全国各类成人高考强化应试指导

《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》配套辅导用书

目标短期强化系列

Intensive Training Package

高等数学（二）

强化应试指导

Advanced Mathematics (II)

专科起点升本科

主编　刘慧娟

TERRACE 梯田

中国时代经济出版社

目标短期强化系列

全 国 各 类 成 人 高 考 强 化 应 试 指 导

《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》配套辅导用书

(专科起点升本科)

高等数学(二)
强化应试指导

主　编　刘慧娟

中国时代经济出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(二)强化应试指导/刘慧娟主编.—北京:中国时代经济出版社,2002.9(2003.1 重印)
(全国各类成人高校强化指导)
专科起点升本科
ISBN 7—80169—205—5

Ⅰ.高… Ⅱ.刘… Ⅲ.高等数学—成人教育:高等教育—升学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 076359 号

高等数学(二)强化应试指导

刘慧娟 主编

出　版	中国时代经济出版社		
地　址	北京市东城区东四十条 24 号	邮政编码	100007
电　话	(010)88361317　64066019	传　真	(010)64066026
发行经销	新华书店总店北京发行所发行　各地新华书店经销		
印　刷	北京新丰印刷厂		
开　本	787×1092　1/16	版　次	2002 年 10 月北京第 1 版
印　张	14	印　次	2003 年 1 月第 2 次印刷
字　数	345 千字	印　数	10001—15000 册
定　价	18.00 元		

说　明

为了使考试科目的设置更加适应成人高等教育的特点，有利于提高成人高校招生的生源质量及今后的培养，有利于考试的组织和管理，教育部决定从 2003 年起，对现行全国成人高校招生考试科目设置做进一步的调整。

专科起点升本科统考科目按学科门类设置，不再按生源类别设置。统考科目为政治、外语和 1 门专业基础课。专业基础课根据各学科门类的特点设置 8 门，由招生院校按专业的需要规定考生应试其中一门（见下表）。各门试题满分为 150 分，考试时间为 150 分钟。

专科起点升本科各学科门类考试科目设置一览表

<table>
<tr><th rowspan="2">报考学科门类以及一级学科</th><th colspan="2">统一命题考试科目</th><th rowspan="2">专业课</th></tr>
<tr><th>公共课</th><th>专业基础课</th></tr>
<tr><td>哲学、文学（艺术类除外）、历史学以及中医学类（一级学科）</td><td rowspan="8">政治
外语</td><td>大学语文</td><td rowspan="8">由招生院校自定</td></tr>
<tr><td>艺术类（一级学科）</td><td>艺术概论</td></tr>
<tr><td>工学、理学（生物科学类、地理科学类、环境科学类、心理学类等四个一级学科除外）</td><td>高等数学（一）</td></tr>
<tr><td>经济学、管理学以及职业教育类、生物科学类、地理科学类、环境科学类、心理学类、药学类等六个一级学科</td><td>高等数学（二）</td></tr>
<tr><td>法学</td><td>民法</td></tr>
<tr><td>教育学（职业教育类一级学科除外）</td><td>教育理论</td></tr>
<tr><td>农学</td><td>生态学基础</td></tr>
<tr><td>医学（中医学类、药学类等两个一级学科除外）</td><td>医学综合</td></tr>
</table>

同时，教育部于 2002 年 8 月颁布了新的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲——专科起点升本科》，新大纲从考试内容、题型、命题方向等方面都作了一系列重大调整。

本套短期强化应试系列丛书正是按照调整考试科目后的新大纲编写的，基本特点如下：

1. 紧扣考试大纲和学习教材，着重体现了新的命题方向和考试要求，对学生具有切实的指导意义。

2. 在题目的选编上，结合成考学生的实际状况，摒弃常规的题海练习，具有明显的层次性、逻辑性，从而可以在短期内有目的地提高学生驾驭试题的能力。

3. 在题目的解答上，绝不就题论题，而注重于思路分析，从而帮助学生尽快培养实用的思维方法，并使其掌握灵活的解题技巧。

4. 本套丛书的编写者多年来一直在一线从事专升本考前教学、辅导工作，积累了一整套行之有效的教学方法和辅导经验，并对历年考试有着深入的研究，他们的指导能让学生少走弯路，多取捷径。

