

算學小叢書

三 角 法

三 角 函 數

林 鶴 一 著

駱 師 曾 譯

商 務 印 書 館 發 行

中華民國二十二年四月初版  
中華民國二十三年九月三版

(51288·3)

算學  
小叢書  
三角法——三角函數一冊

每冊定價大洋肆角

外埠酌加運費郵費

·60

\*\*\*\*\*  
版 翻  
權 印  
所 必  
有 究  
\*\*\*\*\*

原 著 者 林 鶴 一

譯 述 者 駱 師 曾

發 行 人 王 雲 五  
上海河南路

印 刷 所 商 務 印 書 館  
上海河南路

發 行 所 商 務 印 書 館  
上海及各埠

# 目 次

<b>第一章 測角法</b> .....	<b>1</b>
1. 三角法 .....	1
2. 量之測定 .....	1
3. 角及其測度 .....	2
4. 六十分法 (英國法或實用的測角法) .....	3
*5. 百分法 (法國法) .....	5
*6. 六十分法與百分法之關係 .....	7
7. 弧度法 (理論的測角法) .....	10
8. 弧度法與六十分法之關係 .....	11
問題 I .....	13
<b>第二章 銳角之三角函數</b> .....	<b>17</b>
9. 三角比之定義 .....	17
10. 函數 .....	18
11. 一定角之三角函數為一定 .....	20
12. 三角函數之幾何學的表示 .....	21
13. 三角函數所取之值之限界 .....	22

14.	角之變化與其函數值變化之關係	21
	問題 II	26
15.	同角之三角函數之關係	27
16.	以三角函數之一表其他三角函數	30
	問題 III	34
<b>第三章</b>	<b>恆等式之證明</b>	<b>38</b>
17.	由兩邊中之複雜者誘導為簡章之方法	38
	問題 IV	39
	兩邊變為同一式之方法	40
	問題 V	42
	由兩邊之差為零而證明之方法	42
	問題 VI	43
	由已知之恆等式而誘導之方法	44
	認原題之恆等式為十分真確而考究其條件之方法	44
	問題 VII	47
18.	消去法	49
	問題 VIII	51
<b>第四章</b>	<b>特別角之三角函數及三角函數之變化</b>	<b>53</b>

19.	餘角之三角函數	53
20.	45° 之三角函數	54
21.	30° 及 60° 之三角函數	55
*22.	18°, 36°, 54°, 72° 之三角函數	56
*23.	$A < 45^\circ$ 時 $\sin 2A$ 之三角函數 $= 2\sin A \cos A$ , $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ , $\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$ 之幾何學的證明	58
*24.	15° 及 75° 之三角函數	60
	問題 IX	61
25.	無限大及無限小	63
26.	0° 及 90° 之三角函數	64
27.	三角函數之變化	66
	問題 X	67
26.	三角方程式	68
	問題 XI	70
第五章	一般角之三角函數	73
29.	直線之正負	73
30.	象限	74

31.	直線座標	75
	問題 XII	76
32.	角之正負	76
*33.	極座標	77
34.	一般角	77
	問題 XIII	79
35.	任意角之三角函數	80
36.	三角函數之符號	82
	問題 XIV	84
37.	任意角之三角函數之關係	86
	問題 XV	87
38.	二角 $\theta, -\theta$ 之三角函數之關係	89
	問題 XVI	91
39.	餘角之擴張定義	92
40.	互為餘角之二角 $\theta, 90^\circ - \theta$ , 其三角函數之 關係	92
41.	二角 $\theta, 90 + \theta$ 之三角函數之關係	94
42.	補角之擴張定義	95
43.	互為補角之二角 $\theta, 180^\circ - \theta$ , 其三角函數	

