}$;(2)$y=x\sin x$.

分析 $f(x)$在 D 上有界是指:存在 $M>0$,使$|f(x)|\leqslant M, x\in D$.

$f(x)$在 D 上无界是指:不存在 $M>0$,使$|f(x)|\leqslant M, x\in D$.

解 (1)由于$|y|=\left|\frac{1+\cos x}{2}\right|\leqslant\frac{1}{2}[1+|\cos x|]\leqslant\frac{1+1}{2}=1$,

故 $y=\frac{1+\cos x}{2}$在$(-\infty,+\infty)$上有界.

(2)$y=x\sin x$ 为无界函数.因为,对于不论多大的 $M_0>0$,总有 $x_0=2n\pi+\frac{\pi}{2}$,使

$$|f(x_0)|=|x_0\sin x_0|=\left|\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right|=2n\pi+\frac{\pi}{2}>M_0.$$

专题(五) 应用问题中的函数

例 1.8 欲建造一个容积为 V 的长方体游泳池,使它的底为正方形.如果所用材料单位面积的造

价池底是池壁的 3 倍,试将总造价表示成底边长的函数,并确定其定义域.

解 设底边长为 x,长方体的高为 h,侧面单位面积的造价为 p,则体积 $V=x^2h$,高 $h=\dfrac{V}{x^2}$.

侧面积 $S=4xh=\dfrac{4V}{x}$,故总造价为 $y=3px^2+p\cdot\dfrac{4V}{x}$.其定义域为自然定义域($x\neq0$)与应用问题限制($x>0$)的交集 $D=(0,+\infty)$.

例 1.9 某化肥厂生产产品 1 000 t,每吨定价为 130 元.销售在 700 t 以内时,按原价出售;超过 700 t 时,超过的部分需打 9 折出售,试将销售总收益与总销售量的函数关系用数学表达式表出.

解 设销售量为 x,收益为 R,每吨定价为 p.

当 $0\leqslant x\leqslant700$ 时,收益 $R=px=130x$;

当 $700<x\leqslant1\,000$ 时,收益 $R=700p+(x-700)\times0.9p=700\times130+(x-700)\times0.9\times130$;

故总收益函数为 $R=\begin{cases}130x, & 0\leqslant x\leqslant700,\\ 91\,000+117(x-700), & 700<x\leqslant1\,000.\end{cases}$

[基础训练]

1.1 (1)函数 $y=\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{x^2-1}$ 的定义域为______; (2)函数 $y=\dfrac{\ln(2-x)}{\sqrt{|x|-1}}$ 的定义域为______.

1.2 在下列各项中,$f(x)$ 和 $g(x)$ 相同的为( ).

(A)$f(x)=x,g(x)=\sqrt{x^2}$ (B)$f(x)=\sqrt{x(x-1)},g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$

(C)$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3},g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$ (D)$f(x)=2\ln x,g(x)=\ln x^2$

1.3 (1)设 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$,求 $f[f(x)],f\{f[f(x)]\}$; (2)设 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

1.4 函数 $y=xe^{\cos x}$ 是( ).

(A)偶函数 (B)奇函数 (C)单调函数 (D)有界函数

1.5 (1)设 $f(x-a)=x^2+\arctan(x-1)$,求 $f(x)$;

(2)设 $\varphi(x+1)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant1,\\ 2x, & 1<x\leqslant2,\end{cases}$ 求 $\varphi(x)$ 并作图.

1.6 将下列函数分解成简单初等函数:

(1)$y=\arcsin^2e^{1-x^2}$; (2)$y=2^{\cos\ln(1+x)}$.

1.7 在半径为 r 的球内嵌入一圆柱,试将圆柱的体积表示为其高的函数,并确定此函数的定义域.

1.8 已知产品价格 p 与需求量 Q 的关系为:$2p+Q=40$.试求(1)需求函数 $Q(p)$,并作图;(2)总收益函数 $R(Q)$,并作图;(3)$p(0),p(2),p(8),R(2),R(6)$.