本套短期强化应试系列丛书，充分考虑到广大成考学生时间紧、任务重的现实状况，旨在帮助学生在短期内强化重要考核知识点和主要考试题型，迅速提高解题能力，利用最短的时间取得理想的成绩。

本套丛书既可作为时代经济版、高教版和广播电大版教材的同步配套辅导用书，亦可作短期强化应试的教材独立使用。

《高等数学(二)强化应试指导》的主要内容如下：

1. 全书以章为序进行编写，便于学生掌握知识要点。

2. 每章由“要点提示”、“考题精析”、“强化训练题”、“参考答案”四部分组成。“要点提示”是对大纲指明的该章知识要点的归纳；“考题精析”则对近年来统考卷中出现的与该章内容相关的试题进行归纳分类，并提供思路分析和详细解答；“强化训练题”是为了让考生在短期内迅速掌握考纲要求的知识点而精心设计的，并且其重点分布和难易度与考纲要求一致，对考生具有直接的应试指导效果；“参考答案”是对“强化训练题”中所有试题的解答。

3. 书后附有一套模拟试题(附答案)，可以检验应试者的复习效果。

在本套丛书落笔之际，谨希望可以在求知道路上助广大学生一臂之力。为了把本书编写的更好，欢迎广大读者对本书存在的不足之处给予批评指正，待再版时进一步修订完善。

编　者

2002 年 9 月

目　　录

第一章　函数、极限和连续

要点提示

（一）函数

1. 函数的概念

(1) 函数的定义：

设D⊆R为一非空数集，如果对D中的每一个元素x，通过法则f都有R内的惟一确定的一个元素y与之对应，将与x对应的y记作$y=f(x)$．则称这个对应关系f为定义在D上的函数．称x为自变量，y为因变量．

自变量x的取值范围D为函数f的定义域，将按照函数f与$x\in$ D所对应的$y\in$ R叫做函数值，函数值$y=f(x)$的全部集合叫做函数f的值域．

函数定义中两要素是指定义域和函数关系（对应关系或对应法则）．

例　①$y=x$与$y=\dfrac{x^2}{x}$因为$y=x$的定义域是一切实数，$y=\dfrac{x^2}{x}$的定义域是$x\neq 0$的一切实数，因此它们不是同一函数．

②　$y=\sqrt{x}$与$W=\sqrt{u}$是同一函数．

(2) 求函数定义域的基本规律：

① 分式函数的分母不能为零；

② 偶次根式的被开方式非负；

③ 对数式的真数式必须取正值；

④ 反正弦、反余弦内的解析式，其绝对值不能大于1；

⑤ 函数的表达式若是由有限项通过四则运算组成，其定义域是各项定义域的交集；

⑥ 分段函数的定义域，是各段定义域的并集；

⑦ 应用问题的定义域是要使解析式及实际问题有意义的部分．

(3) 有关函数值的两类问题：

① 已知函数$f(x)$和$g(x)$的表达式或常数x_0，求函数值$f(x_0)$或$f[g(x)]$的表达式．

例1　设$f(x)=\begin{cases}-(x+1) & x\leqslant -1\\ 2^x & -1<x\leqslant 1\\ 0 & x>1\end{cases}$

求$f(-2)$，$f(0)$，$f(3)$．

解　这是一个分段函数，x在不同的区间上时$f(x)$的表达式不同，要注意$x=-2,0,2$的位置．

$x=-2<-1$,所以 $f(-2)=-(-2+1)=1$

$x=0$,0 在 -1 与 1 之间,所以 $f(0)=2^0=1$.

