

内 容 提 要

为了贯彻新的数学教学大纲关于形成学生“用数学的意识”的精神,适应高考“加强应用”的需要,本书汇编了紧密联系生活、生产、经济等方面实际的应用题,涉及的知识内容与新的大纲基本一致.

全书按知识点分为11章,内容包括:简单问题的计算、方程和方程组、平面几何和立体几何、函数及其图象、三角函数、直线和二次曲线、不等式和极值、数列和极限、排列组合和概率统计、复数、线性规划等.这些题目极大多数是作者自编或改编的,部分选自国外资料.由于应用题都有实际背景,因此,读来亲切,富有解决问题的欲望.本书对学生增强运用数学知识的意识,提高分析问题和解决问题的能力有很大的帮助.

书末附有近20年来我国高考应用题.

本书可作为高中数学教学补充读物,也可供高中三年级总复习参考.

序

1993年,严士健、苏式冬和我访问国家考试中心,建议在高考试题中加入数学应用题.杨学为主任、任子朝同志深表赞成,几经宣传和努力,遂有近几年来高考中数学应用题的重视.从数学素质教育的发展看,这一变化恐怕是历史性的.但愿这一势头能保持下去,并形成数学教育界的共识.

中国古代数学一向有实用的传统.数学教学中重视数学应用也并非新问题.在小学里,数学应用题是教学的重点和难点,从未有人持异议.到了初中,学了平面几何,数学品味趋于抽象,逻辑推理不断加强,数学应用渐有淡出之势.不过,数学应用并未绝迹,诸如浓度问题、行程问题等仍有出现,平行四边形与铁栅门的关系等也总要提及.只是被某种错误观念的误导,大家不太重视罢了.

一到高中,情况变得越发严重.一个时期以来,主张数学应用被称为“实用主义”、“短视行为”、“犯文革时期的错误”,似乎数学离现实生活越远越好.“掐头去尾烧中段”式的纯数学推理,成为唯一的选择.高考题中出现应用题,本是顺理成章的例行公事,到头来竟要上电视特别“宣传公告”,也是够令人遗憾的了.

那么,高中数学究竟该教怎样的应用题?有多少应用题的类型?有哪些应用题可考?数学教学和高考数学命题的实践已向我们提出更高的要求.我们曾有一册《中学数学问题集》,那是给教师看的.现在,沈翔、赵小平、康合太三位老师为高中学生编了这些数学应用题,按数学专题编排,便于掌握和复习,可以说填补了一项空白.

据说,“第二次世界大战以来,数学上最重要的变化是数学应用的加强”.我国的数学发展如何重视应用,乃是一篇大文章.《高中数学应用题200例》的出版,也许是这篇大文章中的一个小段落.编写应用题不容易,这大概是不错的.

隆冬时节,盼望春消息.任重而道远,愿和大家共勉.审稿之余,兼有此序.

张奠宙

1997年元旦于华东师大

前 言

数学应用和数学的历史可说一样长。古代结绳记数、丈量土地、分配财产导致算术、代数、几何的相继产生。我国最著名的数学典籍《九章算术》就是246个实际应用题的汇集。注重实际应用，是中国古代数学的优良传统。

一个伟大的数学学派曾在古希腊出现。他们追求精神上的创造，研究纯粹的、抽象的数学，从公理出发，运用逻辑的演绎推理，形成严密的学术体系。一个杰出的代表是欧几里得的《几何原本》。通篇是定义、定理、证明、推论，至于有什么用，他们是不管的。它体现了体力和脑力劳动分工之后，科学发展的新阶段：创造了纯粹而严密的科学体系，却远离了现实生活。

从此以后，数学就从两个方向发展着。一方面是纯粹数学。例如哥德巴赫猜想、费马大定理等世界名题，成为世人关注的焦点，一旦有所突破，可被视为人类思想史上的大事。至于非欧几何、拓扑学、抽象群论等等，虽说开始时看不到和实际的直接关系，但是只要是好的数学知识，往往在若干年后会发现有实际应用。陈省身在40年代研究的纤维丛理论，到了70年代，竟成为物理学上由杨振宁等发现的规范场理论的数学工具，这种世界的统一性，令人不可思议。

