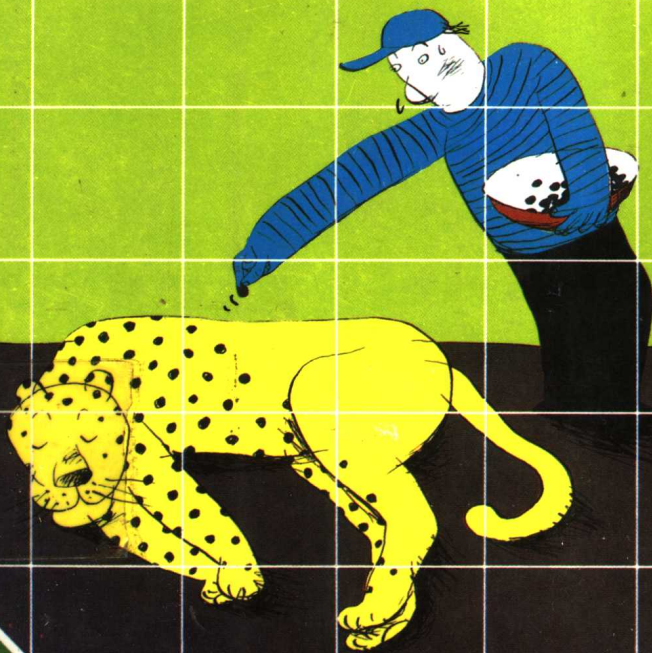


新世紀叢書

靈活思路・提昇數學解題技巧

妙解趣味 數學100

譯者：曾煥華 審定者：黃世璋



銀禾文化事業有限公司

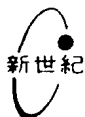


108

新世紀叢書

妙解趣味 數學100

銀禾文化事業公司 印行



108
新世紀叢書

妙解趣味數學100

主 編：新世紀編輯小組

審定者：黃世璋

譯 者：曾煥華

出版者：銀禾文化事業有限公司

發行人：陳俊安

地 址：台北市光復南路415巷252號1樓

電 話：7542968・7542969

郵 撥：0736622-3

定 價：新台幣110元

印製者：太原彩色印製企業有限公司

新聞局登記證局版台業字第3292號

1989年8月初版

■版權所有・不准翻印■

序

在科學進步，知識爆發的現代世界中，一個國家民族的興衰取決於全體國民是否擁有現代化的知識。一個國家即使擁有很多進步的科學機器，但是人民的思想、觀念仍停留在幾十年前的舊巢中，那將是滿清時代所追求的「船堅礮利」翻版而已，完全無補於事，因此普及全民知識是一件刻不容緩之事。

本公司有鑑於此，特成立新世紀編輯小組，無論就自然科學或社會科學，選定重要題目編輯成一系列叢書，逐冊推出，並且以普及版方式印製，希望這一系列的叢書能提供給國人一連串新的知識與觀念。

一件事情的成功，固然是要在事前有妥善規劃與謹慎的執行，而一套叢書發行的成功除了要有上述的要件外，更需要有廣大讀者的支持和批評。希望讀者們能在閱讀本書後給我們寶貴的意見，做為我們編列這套書的參考，謝謝！

陳俊宏

於一九八五年十一月

目 錄

前 言	1
第1章 數的問題	3
第2章 圖形的問題	41
第3章 數的應用問題	99
第4章 圖形的應用問題	139
第5章 數及圖形的應用問題	171
第6章 數的高級應用問題	211

前 言

很多人以為基礎的數學很容易。但是，若從另一個角度來看，則它的變化亦無窮。只要您瞭解本書所介紹的 100 個問題後，您會覺得此言不虛。這 100 個問題，是以日本初中入學考試的試題為中心蒐集的，其程度之高以及內容之深令人驚異。如果能輕易地解它們，則即使你是大人也算是天才。