$x=3>1$,所以 $f(3)=0$.

例 2 已知 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$,$g(x)=e^x-1$.

求 $f(1)$,$f(\sin x)$,$f[f(x)]$,$f[g(x)]$,$g[f(x)]$.

方法:$f[g(x)]$ 等的求法是将 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$ 中的 $f(\quad)=\dfrac{(\quad)^2}{1+(\quad)}$ 空白括号内填上所求的相应的数字或表达式.

解 $f(1)=\dfrac{1^2}{1+1}=\dfrac{1}{2}$, $f(\sin x)=\dfrac{(\sin x)^2}{1+\sin x}$,

$$f[f(x)]=f\left(\frac{x^2}{1+x}\right)=\frac{\left(\dfrac{x^2}{1+x}\right)^2}{1+\dfrac{x^2}{1+x}}=\frac{x^4}{(1+x)(1+x+x^2)}$$

$$f[g(x)]=f(e^x-1)=\frac{(e^x-1)^2}{1+(e^x-1)}=\frac{(e^x-1)^2}{e^x}$$

同理可求 $g[f(x)]=g\left[\dfrac{x^2}{1+x}\right]=e^{\frac{x^2}{1+x}}-1$

② 已知 $f[g(x)]$ 的表达式,求 $f(x)$ 的表达式.

例 设 $f(x+1)=x^2-x+7$,求 $f(x)$.

解

<法一>设辅助未知数法

设 $x+1=u$ 则 $x=u-1$ 代入原式

$$f(u)=(u-1)^2-(u-1)+7=u^2-3u+9.$$

得到 $f(x)=x^2-3x+9$

<法二>分析法:分析出规律再求 $f(x)$.

由 $f(x+1)=x^2+2x+1-3x-3+9$

$$=(x+1)^2-3(x+1)+9.$$

将 $x+1$ 换成 x 得到 $f(x)=x^2-3x+9$

2. 函数的性质

(1) 单调性:因为可以用导数较容易的判定函数的单调性,而用定义法判定函数的单调性不具备普遍性.故只要掌握定义即可.但要熟记下列函数的单调性.

$y=x^2$ 当 $x>0$ 时单调增加,

$x<0$ 时单调减少.

$y=x^3$,$y=\sqrt{x}$,$y=a^x(a>1)$,$y=\log_a x(a>1)$ 及 $y=\arcsin x$,$y=\arctan x$ 在定义域内单调增加.

$y=\dfrac{1}{x}$,$y=a^x(0<a<1)$,$y=\log_a x(0<a<1)$ 及 $y=\arccos x$,$y=\operatorname{arccot} x$ 在定义域内单调减少.

(2) 奇偶性

根据函数奇偶性的定义,可以判定任意函数的奇偶性.

常见的奇(偶)函数一般有：

奇函数：$y=\dfrac{1}{x}$，　$y=x^3$，　$y=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$，　$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，　$y=\lg\dfrac{a-x}{a+x}$，

$y=\sin x$，　$y=\tan x$，　$y=\cot x$，　$y=\arcsin x$，　$y=\arctan x$.

偶函数：$y=x^2$，　$y=f(x^2)$，　$y=|x|$，　$y=\cos x$.

非奇非偶函数：$y=a^x$，　$y=\log_a x$，　$|f(x)|$.

记住结论：(将奇函数简写成“奇”，偶函数简写成“偶”)

① 奇加(或减)奇是奇；偶加(或减)偶是偶；

② 奇乘以奇(或商　分母 $\neq 0$) 是偶.

偶乘以偶(或商　分母 $\neq 0$) 是偶.

③ 偶乘以奇(或商　分母 $\neq 0$) 是奇.

(3) 有界性

熟记几个有界函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 均是有界函数，其中以 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，$|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$ 为重点.