另一方面,应用数学在不断地迅猛发展.现实世界毕竟是数学发展的源泉.从17世纪以来,社会发展和生产需要一直是数学发展的主要推动力.牛顿从物理学需要发明了微积分,反过来,第谷用数学方法发现了海王星;蒸汽机推动了运动学和热力学的发展,促使数学分析学走向新的高峰;电磁学的基本规律是用微分方程写的.时至20世纪,喷气机和航天器的制造与导航,CT扫描的医疗设备,组织大规模战争的运筹方案,本质上都是数学技术.由于数学家的工作大都是在前期和幕后完成的,当鲜花和掌声送给一项重大的科学成就的时候,其中的数学含量,数学技术的重要性往往不被人们所知道.一个鲜明的反差是,纯粹数学的成果是数学家独立完成的,往往更容易为人们所熟知.在中国,很少人知道我国数学家在制造原子弹、导弹和卫星中的作用,而陈景润研究哥德巴赫猜想的成就却是家喻户晓的.这种情况,在中学数学教学中也有所反映.

数学一直是中学里的主干课程.为什么要学那么多的数学?一般认为,数学是“能力筛子”、“思想的体操”,无非是“升学需要”、“思想健身”而已.至于有什么用,对不起,不必问.由于大跃进年代,文革时期“过火地”联系实际,破坏了数学知识的系统性,一旦拨乱反正,便专注于纯粹数学的要求.一个时期以来,人们提起“数学应用”,犹如谈虎而色变,以至许多人把数学应用看作“实用主义”,讥为“短视行为”.其实,数学应用能力是基础数学教育的重要组成部分.数学是一个整体.数学以实践为源头,又以实践为终结.有头有尾的数学才是完整的数学知识.中学里的数学内容,多半是纯粹的数学基础知识.然而,接触现实生活中的数学现象,获取比较完整的数学知识,

是必要的,也是可能的.那种“掐头去尾烧中段”的做法,把数学知识局限在逻辑推导的范围里,乃是对数学的一种曲解.受以上偏见的影响,高考数学试卷中一度“纯粹数学化”,应用题几乎绝迹.这几年来,国家考试中心做了大量的工作,情况才有了根本的改变.

现在国家提倡数学素质教育,而提高数学应用能力是其中的重要一环.本书收入的这些应用题,就是试图为高中数学教学提供一些范例.我们的宗旨是,围绕“高中数学教学大纲”的基本要求,避免出现其它行业的生僻技术名词,尽量贴近学生的日常生活,特别是反映社会主义市场经济的现实.许多题目是自编的,或根据已有题目改编的,相当一部分,参考了国际上流行的应用题.过去的某些应用题,诸如行程问题、工程问题、浓度问题等之类,我们只选用、改编一小部分.

最后,让我们引用1996年刚出版的《全日制普通高级中学数学教学大纲》(供试验用)中的两段话作为本前言的结束:

“高中数学的教学目的是:使学生学好从事社会主义现代化建设和进一步学习所必需的代数、几何的基础知识和概率统计、微积分的初步知识,并形成基本技能;进一步培养学生的思维能力、运算能力、空间想像能力,以逐步形成运用数学知识来分析和解决实际问题的能力;进一步培养良好的个性品质和辩证唯物主义观点.”

“解决实际问题的能力是指:会提出、分析和解决带有实际意义的或在相关学科、生产和日常生活中的数学问题;会使用数学语言表达问题、进行交流,形成用数学的意识.”

这是我们大家共同的努力目标,但愿本书能为此添砖加

瓦,起一点抛砖引玉的作用.

