现代数学基础教程

杨万利　田会英　周海云　编著

国防工业出版社

http://www.ndip.cn

现代数学基础教程

杨万利　田会英　周海云　编著

国防工业出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

现代数学基础教程/杨万利等编著 .—北京:国防工业出版社,2004.4

ISBN 7-118-03450-9

Ⅰ.现... Ⅱ.杨... Ⅲ.数学-教材 Ⅳ.01

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 020286 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

北京奥隆印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 8 205 千字

2004 年 4 月第 1 版 2004 年 4 月北京第 1 次印刷

印数:1-3000 册 定价:19.00 元

前　言

随着科学技术的飞速发展，现代数学方法在众多科学技术领域中的重要作用已是毋庸置疑的了，可以讲，现代数学科学已是科学技术研究不可或缺的理论工具。在长期的发展过程中，数学科学本身也发生着巨大的变化，首先是，数学科学的学科分支变得日益繁杂，即便是数学工作者，也难以全面了解。宏观地讲，现代数学仍以代数、几何与分析为三大基础，作为 21 世纪的非数学专业的研究生（或科技工作者来讲），系统掌握现代数学基础知识，无论是作为工具性目的的需要还是逻辑思维方法的训练（或借鉴），都应该是必须的，历史的原因造成我国理工科数学基础分界十分明显，这已是公认的遗憾，也是短时期内所无法避免的，想让一个仅具备高等数学、线性代数基本知识的工科大学毕业生了解（更不能说掌握了）现代数学基础知识，应该讲是有相当困难的。提高工科研究生运用现代数学方法研究、解决现代高科技领域中的诸多问题的能力也是当务之急。关于针对我国现行工科研究生的数学基础开设现代数学基础这门课程而写就的教材，应该讲已有多种版本，但能供非数学专业的研究生使用的教学用参考书，无论从体系上，还是内容上，都少有真正切合工科实际的教材。

立足于我国工程本科的数学基础实际，简要介绍群、环、域（代数学领域）、度量空间、拓扑空间基本概念（几何学领域）、线性泛函分析、非线性泛函分析初步（分析学领域）等基础知识，形成本教程。学习本教程只需读者具备现行工程本科高等数学、线性代数的数学基础即可。全部讲授本课程约需一学期 60 学时~

80学时。本教程已在装甲兵工程学院作为博士研究生公共基础课讲授了五届。讲授过程中，历届博士研究生给作者提出过许多中肯的意见和建议，在最终定稿的一轮讲授中，李红艳同志还认真地作了笔记与校对。本教程编写体系是由杨万利（装甲兵工程学院）、周海云（石家庄军械学院）、田会英（河北大学）三人多次研讨后确定，并共同执笔完成的，最后由杨万利整理定稿。教程编写过程中曾得到装甲兵工程学院研究生处谢刚、钟梦春及教保处刘纯舫等同志的支持与协作，在此表示感谢。时间仓促，错误之处，恳请读者及同行批评指正。

杨万利

2004年3月

目　　录

第一章　预备知识

第一节　集合与映射

1.1　集合基本概念

集合是数学中最基本的概念之一。可以讲，现代数学科学的一切内容均离不开集合这一概念，伴随着科学技术的进步与发展，现代科学技术的各个领域也大多都离不开用集合这一数学概念去抽象、去概括，集合已是一切科学技术研究及应用领域所必须面对的对象。

那么，如何给集合予以定义呢？在相当长的时间内，人们曾想当然地对集合给以如下简单的描述：具有某种可描述的特性的任何元素（对象）均可组成集合。然而，这样简单的描述导致了很多著名的被称为"集合悖论"的现象发生。

例 1　考虑集合 $M=\left\{A\,\middle|\,A\text{是集合且}A\text{不是}A\text{的元素}\right\}$。

按集合的描述性定义来看，这似乎是可以称 M 为集合的，但细究起来，人们不禁要问，集合 M 属于 M 吗？如果 M 是集合且 M 不是 M 的元素，则理应 M 在 M 中（矛盾!）；另一方面，如果 M 是集合且 M 是 M 的元素，则理应 M 不在 M 中（矛盾!）。

上述例子表明，仅靠简单的描述：具有某种可描述的特性的任何元素（对象）均可组成集合。作为集合的定义至少是不严密的，现代集合论把类、成员、相等作为不加定义的原始术语，给出集合如下的定义：

定义 1.1　类 A 称为集合的充要条件是存在类 B，使得 A 是 B

成员。不是集合的类称为本性类。

实际上，定义 1.1 是把“具有某种可描述的特性”加以限制与规范。为方便起见，数学上一般做如下规定：

用 $x\in Z$ 表示 x 是集合 Z 中的元素；

用 $x\notin Z$ 表示 x 不是集合 Z 中的元素；

$\{x|P\}$或$\{x:P\}$表示具有性质 P 的所有元素（事物）x 的全体所组成的集合；其中性质 P 可用文字加以叙述，也可由表达式给出，也可两者兼用之；