说明　函数 $y=f(x)$ 若在定义域中无界，但它在某个子区间内可以有界. 例　$y=\dfrac{1}{x}$ 在定义域内是无界函数. 在 $x\in(1,2)$ 或 $x\in[-3,-1]\cdots$ 上有界.

(4) 周期性

常见的周期函数有：

$$y=A\sin(\omega x+\varphi)\left(T=\frac{2\pi}{\omega}\right)$$

$$y=A\cos(\omega x+\varphi)\left(T=\frac{2\pi}{\omega}\right)$$

$$y=A\tan(\omega x+\varphi)\left(T=\frac{\pi}{\omega}\right)$$

$$y=A\cot(\omega x+\varphi)\left(T=\frac{\pi}{\omega}\right)$$

其中 $A\neq 0$，$\omega\neq 0$.

其他常见的周期函数类型有：

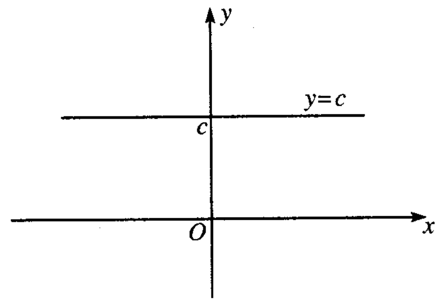
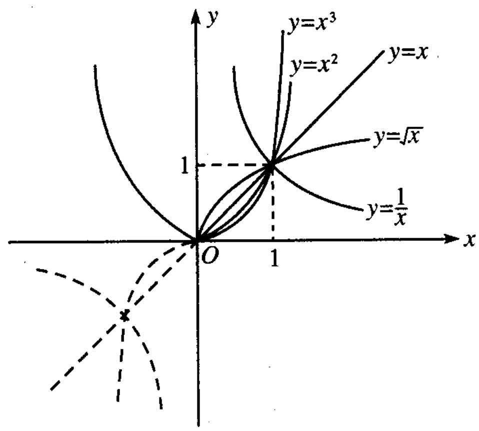
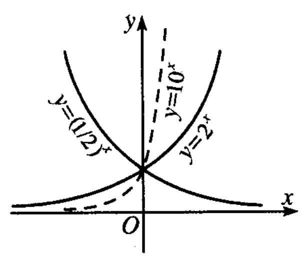
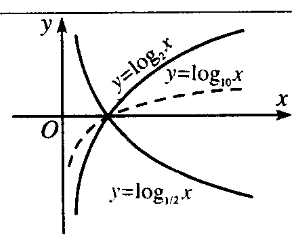
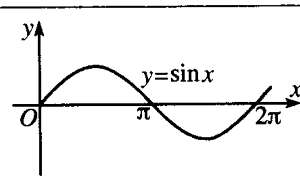
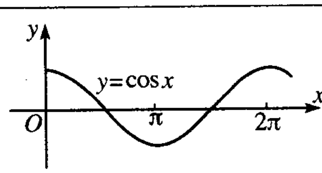
$$y=\sin^2 x,\quad y=|\sin x|.$$

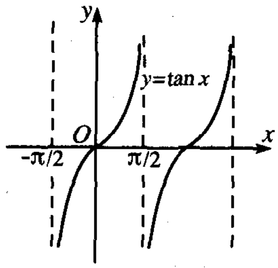
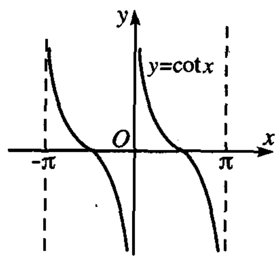
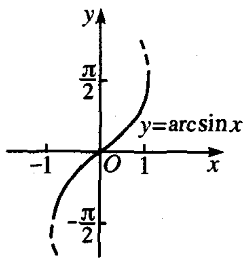
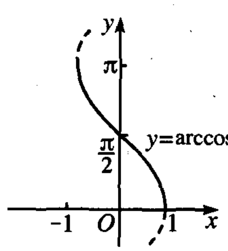
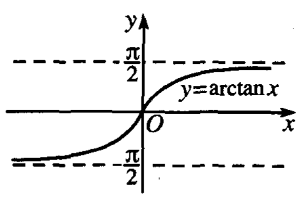
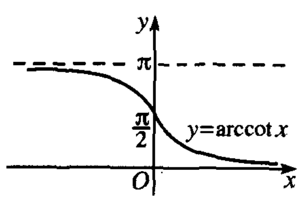
$$y=\ln(\sin x+5),\quad y=a^{\sin x}\text{ 等.}$$