本书编者
1996年8月

目 录

前言	(1)
----------	-------

第一章 简单问题的计算	(1)
-------------------	-------

- 1.1 崖壁回音 (1) 1.2 公平收购 (1) 1.3 提价方案 (2) 1.4 跑步和步行 (3) 1.5 出售时机 (4) 1.6 狭路相逢 (4) 1.7 串联电阻 (5) 1.8 统计错误 (7) 1.9 测绘队人数 (8) 1.10 稀释溶液 (9) 1.11 木料密度 (10) 1.12 卸车地点 (11)

第二章 方程和方程组	(13)
------------------	--------

- 2.1 国民经济翻一番 (13) 2.2 改善住房 (13) 2.3 驾驶员血液中的酒精含量 (14) 2.4 大明、小明赶火车 (14) 2.5 太阳、地球对火箭的引力 (16) 2.6 摩托车速度和步行速度 (17) 2.7 飞机的出发时间 (18) 2.8 追捞救生圈 (19) 2.9 价格膨胀率 (20) 2.10 重铸新合金 (21) 2.11 煤气收费标准 (22) 2.12 订货零件数 (24) 2.13 航速问题 (24) 2.14 轿车的耗资 (26) 2.15 等分液体 (27)

第三章 平面几何和立体几何	(29)
---------------------	--------

- 3.1 材料利用率 (29) 3.2 地毯变小了 (30) 3.3 套筒的内径 (32) 3.4 量杯上的刻度 (32) 3.5 工件体积 (33) 3.6 坡面上的树影 (34) 3.7 S形上坡 (35) 3.8 遮阳棚的角度 (37)

- 3.9 空心球的沉浮 (39) 3.10 铆钉的重量 (40) 3.11 缠绕铁丝 (41) 3.12 蜂窝煤的热效应 (43) 3.13 较短航线 (45)
3.14 飞机的速度 (47) 3.15 飞行的高度 (48) 3.16 飞行安全 (50)

第四章 函数及其图象..... (53)

- 4.1 跳伞后的下落距离 (53) 4.2 运费函数 (54) 4.3 计算机的成本、售价和利润 (55) 4.4 舞会盈利额 (56) 4.5 交纳公积金 (57) 4.6 修理厂的位置 (59) 4.7 折扣商品的标价 (59) 4.8 子弹的高度 (60) 4.9 高山气温 (60) 4.10 旋转的风车 (61) 4.11 船间距离 (63) 4.12 快车追慢车 (64) 4.13 包装与价格 (65) 4.14 心脏病发病人数 (66) 4.15 咖啡冷却时间 (67) 4.16 镭的衰变 (69) 4.17 古莲子的年代 (69) 4.18 月产量函数 (71) 4.19 支架的最大承受力 (72)

第五章 三角函数..... (75)

- 5.1 东方明珠塔的高度 (75) 5.2 最佳位置 (75) 5.3 照明灯的高度 (77) 5.4 天线的高度 (79) 5.5 光线折射的距离 (80) 5.6 海上测距 (81) 5.7 塔与路的距离 (82) 5.8 滚珠的个数 (83) 5.9 两人距离 (84) 5.10 看卫星的范围 (86) 5.11 两地间的距离 (87)

第六章 直线和二次曲线..... (90)

- 6.1 加工吊环 (90) 6.2 模糊的图纸 (91) 6.3 放映机的反光镜面 (93) 6.4 空中缆线 (94) 6.5 弹道曲线 (96) 6.6 射箭的高度 (97) 6.7 送肥区域 (99) 6.8 通风塔的半径 (101) 6.9 抛体的最远距离 (102) 6.10 水库溢流 (103) 6.11 标

准圆柱的直径 (106) 6.12 台风经过的时间 (108) 6.13 烟筒接口 (109) 6.14 两人合用一辆自行车 (111) 6.15 直线围成的曲线 (114)

第七章 不等式和极值.....(117)