	之關係	95
44.	二角 $\theta$ , $108^\circ + \theta$ 之三角函數之關係	96
45.	二角 $\theta$ , $n \cdot 360^\circ \pm \theta$ 之三角函數之關係	98
*46.	二角 $\theta$ , $n \cdot 180^\circ \pm \theta$ 之三角函數之關係	99
47.	角之化法	100
	問題 XVII	102
<b>第六章</b>	<b>三角函數之變化</b>	<b>106</b>
49.	正弦函數之變化	106
50.	餘弦函數之變化	109
51.	正切函數之變化	111
52.	餘切函數之變化	114
53.	正割函數之變化	116
54.	餘割函數之變化	119
	問題 XVIII	123
<b>第七章</b>	<b>三角函數之曲線圖示</b>	<b>125</b>
55.	函數之曲線圖示	125
56.	正弦曲線	127
57.	餘弦曲線	128
56.	正切曲線	128

---

59.	餘切曲線	.....	129
60.	正割曲線	.....	130
61.	餘割曲線	.....	130
62.	應用二例	.....	131
	問題 XIX	.....	134

---

答及解法指針.....	135
-------------	-----



# 三角法—三角函數

## 第一章

### 測角法

1. 三角法. 三角法(trigonometry)一語,即由希臘語所謂‘測三角形’(trigonon 三角形 + metria 測定)之意義而來,故測三角形之邊,角及面積等,為其本來之目的,邇來其應用之範圍擴大,現今凡關於角之數學之部份,皆網羅在內,無純正數學與應用數學之別,而一般為至高等數學極要用之一分科也.

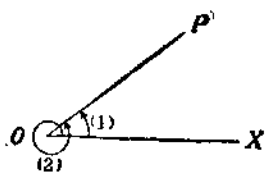
於平面上論三角形,稱為平面三角法,於球面上論三角形(球面三角形之定義及簡單性質,當於立體幾何學學之),謂之球面三角法.

本書專論平面三角法.

2. 量之測定.

某量  $A$ ，以與其同種類之他一定量  $B$  測之，而求  $A$  與  $B$  之比，如此者稱  $B$  為單位，其比謂之  $B$  為單位時  $A$  之數值或測度，例如某物長 5 尺，以 1 尺為單位，則測度為 5。若同長之 5 尺，以 50 寸表之，則單位為 1 寸，測度為 50 是。即單位變更，測度亦隨之而變動也。

**3. 角及其測度。** 在初等幾何學所謂角者，通例乃依二邊相互之位置而定，以表小於平角唯一之劣角也。然在三角法所謂角者，可視為固定其任何一邊（是謂首線），而他邊於其頂點（是謂極）之周圍，由首線之位置，依與時計針之迴轉方向相反對之方向（反時計針方向）迴轉，達於自己之位置而止（此迴轉之邊曰動徑），由此迴轉之量以測定其角。



如左圖， $OX, OP$  為由  $O$  引出之無限半直線， $O$  為極， $OX$  為首線， $OP$  為動徑，而  $OX$  通例依水平由  $O$  向右方取之。

今設  $\angle XOP$  為幾何學的角度，此不過單表如 (1) 之最小角，若如上述迴轉之結果，即三角法之角，則  $\angle XOP$  為 (2)，如下。

$$\begin{array}{l}
 1 \text{ 周角} + \angle XOP \\
 \text{又同樣可視為} \quad 2 \text{ 周角} + \angle XOP \\
 \dots\dots\dots \\
 n \text{ 周角} + \angle XOP
 \end{array}$$

由是同一幾何學的圖形，可以表無限多之三角法的角，是則三角法的角之大無限制，又依動徑之某位置所表之角，亦可解釋為經幾周角而達於其位置者也。

測三角法的角，如以直角為單位，則不便之處頗多，因此以小於直角之角為單位，甚覺便利。在三角法中，由其所採之單位，通常用下列三種之測角法。

I. 六十分法。

II. 百分法。

III. 弧度法。

#### 4. 六十分法 (英國法或實用的測角法)

1 直角之  $\frac{1}{90}$  曰 1 度，1 度之  $\frac{1}{60}$  曰 1 分，1 分之  $\frac{1}{60}$  曰 1