注　函数 $y=\sin x^2$，$y=x\sin x$，$y=\arcsin x$，$y=\arctan x$，$y=\sin 2^x$，$y=\sin(\ln x)$ 等不是周期函数.

3. 初等函数

(1) 基本初等函数：初等数学中学过的函数. 为了复习和查阅方便，现将它们的表达式、图形和简单性质列表如下：

名称	表达式	图　形	简单性质
常数函数	$y=c$		定义域为 $-\infty<x<+\infty$. 偶函数(图形关于 y 轴对称).
幂函数	$y=x^{\alpha}$		当 α 取任意实数时，其定义域据 α 的不同而定. 在 $0<x<+\infty$ 时幂函数都有定义，且 当 $\alpha>0$ 时函数单调增加； 当 $\alpha<0$ 时函数单调减少.
指数函数	$y=a^{x}$ $(a>0,$ $a\neq 1)$		定义域为 $-\infty<x<+\infty$，单调函数，其图形在 x 轴的上方，过 $(0,1)$ 点.
对数函数	$y=\log_{a}x$ $(a>0,$ $a\neq 1)$		定义域为 $0<x<+\infty$，单调函数，其图形在 y 轴的右方，过 $(1,0)$ 点.
三角函数	$y=\sin x$		定义域为 $-\infty<x<+\infty$，奇函数，其图形关于原点对称；周期是 2π.
	$y=\cos x$		定义域为 $-\infty<x<+\infty$，偶函数，其图形关于 y 轴对称；周期是 2π.

名称	表达式	图　形	简单性质
三角函数	$y=\tan x$		定义域为 $x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 奇函数，其图形关于原点对称；周期是 π.
	$y=\cot x$		定义域为 $x\neq k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 奇函数，其图形关于原点对称；周期是 π.
反三角函数	$y=\arcsin x$		定义域为 $-1\leqslant x\leqslant1$，奇函数，图形关于原点对称.
	$y=\arccos x$		定义域为 $-1\leqslant x\leqslant1$，图形在 x 轴上方.
	$y=\arctan x$		定义域为 $-\infty<x<+\infty$，奇函数，图形关于原点对称.
	$y=\operatorname{arccot} x$		定义域为 $-\infty<x<+\infty$，图形在 x 轴上方.

(2) 复合函数

若是两个函数复合，设 $y=f(u)\quad u\in D_1$，而 $u=\varphi(x)$. $x\in D_2$. 值域 R_φ. 如果 $D_1\cap R_\varphi\neq\phi$，那么可确定一个函数 $y=f[\varphi(x)]$. 称这个函数为 y 通过 u（称为中间变量）联系成为 x 的复合函数.

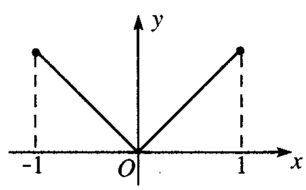
例 $y=\sqrt{u}$，如果 $u=2-\sin x$，则可得复合函数 $y=\sqrt{2-\sin x}$，如果 $u=\sin x-2$ 就不能与 $y=\sqrt{u}$ 构成一个复合函数.

(3) 初等函数

由常数与基本初等函数经过有限次四则运算或有限次的函数复合所构成的且能用一个解析式子表示的函数称为初等函数.