7.1 维生素的最经济搭配 (117) 7.2 窗框尺寸 (118) 7.3 事故的主要责任者 (119) 7.4 光线的强度 (120) 7.5 附加税的确定 (121) 7.6 经营效益 (121) 7.7 商品的价位 (123) 7.8 最大限速 (124) 7.9 漏斗的最大容量 (125) 7.10 漏斗的最省用料 (127) 7.11 行车时刻表的误差 (129) 7.12 可变电阻 (130) 7.13 船速和费用 (131) 7.14 选点筑路 (132) 7.15 圆桶的最佳尺寸 (134) 7.16 购粮方式 (135) 7.17 存款期限 (137) 7.18 木梁的强度 (138) 7.19 进货次数 (139) 7.20 最佳调拨 (140) 7.21 工人分组 (143)

第八章 数列和极限.....(145)

8.1 圆钢堆垛 (145) 8.2 胶片的长度 (146) 8.3 收割庄稼 (148) 8.4 国王的赏赐 (148) 8.5 资金增长率 (149) 8.6 鱼产量的增减 (150) 8.7 匹萨饼的块数 (151) 8.8 兔子的繁殖 (152) 8.9 登楼方案 (154) 8.10 球的弹跳距离 (155) 8.11 分牛的传说 (156) 8.12 图形序列的周长和面积 (158) 8.13 配制农药 (160) 8.14 餐厅选菜 (162) 8.15 零存整取的利息 (163) 8.16 如果没买车 (164) 8.17 分期付款的方案 (165) 8.18 筹款购房计划 (166) 8.19 技术改造 (167) 8.20 购置和租赁 (168) 8.21 投资方案的选择 (170) 8.22 平均年成本 (170) 8.23 选购发动机 (172) 8.24 事故赔偿

金 (173) 8.25 木材砍伐量 (174) 8.26 投资回收 (176)

8.27 贷款经营 (177) 8.28 闸门的压力 (179)

第九章 排列组合和概率统计.....(181)

9.1 电话号码升位 (181) 9.2 选派翻译 (181) 9.3 焊接点

脱落 (182) 9.4 高考志愿表 (183) 9.5 弹子滚动 (184)

9.6 抽签摸彩 (186) 9.7 六面骰子和十二面骰子 (187) 9.8

限时约会 (189) 9.9 投篮命中率 (189) 9.10 销售额评比

(190) 9.11 农业生产规模 (192) 9.12 共和党和民主党的

席位 (193) 9.13 风险决策 (194) 9.14 申购者摇号购股票

(195)

第十章 复数.....(197)

10.1 荒岛寻宝 (197) 10.2 行船与风速 (198) 10.3 物体平

衡 (200) 10.4 草原漫步 (201)

第十一章 线性规划.....(203)

11.1 最佳时速 (203) 11.2 最少用料 (204) 11.3 最大利润

(206) 11.4 养鸡场的围栏 (208)

附录 近20年高考应用题汇编.....(211)

后记.....(241)

第一章 简单问题的计算

1.1 崖壁回音

正以10米/秒的车速驶离一高山崖壁的汽车,驾驶员鸣笛后4秒钟听到回声,已知声音在空气中传播的速度为340米/秒,则驾驶员开始鸣笛处到山崖壁的距离是多少米?

解 鸣笛声从发出至驾驶员听到回声共行了

$$340 \times 4 = 1\,360(\text{米}).$$

因汽车鸣笛后4秒钟共行路程为

$$10 \times 4 = 40(\text{米}),$$

所以汽车鸣笛处离山崖壁的距离为

$$(1\,360 - 40) \div 2 = 660(\text{米}).$$

1.2 公平收购

某收购站分两个等级收购小麦,一等小麦每千克为 a 元,二等小麦每千克为 $b(b < a)$ 元,现有一等品小麦 x 千克,二等品小麦 y 千克,若以两种价格的平均数收购,是否公平合理?

解 平均价为每千克 $\frac{a+b}{2}$ 元,若以此价统一收购的话,收购站付出 $\frac{(x+y)(a+b)}{2}$ 元,实际上收购站应付 $(ax + by)$ 元.