用 ϕ 表示空集，即不含任何元素的集合；

$Z\subseteq Y$ 表示集合 Z 中的任一元素均在集合 Y 中，并称 Z 为 Y 的子集；若 Z 是 Y 的子集，且 Z 中至少有一个元素 x 不在 Y 中，则称 Z 是 Y 的真子集，并记为：$Z\subset Y$；规定：空集是一切集合的子集。

例 2 几类常见的数集。

自然数集：$N=\{0,1,2,\cdots\}$

有理数集：$Q=\{x|\ x=\dfrac{p}{q},\quad p,q\text{为整数},\text{且}q\neq 0\}$

无理数集：$T=\{\text{全体无理数}\}$

实数集：$R=\{\text{全体实数}\}$

复数集：$C=\{a+bi|\ a,b$ 为实数，i 为虚单位，满足：$i^2=1\}$

区间集：设 a,b 为任意实数（或 $+\infty,-\infty$），且 $a\leqslant b$，称下列数集：

$[a,b]=\{x|\ x\in R,a\leqslant x\leqslant b\},\quad a,b\in R$；（闭区间）

$[a,b)=\{x|\ x\in R,a\leqslant x\leqslant b\},\quad a\in R$；（半开半闭区间）

$(a,b]=\{x|\ x\in R,a<x\leqslant b\},\ b\in R$；

$(a,b)=\{x|\ x\in R,a<x<b\}$。（开区间）

为区间集，上述区间集中 a,b 分别称为区间集的左右端点，a,b 均为实数时，称为有限区间集，否则称为无限区间集。

例 3 几类常见的函数集。

实系数多项式集：$P=\{\sum_{k=0}^{n}a_kx^k \mid n$ 为非负整数$,a_k\in R$，$k=0,1,\cdots,n\}$；

有理系数多项式集：$P_q=\{\sum_{k=0}^{n}a_kx^k \mid n$ 为非负整数$,a_k\in Q$，$k=0,1,\cdots,n\}$；

次数不超过 m 的实系数多项式集：$P_m=\{\sum_{k=0}^{m}a_kx^k \mid a_k\in R$，$k=0,1,\cdots,m\}$；

在区间$[a,b]$上具有直到 m 阶连续导数的函数集：

$C^m[a,b]=\{f(x)\mid f^{(k)}(x)$ 在$[a,b]$上连续，$0\leqslant k\leqslant m\}$；

特别地，$m=0$ 时

区间$[a,b]$上连续函数集：$C^0[a,b]=\{f(x)\mid f(x)$ 在$[a,b]$上连续$\}$。

例 4 几类常见的矩阵集。

$m\times n$ 阶矩阵集：$A_{m\times n}=\{(a_{ij})\mid a_{ij}\in R,1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n\}$；

m 阶方阵集：$A_m=\{(a_{ij})\mid a_{ij}\in R,1\leqslant i,j\leqslant m\}$；

m 阶下三角阵集：$B_{(m)}=\{(a_{ij})\mid a_{ij}\in R$，且$1\leqslant i<j\leqslant m$ 时$,a_{ij}=0\}$；

m 阶上三角阵集：$B^{(m)}=\{(a_{ij})\mid a_{ij}\in R$，且$1\leqslant j<i\leqslant m$ 时$,a_{ij}=0\}$。

例 5 集合的幂集。

由集合 A 的所有子集作为元素构成的集合，称为 A 的幂集合，记之为 2^A。比如：$A=\{1,2,3,4\}$，则

$$2^A=\{\phi;\{1\},\{2\},\{3\},\{4\};\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\};\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\};\{1,2,3,4\}\}$$

A 有 4 个元素，则 2^A 有 $2^4=16$ 个元素。一般，若 A 含有 n 个元素，则 2^A 含有 2^n 个元素。

1.2　集合的运算

集合的并、交、差运算是集合的最基本、最常用的运算。

集合的并运算:

$Z\cup Y$ 表示将集合 Z 的所有元素与集合 Y 的所有元素放在一起所形成的新集合，即 $Z\cup Y=\{x \mid x\in Z$ 或 $x\in Y\}$，称为集合 Z 与集合 Y 的并集。若 H 的元素是集合，则 $\bigcup\limits_{Z\in H} Z$ 表示 H 中所有集合的并，即

$$\bigcup_{Z\in H} Z=\{x \mid x \text{ 属于 H 中的某一集合}\}$$

常见的一种情况是：设 $Z_1,Z_2,\cdots Z_n,\cdots$ 是集合列，则

$$\bigcup_{k\in N} Z_k=\{x \mid \exists k\in N, \text{使得 } x\in Z_k\}$$

称为集合列 $Z_1,Z_2,\cdots Z_n,\cdots$ 的并，又可简单记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$；