微积分中所研究的对象是函数，实际上大多是初等函数.

分段函数一般不是初等函数. 如分段函数 $y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$ 它的定义域是一切实数. 图形为



(二) 极限

1. 函数极限描述性的定义

(1) 数列的极限

设数列 $\{x_n\}$：$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 也可以看作是定义在自然数集上的函数，

$$x_n=f(n)(n=1,2,\cdots)$$

在数轴上依次取点 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 通过观察若当 n 无限增大时，x_n 无限地趋于一个常数 A，则称 n 趋于无穷大时，数列 $\{x_n\}$ 以常数 A 为极限，或称数列收敛于 A，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \text{ 或 } x_n\to A(n\to\infty)$$

(2) 函数的极限

函数 $y=f(x)$（数列的 $x_n=f(n)$ 是特例）的自变量变化趋势有两大类即 $x\to x_0$（常数）或 $x\to\infty$（含 $n\to\infty$）现概括为"自变量的某个变化过程中".

① 函数极限描述性定义：如果在自变量 x 的某个变化过程中，变量 y 无限趋近于某个常数 A，则称在这个变化过程中，变量 y 以 A 为极限，记作 $\lim y=A$ 或 $\lim f(x)=A$.（记号"lim"与"$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}}$"等同.）

② 函数极限的分类

(ⅰ) x 趋向于无穷大时的极限：分为三种情形 $x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 分别表示 $|x|$ 或 $x(x>0)$ 无限增大的过程.

例 从图形上可以看出 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$（当 $|x|$ 无限增大，图形向两侧无限延伸，即曲线无限趋近于 x 轴但与 x 轴无交点）.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$（当 x 无限增大时，曲线 $y=\arctan x$ 向 x 轴正向无限延伸且无限趋向

直线 $y=\frac{\pi}{2}$，但不会与其相交）.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$（当 $|x|$ 无限增大时，曲线 $y=\arctan x$ 向 x 轴负向无限延伸且无限趋近于直线 $y=-\frac{\pi}{2}$，但不会与其相交）.

$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在，因为 $|x|$ 无限增大时，曲线 $y=\arctan x$ 趋向两条直线 $y=\frac{\pi}{2}$ 与 $y=-\frac{\pi}{2}$，因此极限不存在.

(ii) x 趋向于一点 x_0 时函数的极限：分为三种情形 $x\to x_0$，$x\to x_0^+$（它表示从点 x_0 右侧无限趋近于 x_0），$x\to x_0^-$（它表示 x 从点 x_0 左侧无限趋近于 x_0）.

记号 $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 称在 x_0 的左极限.

$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 称在 x_0 的右极限.

极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是在 x_0 的左极限 $f(x_0-0)$ 与右极限 $f(x_0+0)$ 存在并相等，都等于 A（记作：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$）.

2. 函数极限的性质

性质 1（极限的惟一性）如果极限 $\lim f(x)$ 存在，则是惟一的.

性质 2 在某个变化过程中，如果 $\lim f(x)$ 存在，则在这个变化过程中函数 $f(x)$ 是有界的.

3. 函数极限的四则运算法则

若 $\lim f(x)=A,\lim f(x)=B$，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$.

(2) $\lim cf(x)=cA$（c 为常数）.

(3) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$.

(4) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}\quad(B\neq 0)$.

4. 无穷大量与无穷小量（简称“无穷大”与“无穷小”）

(1) 定义

① 在某个变化过程中，极限为零的变量称为无穷小量. 记作 $\lim y=0$.

如 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ 变量 $\frac{1}{x}$ 叫当 $x\to\infty$ 时的无穷小量.

$\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$ 变量 $x-2$ 叫当 $x\to 2$ 时的无穷小量.

② 在某个变化过程中，绝对值无限增大的变量，称为无穷大量. 记作 $\lim y=\infty$.