下面试用差值法比较 $ax + by$ 与 $\frac{(x+y)(a+b)}{2}$ 的大小.

$$\begin{aligned} & ax + by - \frac{(x+y)(a+b)}{2} \\ &= ax + by - \frac{ax + by + ay + bx}{2} \\ &= \frac{ax + by - ay - bx}{2} \\ &= \frac{(a-b)(x-y)}{2}. \end{aligned}$$

因此:

- (1) 若 $x > y$, 则收购站受益;
- (2) 若 $x < y$, 则收购站吃亏;
- (3) 若 $x = y$, 则两种收购方式付款额相等.

说明 此题的结论凭直觉也可猜出. 但为了严格论证, 还是要精确地计算.

1.3 提价方案

某种饮料分两次提价, 提价方案有三种. 方案甲是: 第一次提价 $m\%$, 第二次提价 $n\%$; 方案乙是: 第一次提价 $n\%$, 第二次提价 $m\%$; 方案丙是: 先后提两次, 每次提价 $\frac{m+n}{2}\%$. 如果 $m > n > 0$, 那么提价最多的方案是哪一种?

解 设饮料原价格为 1, 那么按甲提价方案两次提价后的价格为:

$$(1 + m\%)(1 + n\%);$$

按乙提价方案两次提价后的价格为:

$$(1 + n\%)(1 + m\%);$$

按丙提价方案两次提价后的价格为: $(1 + \frac{m+n}{2}\%)^2$.

显然甲、乙两种方案最终价格是一致的, 因此, 只需比较 $(1 + \frac{m+n}{2}\%)^2$ 与 $(1+m\%)(1+n\%)$ 的大小.

$$(1+m\%)(1+n\%) = \frac{100^2 + 100(m+n) + mn}{100^2},$$

$$(1 + \frac{m+n}{2}\%)^2 = \frac{100^2 + 100(m+n) + \frac{(m+n)^2}{4}}{100^2}.$$

因此只要比较 mn 与 $\frac{(m+n)^2}{4}$ 的大小即可.

因为 $m > n > 0$ 时, 有

$$m^2 + n^2 > 2mn,$$

所以
$$\frac{(m+n)^2}{4} > mn.$$

故
$$(1 + \frac{m+n}{2}\%)^2 > (1+m\%)(1+n\%).$$

因此, 丙种方案提价最多.

1.4 跑步和步行

王伟同学在上学途中, 用前一半的时间跑步, 后一半的时间步行; 而在放学途中, 在前一半路程内跑步, 后一半路程内步行. 问王伟同学在上学和放学途中, 哪一次所化的时间较少?

解 因为王伟在上学途中, 用前一半时间跑步, 后一半时间步行, 由于跑步速度快于步行速度, 所以, 他在上学途中跑步路程大于步行路程, 即跑步路程大于全程的一半. 而在放学途中, 跑步路程恰好是全程的一半, 这就是说, 在上学途中, 王伟较多地采用了较快速度的行走方式(跑步), 所以他在上学途中所化的时间比放学途中所化的时间少.

说明 求得本题答案的关键是“跑比走快”. 这是常识, 并

非数学定理. 因此, 解应用题常常要根据问题的情景, 运用“常识”来求得答案. 这和纯数学题全部运用数学来求解有所不同.

1.5 出售时机

有一批货, 如果本月初出售, 可获利100元, 然后将本利都作某项投资, 已知该项投资的月息为2.4%; 如果下月初出售, 可获利120元, 但要付5元保管费, 试问这批货何时出售较好(本月初还是下月初)? 请说明理由.

解 设这批货的成本费为 a 元, 若本月初出售, 到下月初共获利润:

$$100 + (a + 100) \times 2.4\% = 0.024a + 102.4 (\text{元}).$$

若下月初出售, 共获纯利润 $120 - 5 = 115$ (元).

当 $0.024a + 102.4 > 115$, 即 $a > 525$ (元) 时, 本月初出售较好;

当 $0.024a + 102.4 = 115$, 即 $a = 525$ (元) 时, 本月初或下月初出售所获利润相同;

当 $0.024a + 102.4 < 115$, 即 $a < 525$ (元) 时, 下月初出售较好.