在我們國中的課程裡，關於代數的基礎學習有一次方程式、二次方程式、聯立方程式，關於幾何的基礎學習有三角形、四邊形、圓形等諸性質及畢氏定理，此外也學習或然率、統計的基本觀念。因此，在解問題時，可以活用那些知識。但是，因為小學並沒有學習代數或幾何，故在解相同的問題時，無法使用那種高等的知識。因此，必須利用特別的解題技巧來解題。這些技巧大多想的很巧妙，我們可以說比國中的數學高級。只要聯想著名的「雞兔問題」，就容易想像此點。用巧妙的方法解出小學算術的「雞兔問題」，在國中用聯立方程式就可以輕易地解出來。

本書介紹的 100 個問題之中，有 90 個是從日本初中

入學考試的試題中精選的。但是，爲了調整樣式，有些改變了措詞，或修改了內容。其他 10 題，屬於古典的名作或著者的創作。在寫這樣的書時，難免出現無論如何都想添加的問題，故特別註明「假想題」，以資區別。

本書的 100 題都是初中以下程度的同學可以解的問題。事實上，其中某些問題的解答，即使是小學生也能理解。但是，如果沒有發現解法的技巧，則恐怕高中生甚至大學生也不會解。這些雖是日本初中的入學考試試題，却是絕不能被忽視的。無論你就讀於國中、高中或大學，請一定用這 100 題來訓練你的思考能力，又如你已在社會上服務，亦可利用它來培養你洞察及推理的能力。





問題 1

9 除以 10 的結果，可以用分子都是 1 的 3 個不同的正分數的和表示為，

$$9 \div 10 = \frac{1}{\square} + \frac{1}{\square} + \frac{1}{\square}$$

請在 $\square$ 內填寫適當的正整數。

<提示>

若欲使右邊 3 個分數的和等於 $\frac{9}{10}$ ，則其中的最大分數不能小於 $\frac{3}{10}$ 。

【解答】

假設 3 個分數之中最大的為 $\frac{1}{3}$ ，則由於是 3 個不同分數的和，故即使其和為最大，也只變成

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$$

這小於 $\frac{9}{10}$ ，故不合。因此知道，3 個分數中最大的必定是 $\frac{1}{2}$ 。

假定次大的分數為 $\frac{1}{3}$ ，則

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}, \text{ 而 } \frac{9}{10} - \frac{5}{6} = \frac{1}{15}$$

因為右邊的分子恰好等於 1，故

$$\frac{9}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

就對了。

但是，或許有其他的解，若設次大的分數為 $\frac{1}{4}$ ，則對應於 $\frac{1}{15}$ 的值變成 $\frac{3}{20}$ ，而不合於所求。若再設次大的分數為 $\frac{1}{5}$ ，則對應於 $\frac{1}{15}$ 的值變成 $\frac{1}{5}$ ，與题目的不同正分數規定相違背，結果也失敗。又，同時知道未滿 $\frac{1}{5}$ 的分數不必查，故答只有一種。

問題 2

5 位整數 $80\square\square 9$ ，不論用 13 除或用 37 除，餘數都是 2。請把正確的數字填入 $\square$ 內。

— <提示> —

不限於五位整數，先找出不論用 13 或用 37 除都剩餘 2 的任意整數。這個整數必然成為解題的關鍵。

。



【解答】

在不論用 13 或用 37 除都剩餘 2 的整數之中，最簡單的是 2 本身。那麼，由於 13 及 37 都是質數，故在 2 加上 13 與 37 的最小公倍數 481 而變成 483 後，也會只有同樣的性質。那麼，依次加 481 後所得的數 964, 1445, 1926 ……等，也具有同樣的性質。用與此相同的操作，一直計算至合於 80 □□ 9 為止即可，但這樣很麻煩。