(2) 无穷大量与无穷小量的关系

在某一个变化过程中，

① 若 y 是无穷大量，则 $\frac{1}{y}$ 是无穷小量.

② 若 y 是无穷小量且 $y\neq 0$，则 $\frac{1}{y}$ 是无穷大量.

注 记号 $\lim y=\infty$ 只反映 $y=f(x)$ 在某个变化过程中的变化趋势，而 $f(x)$ 的极限是

不存在的.这里的 ∞ 不是一个数,不能参与极限的四则运算.

(3) 无穷小量的性质

① 有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量.

② 常量与无穷小量的乘积仍是无穷小量.

③ 有限个无穷小量的乘积仍是无穷小量.

④ 有界变量与无穷小量的乘积仍是无穷小量.

如 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$ 其中 x 是无穷小量,而$\dfrac{1}{x}$ 是无穷大量.当 $x\to 0$ 时 $\sin\dfrac{1}{x}$ 在$[-1,1]$之间变动,它的极限不存在,但$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$,即 $\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界变量.据性质 ④ 等式成立.

(4) 无穷小量阶的比较

在同一变化过程的无穷小量,它们趋近于零的速度不同,阶的比较说明了这一问题.

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是同一变化过程中的无穷小量

① 如果$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=c(c\neq 0)$,则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小量.

② 如果$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$,则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小量,记作 $f(x)\sim g(x)$.

③ 如果$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$,则称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小量.

④ 如果$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$,则称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 低阶的无穷小量.

(5) 重要极限

① 重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

可以推出$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$.

特征:在自变量的某种变化趋势下,$\sin\varphi(x)\to 0$,分母 $\varphi(x)\to 0$.即 $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$,此函数为无穷小量与无穷小量的比.称之为$\dfrac{0}{0}$ 型(**注** 分母不是零,而是分母的极限为零).

如

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1.$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}=1$$

② 重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$,$\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=\mathrm{e}$.

特征:在自变量的某种变化趋势下,$\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$

其中 $\varphi(x)$ 是无穷小量,称为 1^∞ 型.

如 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}=\mathrm{e}$.$\varphi(x)=-\dfrac{2}{x}\to 0(x\to\infty)$ 与指数 $-\dfrac{x}{2}$ 互为倒数.

又如 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}=\mathrm{e}$ $\varphi(x)=\sin x\to 0(x\to 0)$ 与指数$\dfrac{1}{\sin x}$互为倒数.

（三）连续

1. 函数在一点连续与间断的定义

若函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处满足下列三条：

(1) $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有定义.

(2) $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处极限存在，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

(3) $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的极限值等于函数值，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

则称 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续.

若不满足上述三条中的一条，则称 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处间断.

2. 函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续的充分必要条件是 $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$

一般用此条件来判断分段函数在分段点处的连续性.

例 1 讨论 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{\tan 5x} & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & (x<0)\end{cases}$ 在 $x=0$ 的连续性.

解 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 有定义.

因为 $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin 2x}{\tan 5x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\dfrac{5x}{\tan 5x}\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{5}$

$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$

由于 $f(0+0)\neq f(0-0)$，所以函数在 $x=0$ 处的极限不存在，从而在 $x=0$ 处不连续(也称间断)

例 2 讨论 $f(x)=\begin{cases}(1+2x)^{\frac{3}{x}} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 的连续性.

解 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义为 $f(0)=1$. 但

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{x}}=\lim_{x\to 0}[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^6=\mathrm{e}^6\neq f(0)$$

即函数在 $x=0$ 处极限存在但不等于在 $x=0$ 的函数值. 故在 $x=0$ 处不连续(间断).

从上面可以看出：函数在点 x_0 的极限存在是函数在 x_0 连续的必要条件；函数在点 x_0 的极限存在与在点 x_0 是否有定义无关；函数在点 x_0 有定义是函数在点 x_0 连续的必要条件等等.