秒，秒以下通例以秒之小數或分數表之，而用此等單位，即可呼某角，例如 38 度 25 分 30 秒，可表以如下之記法。

$$38^{\circ} 25' 30''.$$

今用此記法表明度分秒之關係如下：

$$1 \text{ 直角} = 90^\circ$$

$$1^\circ = 60'$$

$$1' = 60''$$

如此各單位皆用六十分進法，是謂六十分法，亦稱英國法，主於實用上之測角用之。

例 1. 0.254 直角，試以六十分法表之。

解. 0.254 直角

$$\begin{array}{r} 90 \\ 22^\circ.86 \\ \hline 60 \\ 51'.6 \\ \hline 60 \\ 36'' \end{array} \quad \text{答 } 22^\circ 51' 36''.$$

例 2.  $18^\circ 29' 57''$ ，試以直角之小數表之。

解.  $\begin{array}{r} .6057'' \\ 60 \overline{) 29'.95} \\ 90 \overline{) 18' 49916} \\ \hline 0.205546296 \end{array}$  直角 答 0.205546296 直角

例 3.  $15^\circ 3' 12''$ ，試以直角之分數表之。

$$\begin{aligned} \text{解. } 15^\circ 3' 12'' &= 15^\circ 3' \frac{12}{60} \\ &= 15^\circ \frac{16'}{5} \end{aligned}$$

$$= 15^{\circ} \frac{16}{5 \times 60}$$

$$= \frac{1129}{75 \times 90} \text{ 直角}$$

$$= \frac{1129}{6750} \text{ 直角. 答.}$$

\*5. 百分法 (法國法).

1 直角之  $\frac{1}{100}$  曰 1 度 (grade), 1 度之  $\frac{1}{100}$  曰 1 分, 1 分  
之  $\frac{1}{100}$  曰 1 秒, 而用此等單位即可呼某角. 例如 42 度  
68 分 82 秒, 可表以下之記法.

$$42^{\circ} 68' 82''.$$

今以此記法表示各單位之相互關係.

$$1 \text{ 直角} = 100^{\circ}$$

$$1^{\circ} = 100'$$

$$1' = 100''$$

如此各單位皆用百進法, 是謂百分法, 又名法國法. 因  
此方法用百進法, 故以此單位與他種單位換算頗易.

例如

$$42^{\circ} 68' 82'' = 42^{\circ} 68'.82''$$

$$= 42^{\circ}.6882$$

$$= 0.426882 \text{ 直角.}$$

$$0.02, 05, 07 \text{ 直角} = 2^{\circ}.05, 07$$

$$= 2^{\circ} \ 5' \ 07''$$

$$= 2^{\circ} \ 5' \ 7''$$

注意 1. 百分法者，在第十九世紀之初，法蘭西革命之後，始於法國創造，且比六十分法有種種便利，似大有進步也明矣，唯六十分法之創設，其時代既較百分法為極古，因此而世上用之者甚廣，凡關於角之測法，殆無不以此表之，既如此，欲將書中之六十分法，悉依百分法換算，豈非一大難關乎？故百分法，今惟創造者之法國用之，其餘則依然襲蹈舊慣，遂至於今日。

注意 2. 分，秒之語，有用於六十分法，百分法及時間之三種。因欲防混雜之故，於六十分法，用記號 $^{\circ}$ ， $'$ ， $''$ ，於百分法，用 $g$ ， $'$ ， $''$ ，於時間用 $h$ ， $m$ ， $s$ 。例如 10 時 25 分 10 秒記為  $10^h \ 25^m \ 10^s$  時之記號，係 John Herschel 所創用。又度之一語，用於角及溫度，且其記號亦全然相同，此唯於前後之文意識別之，庶可免實際之混雜。