因此，爲了大致估計，以 481 除 80,009 得

$$80,009 \div 481 \div 166.34$$

那麼，必然具有與

$$2 + 481 \times 166 = 79,848$$

相同的性質。並且，如果這樣，則依次加 481 也不會計算變得很麻煩。若實際計算即得

$$79,848 + 481 = 80,329$$

$$80,329 + 481 = 80,810$$

$$80,810 + 481 = 81,291$$

故此 5 位整數爲 80,329，若以 13 除則商數爲 6179、餘數爲 2，若以 37 除則商數爲 2171、餘數爲 2。

問題 3

在 8 張紙各寫 1 個數字，各 2 張成組做了下述的計算。

$$\boxed{1} \boxed{9} + \boxed{7} \boxed{5} + \boxed{4} \boxed{8} + \boxed{2} \boxed{6} = 168$$

把左邊的 4 組數的個位數字與十位數字對調

例如 $\boxed{1} \boxed{9} \rightarrow \boxed{9} \boxed{1}$

使右邊的和等於 222

$$\square\square + \square\square + \square\square + \square\square = 222$$

但是，不論對調幾組的個位數及十位數都可以。

— <提示> —

應該調查把個位數與十位數對調後，數如何增減。
如果盲目地對調，則成功的希望很少。

【解答】

若就 4 組數對調個位數與十位數，即變成

$$19 \rightarrow 91 \quad (\text{增加 } 72)$$

$$75 \rightarrow 57 \quad (\text{減少 } 18)$$

$$48 \rightarrow 84 \quad (\text{增加 } 36)$$

$$26 \rightarrow 62 \quad (\text{增加 } 36)$$

另一方面，若想把右邊的和從 168 變成 222，則需要

$$168 \rightarrow 222 \quad (\text{增加 } 54)$$

因此，不能只就一組數對調。

如果考慮就 2 組數的對調，則由於

$$72 - 18 = 54$$

而得

$$\boxed{9}\boxed{1} + \boxed{5}\boxed{7} + \boxed{4}\boxed{8} + \boxed{2}\boxed{6} = 222$$

又，若考慮就 3 組數的對調，則由於

$$36 + 36 - 18 = 54$$

而得

$$\boxed{1}\boxed{9} + \boxed{5}\boxed{7} + \boxed{8}\boxed{4} + \boxed{6}\boxed{2} = 222$$

最後若考慮關於 4 組數的對調，則不能增加 54。因此，使和等於 222 的換位有 2 種。在此種問題，如果求出 1 種答就放心，則未免危險。

問題 4

有 4 個數 a 、 b 、 c 、 d ，其和等於 90。如果 a 加 2、 b 減 2、 c 乘以 2、 d 除以 2 後，其和亦為 90。試求 a 、 b 、 c 、 d 4 個數。

<提示>

在原數加 2 及減 2 的簡單。問題在於如何考慮乘以 2 及除以 2 的。

【解答】

由於 $a + 2$ 及 $b - 2$ 為相同的數，若設此處為 k ，則 $k - 2$ 就是 a ，而 $k + 2$ 就是 b ，且 a 與 b 的和就等於 $2k$ 。

另一方面，由於 c 乘以 2 的與 d 除以 2 的為同一數，故此數除以 2 的就是 c ，此數乘以 2 的就是 d 。除以 2 等於乘以 0.5，故 c 與 d 的和，等於變成相同的數的 2.5 倍（ $= 0.5 + 2$ ）。

如此，在從變成相同的數反過來看 a 、 b 、 c 、 d 時， a 與 b 的和等於變成相同的數的 2 倍， c 與 d 的和等於變成相同的數的 2.5 倍。結果，加 a 、 b 、 c 、 d 4 數的和，等於變成相同的數的 4.5 倍（ $2 + 2.5$ ）。因為此和為 90，故變成相同的數，就是

$$90 \div 4.5 = 20$$

因此，最初的 a 、 b 、 c 、 d 為

$$a = 20 - 2 = 18$$

$$b = 20 + 2 = 22$$

$$c = 20 \div 2 = 10$$

$$d = 20 \times 2 = 40$$