[强化训练]

1.9 函数 $f(x)=\arcsin\dfrac{2x-1}{5}+\sqrt{x^2-x-2}$ 的定义域为______.

1.10 设 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x$,则 $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)=$______.

1.11 设 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant1,\\ 2, & 1<x\leqslant2.\end{cases}$ 则 $g(x)=f(2x)+f(x-2)$( ).

(A)无定义 (B)在[0,2]上有定义

(C)在$[0,4]$上有定义　　　　　　　　(D)在$[2,4]$上有定义

1.12　下列函数中,不是奇函数的是(　　).

(A)$f(x)=\frac{1+x}{1-x}$　　(B)$f(x)=\frac{|x|}{x}$　　(C)$f(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$　(D)$f(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$

1.13　已知$f(x)=e^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=2+x$,且$\varphi(x)\geqslant 0$.求$\varphi(x)$以及它的定义域.

1.14　验证$y=\frac{1-x}{1+x}(x\neq -1)$的反函数就是它本身.

1.15　设$z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$,且$z|_{y=1}=\sqrt{x}$,求$f(x)$及$z$的表示式.

1.16　试证两个偶(奇)函数的乘积是偶函数;一个偶函数与一个奇函数的乘积是奇函数.

1.17　设$y=f(x)$,$x\in I$,其中I为关于原点对称的区间.试证明:

(1)$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$为偶函数;　(2)$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$为奇函数;

(3)$f(x)$总可表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

1.18　图1-1中哪几个图形与以下三种情形分别对应?请为剩余那个图形写出一件事.图中t表示时间,S表示路程.

(1)小张骑自行车上班,路途中仅遇到一次红灯,等候了一段时间;

(2)某人乘出租车上班,出发后不久发现自己忘了带公文包,便立刻返回家中取包,然后继续上路;

(3)小李周末参加骑自行车集体效游.开始时,他边欣赏路边景色边骑车,玩得很开心,后来发现自己掉队了,就逐渐加速赶路.

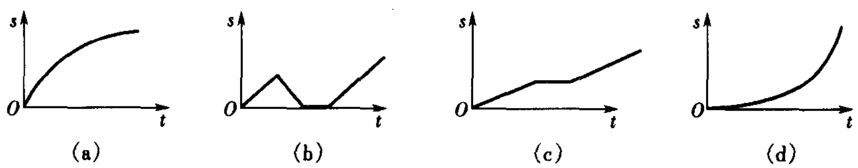

图1-1

[点拨与答案]

1.1　(1)$[-3,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$;(2)$(-\infty,-1)\cup(1,2)$.

1.2　(C).提示:(B),(D)两函数定义域不同,(A)中两函数对应规律不同.

1.3　(1)$\frac{x}{1-2x},\frac{x}{1-3x}$;(2)$f(x)$.　**1.4**　(B).

1.5　(1)$f(x)=(x+a)^2+\arctan(x+a-1)$;(2)$\varphi(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 2(x-1), & 2<x\leqslant 3.\end{cases}$

1.6　(1)$y=u^2,u=\arcsin v,v=e^w,w=1-x^2$;　(2)$y=2^u,u=\cos v,v=\ln(1+x)$.

1.7　$V=\pi\left(r^2-\frac{h^2}{4}\right)h,h\in(0,2r)$.

1.8　(1)$Q(p)=40-2p$;　(2)$p(Q)=20-\frac{1}{2}Q,R(Q)=pQ=20Q-\frac{1}{2}Q^2$;

(3)$p(0)=20,p(2)=19,p(8)=16;R(2)=38,R(6)=102$.

1.9　$[-2,-1]\cup[2,3]$.

1.10　$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=1-\cos x$.提示:先利用半角公式$\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$将$f\left(\sin\frac{x}{2}\right)$用$\sin\frac{x}{2}$表示,再令$t=\sin\frac{x}{2}$,得$f(t)=2-2t^2$,最后取$t=\cos\frac{x}{2}$得$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)$.