3. 间断点的类型：如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点

第一类间断点：若 $f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 都存在，称 x_0 为第一类间断点. 如果 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$ 即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则 x_0 称为一类可去间断点.

如前面例 1，$x=0$ 为一类间断点，例 2 的 $x=0$ 为一类可去间断点.

第二类间断点：如果 $f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 中至少有一个不存在，则 x_0 称为二类间断点.

如 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$，则 $x=0$ 称为二类无穷间断点

$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，则 $x=0$ 称为二类振荡间断点.

4. 初等函数在定义区间上是连续的

5. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续的性质

① 最大(小)值定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则它在 $[a,b]$ 上必能取到最大(小)值.

② 零点定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则在 (a,b) 中至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

(四) 求极限的方法

熟练掌握极限的计算是本章的重点. 求极限的方法很多，分清题目类型选择好适当的方法会使计算变得简捷.

现将目前应掌握的方法归纳如下.

1. 函数极限的四则运算

2. 初等函数在点 $x=x_0$ 连续的定义，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

例如 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x+2}=\dfrac{2^2-1}{2+2}=\dfrac{3}{4}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x+2)=\ln\left(\sin\frac{\pi}{2}+2\right)=\ln 3$$

3. 未定式函数求极限

(1) 当 $x\to x_0$ 时，函数的分子与分母的极限均为零时的函数求极限，为 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式.

① 利用重要极限 $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$ 求极限.

② 利用代数运算约去公因式后再求极限.

例 1 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$(约去分子分母的公因式，再求极限)

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{3}{2}.$$

例 2 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

(当 $x\to 1$ 时 $1-x\to 0$，$1-x^3\to 0$，$\dfrac{1}{1-x}\to\infty$，$\dfrac{3}{1-x^3}\to\infty$，为 $\infty-\infty$ 型未定式)

解 将原函数通分.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}\qquad\left(\text{通分后为}\frac{0}{0}\text{型}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-(x+2)}{1+x+x^2}=-1.$$

例 3 $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$ $\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

(分子有理化或分母有理化，本题的分子、分母均乘以它的有理化因式)

解 原式$=\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(2+\sqrt[3]{x})(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})(\sqrt{1-x}+3)}$

$$=\lim_{x\to-8}\frac{-(x+8)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(8+x)(\sqrt{1-x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to-8}\frac{-(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt{1-x}+3}$$

$$=\frac{-(4+4+4)}{3+3}=-2.$$

(2) 当 $x\to\infty$ 时，函数的分子与分母的极限均为 ∞ 时，即$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式.

规律：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0} & m=n\\ 0 & m<n\\ \infty & m>n.\end{cases}$

例如 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x-1}{2x^3-x^2+x}=\dfrac{3}{2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x-1}{2x+3}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{3x^3+2x-1}=0$$

这里利用了无穷大与无穷小的倒数关系.

(3) 当 $x\to\infty$ 或 $x\to x_0$ 时 1^∞ 型未定式函数的极限. 这里指重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$或 $\lim\limits_{z\to0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=\mathrm{e}$.

注 未定式函数的极限，在一定条件下都可以用导数(洛必达法则)计算. 待学完洛必达法则后与现行方法比较，选择计算简便的方法计算.

4. 利用无穷小的性质求极限

(1) 无穷小与有界函数乘积仍是无穷小.

例 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2+1}\cdot\sin x=0$

(2) 等价无穷小的性质：在同一变化过程中，$\alpha=\alpha(x)$，$\beta=\beta(x)$，$\alpha'=\alpha'(x)$，$\beta'=\beta'(x)$均为无穷小. 若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且$\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在. 则$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$

例 1 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$.

解 因为当 $x\to0$ 时，$\tan 2x\sim2x$，$\sin 5x\sim5x$，所以$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{5x}=\dfrac{2}{5}$.

例 2 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x^3+3x}$.