譯註。以後凡指百分法之度數，概稱百分度，若單言度

者，則皆指六十分法之度數。

\* 6. 六十分法與百分法之關係。

某角依六十分法為  $D$  度，依百分法為  $G$  度，則

$$D = \frac{D}{90} \text{ 直角,}$$

$$G^\circ = \frac{G}{100} \text{ 直角,}$$

由是

$$\frac{D}{90} = \frac{G}{100} \quad (1)$$

據此即可互相換算。

例 1.  $115^\circ$ ，試以百分度表之。

$$\text{解. } G = \frac{100}{90} D = \frac{10}{9} \times 115 = 127\frac{7}{9}. \quad \text{答 } 127^\circ\frac{7}{9}.$$

例 2.  $228^\circ$ ，試以度數表之。

$$\text{解. } D = \frac{90}{100} G = \frac{9}{10} \times 228 = 205.2. \quad \text{答 } 205.2.$$

次設在六十分法為  $m'$  之角，在百分法為  $\mu'$  即  $\frac{m}{60 \times 90}$

直角及  $\frac{\mu}{100 \times 100}$  直角，故

$$\frac{m}{60 \times 90} = \frac{\mu}{100 \times 100}$$

$$\text{或} \quad \frac{\mu}{27} = \frac{\mu}{50} \quad (2)$$

次設在六十分法爲  $s''$  之角，在百分法爲  $\sigma''$ ，則雙方各以直角表之，與上同樣，而得次之關係式。

$$\frac{s}{60 \times 60 \times 90} = \frac{\sigma}{100 \times 100 \times 100}$$

$$\text{或} \quad \frac{s}{81} = \frac{\sigma}{250} \quad (3)$$

由以上求得 (1), (2), (3) 之三結果，而得六十分法與百分法相互之換算。

例 1. 試將  $21^\circ 36' 17''.1$  換算爲百分法。

$$\text{解. 由 (1), } 21^\circ = 23^\circ. \dot{3} = 23^\circ 33' 33''. \dot{3}$$

$$\text{由 (2), } 36' = 66. \dot{6} = 66^\circ 66''. \dot{6}$$

$$\text{由 (3), } 17''.1 = 52''. \dot{7} = 52''. \dot{7}$$

$$\therefore 21^\circ 36' 17''.1 = 24^\circ 52''. \dot{7} \quad \text{答.}$$

例 2. 試將  $24^\circ 52'' \frac{7}{9}$  換算爲六十分法。

$$\text{解. 由 (1), } 24^\circ = 21^\circ.6 = 21^\circ 36'$$

$$52''. \dot{7} = 17''.1$$

$$\therefore 24^\circ 52''. \dot{7} = 21^\circ 36' 17''.1$$



別法. 六十分法換算爲百分法, 只須先將六十分法化爲直角之單名數, 然後將其結果換算爲百分法可矣. 百分法換算爲六十分法, 亦全與此同樣.

例 1.  $115^\circ$ , 試以百分度表之.

$$\text{解. } 115^\circ = \frac{115}{90} \text{ 直角} = 1.27\bar{7} \text{ 直角} = 127\frac{7}{9}^\circ. \quad \text{答.}$$

例 2.  $63^\circ 14' 51''$  試以百分法表之.

$$\begin{array}{r} \text{解. } 6051'' \\ 60 \overline{14} \overline{85} \\ 90 \overline{63} \overline{2475} \\ \hline 0.7027\overline{50} \text{ 直角} = 70^\circ 27' 50''. \quad \text{答.} \end{array}$$

例 3.  $228^\circ$  試以度數表之.

$$\begin{aligned} \text{解. } 228^\circ &= 2.28 \text{ 直角} \\ &= 90^\circ \times 2.28 \\ &= 205.2^\circ. \quad \text{答.} \end{aligned}$$

例 4.  $94^\circ 23' 87''$  試以六十分法表之.

$$\text{解. } 94^\circ 23' 87'' = 0.942387 \text{ 直角}$$

$$\begin{array}{r} 90 \\ \hline 84.81483 \\ 60 \\ \hline 48.8898 \\ 60 \\ \hline 53.7388 \end{array}$$