1.6 狭路相逢

大小汽车在狭窄的道路上相遇, 必须其中一车倒车让道才能通过. 已知小汽车的速度是大汽车的3倍, 小汽车倒车的距离是大汽车的10倍. 如果倒车速度是正常速度的 $\frac{1}{5}$, 问应该由哪辆车倒车才能使两车尽快都通过这段狭窄的道路?

解 设大汽车的速度为 v , 倒车的距离为 x , 于是小汽车速

度为 $3v$, 倒车的距离为 $10x$.

大汽车倒车所需时间为

$$t_{\text{大}} = \frac{x}{\frac{v}{5}} = \frac{5x}{v};$$

小汽车倒车所需时间为

$$t_{\text{小}} = \frac{10x}{\frac{3v}{5}} = \frac{50x}{3v}.$$

所以, $t_{\text{大}} < t_{\text{小}}$.

而大汽车倒车后再经过狭窄的道路所需时间:

$$t'_{\text{大}} = \frac{x + 10x}{v} = \frac{11x}{v}.$$

当大汽车倒车时小汽车跟着前进, 乘机通过窄道, 因此在这种情况下, 两辆汽车都通过窄道总共需时

$$t_{\text{大}} + t'_{\text{大}} = \frac{5x}{v} + \frac{11x}{v} = \frac{16x}{v}.$$

由于 $t_{\text{大}} + t'_{\text{大}} < t_{\text{小}}$, 所以应当大汽车倒车才能使两车尽快通过这段窄道.

说明 本题解得 $t_{\text{大}} < t_{\text{小}}$ 后, 就下论断是不正确的. 因为, 一辆汽车倒车时, 另一辆汽车完全可以紧跟着前进, 所以只有计算大汽车倒车所需的时间与它倒车后再通过窄道所需时间的总和, 小于小汽车倒车的时间(因而必小于小汽车倒车的时间与它倒车后再通过窄道所需时间的总和), 才能有效地加以说明.

1.7 串联电阻

现有一批 3Ω 和 5Ω 的两种电阻, 能否用串联的方式, 得到

$n\Omega$ 的电阻(n 为正整数)? 其中 n 是大于或等于 8 的任意整数.

分析 我们知道串联电路的整个电阻值是各个电阻值之和. 若 $n = 8$, 取 3Ω 和 5Ω 电阻各一只串联即得; 若 $n = 9$, 取 3 只 3Ω 电阻串联即得; 若 $n = 10$, 取 2 只 5Ω 电阻串联符合要求; 因此猜想对任意整数 $n (n \geq 8)$ 取若干只 3Ω 和 5Ω 电阻串联即可得到.

下面用数学归纳法证明这个结论.

证 (1) 当 $n = 8$ 时, 取 3Ω 和 5Ω 电阻各一只串联即得, 命题成立.

(2) 假设 $n = k$ 时, 命题成立, 即需要 $k\Omega$ 电阻时, 只要取 5Ω 电阻 a 个, 3Ω 电阻 b 个串联即得, 也就是 $k = 5a + 3b$.

则当 $n = k + 1$ 时,

$$k + 1 = 5a + 3b + 1.$$

1° 如果 $a \neq 0$, 那么

$$k + 1 = 5(a - 1) + 3(b + 2).$$

也就是说, 取下一只 5Ω 电阻换上两只 3Ω 电阻即符合要求.

2° 如果 $a = 0$, 则 $b \geq 3$, 那么

$$k + 1 = 5 \times 2 + 3(b - 3).$$

也就是说, 只需取下其中的 3 只 3Ω 电阻换上 2 只 5Ω 电阻即符合要求.

所以当 $n = k + 1$ 时, 命题也成立.

根据以上 (1) 和 (2) 可知, 命题对于任何大于或等于 8 的自然数都成立.

即用这些电阻可串联成任何大于或等于 8Ω 的电阻.