1.11 (A)提示:$f(2x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2},\\ 2, & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1,\end{cases}$ 定义域 $D_1=[0,1]$,$f(x-2)=\begin{cases}1, & 2\leqslant x\leqslant 3,\\ 2, & 3<x\leqslant 4.\end{cases}$ 定义域为 $D_2=[2,4]$,而 $g(x)=f(2x)+f(x-2)$ 的定义域 $D=D_1\cap D_2=\varnothing$ 为空集.故 $g(x)$ 无定义.选(A).

1.12 (A),(C). **1.13** $\varphi(x)=\sqrt{\ln(2+x)}\,(x\geqslant -1)$.

1.15 $f(x)=x^3+3x^2+3x$,$z=\sqrt{y}+x-1$.提示:将 $y=1$,$z=x$ 代入 z 的表达式得 $f(\sqrt[3]{x}-1)=x-1$.令 $t=\sqrt[3]{x}-1$,则 $f(t)=t^3+3t^2+3t$.$f(x)=x^3+3x^2+3x$,$z=\sqrt{y}+x-1$.

1.18 (1)—(c);(2)—(b);(3)—(d).(a)图参考答案:1°开长途车司机随着时间的推移逐渐疲劳,车速也逐渐放慢.2° 随着夜幕的降临,车速渐慢.

1.2 极 限

[知识网络]

概念

- 数列极限:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.
- 函数极限:$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.
- 无穷小量 $f(x)$:$\lim f(x)=0$.
- 无穷大量 $f(x)$:$\lim f(x)=\infty$.
- 无穷小的阶:(α,β:自变量同一变化过程中的无穷小)

$$\text{若}\lim\frac{\beta}{\alpha}=\begin{cases}0, & \text{称 }\beta\text{ 是比 }\alpha\text{ 高阶的无穷小,记作 }\beta=o(\alpha),\\ \infty, & \text{称 }\beta\text{ 是比 }\alpha\text{ 低阶的无穷小},\\ C\neq 0, & \text{称 }\beta\text{ 与 }\alpha\text{ 是同阶无穷小},\\ 1, & \text{称 }\beta\text{ 与 }\alpha\text{ 是等价无穷小,记作 }\alpha\sim\beta.\end{cases}$$

性质与结论

函数(数列)极限性质:

(唯一性)函数极限存在则必唯一;

(有界性)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,则 $f(x)$ 在空心邻域 $\dot{U}(x_0)$ 内有界;

(局部保号性)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0(<0)$,则 $f(x)>0(<0)$,$x\in\dot{U}(x_0)$;若 $f(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$,$x\in\dot{U}(x_0)$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 $A\geqslant 0(\leqslant 0)$.

(保序性)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,且 $f(x)\geqslant g(x)$,$x\in\dot{U}(x_0)$,则 $A\geqslant B$.

极限运算性质:(设 $\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$ 存在)

$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

$\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$;

$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}\,(B\neq 0)$.

$\Rightarrow$ $\lim Cf(x)=C\lim f(x)$(C 为常数);

$\lim[f(x)]^m=[\lim f(x)]^m\,(m=\pm 2,\pm 3,\cdots)$;

$\lim[C_1f_1(x)+C_2f_2(x)+\cdots+C_nf_n(x)]=C_1\lim f_1(x)+C_2\lim f_2(x)+\cdots+C_n\lim f_n(x)$.

性质与结论

极限存在的充要条件：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

极限存在准则：

若 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n\,(n>N)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$；

单调有界数列必有极限.

两个重要极限：

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$（或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$）.

无穷小的性质：

有限个无穷小的和（或差或积）仍为无穷小；

有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小；

无穷小（不取零值）的倒数为无穷大，无穷大的倒数为无穷小；

若无穷小 $\alpha_1\sim\alpha_2,\beta_1\sim\beta_2$，且 $\lim\dfrac{\alpha_2}{\beta_2}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}=\lim\dfrac{\alpha_2}{\beta_2}$.