特别地，若存在常数 n 使得 $k>n$ 时，Z_k 为空集，则 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$ 成为有限个集合的并，即

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k=\bigcup_{k=1}^{n} Z_k$$

有时亦记

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k=\sum_{k=1}^{\infty} Z_k$$

集合的交运算:

$Z\bigcap Y$ 表示既在集合 Z 中又在集合 Y 中的元素全体所组成的集合，称为集合 Z 与集合 Y 的交，即 $Z\bigcap Y=\{x\mid x\in Z \text{ 且 } x\in Y\}$。

$\bigcap\limits_{Z\in H} Z$ 表示 H 中所有集合的交，即

$$\bigcap_{Z\in H} Z=\{x\mid \forall Z\in H\text{，均有 } x\in Z\}$$

与集合的并一样，常见的一种情况便是集合列 $Z_1,Z_2,\cdots Z_n,\cdots$ 的交：

$$\bigcap_{k\in N} Z_k=\bigcap_{k=1}^{\infty} Z_k=\{x;\forall k\in N,\text{均有 } x\in Z_k\}$$

特别地，$\bigcup\limits_{i=1}^{n} Z_i$ 表示有限子集合 $Z_1,Z_2,\cdots Z_n$ 的交。

集合的差运算:

$Z-Y$ 表示集合 Z 中的不在集合 Y 中的元素的全体，即

$$Z-Y=\{x\mid x\in Z,\text{且 } x\notin Y\}$$

称为集合 Z 与集合 Y 的差集。

关于集合的并、交、差运算，有以下运算规则（读者不难由定义出发给出证明）。

定理 1.1 (1) $X\bigcup Y=Y\bigcup X$， $X\bigcap Y=Y\bigcap X$； (交换律)

(2) $X\bigcup(Y\bigcup Z)=(X\bigcup Y)\bigcup Z$,

$X\bigcap(Y\bigcap Z)=(X\bigcap Y)\bigcap Z$; (结合律)

(3) $X\bigcap(Y\bigcup Z)=(X\bigcap Y)\bigcup(X\bigcap Z)$,

$X\bigcap(\bigcup\limits_{Y\in H} Y)=\bigcup\limits_{Y\in H}(X\bigcap Y)$; (分配律)

(4) $X\bigcup X=X\bigcap X=X$；

(5) $X\bigcup\phi=X, X\bigcap\phi=\phi$。

对例 2 给出的集，显然有

$$Q\subset R,T\subset R,R=Q\cup T,Q\cap T=\varnothing,R-Q=T$$ 。

例 6 令 $A_i=\left[-1+\frac{1}{i},\ 1-\frac{1}{i}\right]$，$i=1,2,\cdots$，则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=(-1,\quad 1) \tag{1.1}$$

令 $B_i=\left[-1-\frac{1}{i},\quad 1+\frac{1}{i}\right],C_i=\left(\ -1-\frac{1}{i},\quad 1+\frac{1}{i}\right)$，$i=1,2,\cdots$，

则

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i=\bigcap_{i=1}^{\infty}C_i=[-1,\quad 1] \tag{1.2}$$

证明：只证式（1.1）成立，式（1.2）的正确性可仿照证明。

由于

$$x\in\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Leftrightarrow\exists k,k\geqslant 1,x\in A_k\Leftrightarrow\exists k,k\geqslant 1,-1+\frac{1}{k}\leqslant x\leqslant 1-\frac{1}{k}$$
$$\Leftrightarrow -1<x<1\Leftrightarrow x\in(-1,\quad 1)$$

即，$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=(-1,\quad 1)$。

集合的 Descartes 积运算:

集合除了以上并、交及差运算之外，还有一类被称为 Descartes 积运算的重要运算。

设 X，Y 是给定的集合，称

$$X\times Y=\{(x,y):x\in X,y\in Y\}$$

为集合 X 与集合 Y 的 Descartes 积。两个集合的 Descartes 积运算，可以推广到有限个甚至无限个集合的 Descartes 积运算。

设 X_1,X_2， $\cdots$， $X_n,\cdots$ 是给定的集合列，记

$$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|\,x_k\in X_k,k=1,2,\cdots,n\}$$

$$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n\cdots=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)|\,x_k\in X_k,k=1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

实平面点集 R^2 可看成是实数集 R 与自身的 Descartes 积集；