[释疑解难]

1. 无穷小量与很小的数有何区别？以下关于无穷小量的命题是否正确？

(1) 无穷小量就是绝对值很小的数；(2) 0 是无穷小量；(3) x^2 是无穷小量.

先回顾无穷小量的概念. 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$，则称 $f(x)$ 是 $x\to x_0\,(x\to\infty)$ 时的无穷小量. 由于函数 $y=0$ 当 $x\to x_0\,(x\to\infty)$ 时极限为 0，故在自变量的任何变化趋势下，$y=0$ 都是无穷小量，故命题 (2) 正确.

非零常数（即使其绝对值很小）在自变量的任何变化趋势下，都不以零为极限. 因此，绝对值多么小的非零常数都不是无穷小量，故命题 (1) 不正确.

因为 $\lim\limits_{x\to x_0}x^2=x_0^2\begin{cases}=0, & x_0=0,\\ \neq 0, & x_0\neq 0.\end{cases}$ 所以，当 $x_0=0$ 时，x^2 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量；当 $x_0\neq 0$ 时，x^2 不是 $x\to x_0$ 时的无穷小量. 又 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2=\infty$，故 x^2 是 $x\to\infty$ 时的无穷大量. 可见，不能脱离自变量的变化过程来谈某变量为无穷小量（或无穷大量）. 故命题 (3) 不正确.

2. 若数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的极限均不存在，则它们的和与积的极限一定不存在吗？

不一定. 如：$a_n=(-1)^n$，$b_n=(-1)^{n+1}$ 的极限均不存在，但 $a_n+b_n=0$ 的极限为 0；$a_nb_n=(-1)^{2n+1}=-1$ 的极限为 -1.

一般地，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}[a_n\pm b_n]$ 存在（收敛）与否的关系可简述为：收收为收，收发为发，发发不一定发.

3. 函数极限与数列极限有何关系？

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$（或 ∞）的充分必要条件：对任意满足 $x_n\to a\,(x_n\neq a)$ 的数列，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$（或 ∞）.

利用函数极限和数列极限的关系，可以解决以下问题.

(1) 利用求函数极限的方法，求数列的极限.

例 1.10 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}3^n\sin\dfrac{1}{3^n}$.

解 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，取 $x_n=\dfrac{1}{3^n}$，则当 $n\to\infty$ 时 $x_n\to 0$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}3^n\sin\dfrac{1}{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{3^n}}{\dfrac{1}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x_n}{x_n}=1$.

例 1.11 (第 3 章内容)求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{e^n}$.

解 先考虑对应的函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$,这是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型极限.利用洛必达法则,有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}\xlongequal{\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}\xlongequal{\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}}2\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{e^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$.

(2)为说明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内为无界变量,只要寻找一个趋于 a(或 ∞)的数列 x_n 使 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$ 即可.

例 1.12 证明函数 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.

证 取 $x_n=2n\pi$,则 $x_n\to+\infty$.

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cos x_n=\lim_{n\to\infty}2n\pi\cos 2n\pi=\lim_{n\to\infty}2n\pi=+\infty,$$

故 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 无界.

[典型例题]

专题(一) 利用四则运算法则求极限

例 1.13 求下列各数列的极限:

(1) $x_n=\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}+\dfrac{n}{n^2}\right)$; (2) $x_n=\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$;

(3) $x_n=\left[\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$; (4) $x_n=\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

分析 对于 n 项之和(或积)的数列极限,往往需要先做适当的恒等变形,将其化为有限项的和(或积)的极限,以便运用四则运算法则求极限.

解 (1)(合并法)因为 $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$,

所以 $$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

(2)(合并法)因为数列 x_n 的分子、分母均为等比级数的前 $n+1$ 项的和.利用公式

$$1+a+a^2+\cdots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a},$$

得 $$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}}{\dfrac{1-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}\,\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{3^{n+1}}}=\frac{4}{3},$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}=0,\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}=0$.

(3)(拆项合并法)因 $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right]$,