算學小叢書

三角法

三角函數

林鶴一著
駱師曾譯

商務印書館發行

中華民國二十二年四月初版
中華民國二十三年九月三版

(51238·3)

算學小叢書 三角法—三角函數 一冊

每冊定價大洋肆角
外埠酌加運費匯費

·60

原著者 林鶴一
譯述者 駱師曾
發行人 王雲五 上海河南路
印刷所 商務印書館 上海河南路
發行所 商務印書館 上海及各埠

三七一一上

目　次

三角法—三角函數

第　一　章

測　角　法

1. 三角法. 三角法(trigonometry)一語,即由希臘語所謂'測三角形'(trigonon 三角形 + metria 測定)之意義而來,故測三角形之邊,角及面積等,爲其本來之目的,邇來其應用之範圍擴大,現今凡關於角之數學之部份,皆網羅在內,無純正數學與應用數學之別,而一般爲至高等數學極要用之一分科也.

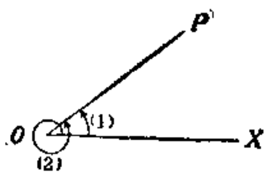
於平面上論三角形,稱爲**平面三角法**,於球面上論三角形(球面三角形之定義及簡單性質,當於立體幾何學學之),謂之**球面三角法**.

本書專論平面三角法.

2. 量之測定.

某量 A,以與其同種類之他一定量 B 測之,而求 A 與 B 之比,如此者稱 B 爲**單位**,其比謂之 B 爲單位時 A 之數值或**測度**,例如某物長 5 尺,以 1 尺爲單位,則測度爲 5. 若同長之 5 尺,以 50 寸表之,則單位爲 1 寸,測度爲 50 是.即單位變更,測度亦隨之而變動也.

3. 角及其測度. 在初等幾何學所謂角者,通例乃依二邊相互之位置而定,以表小於平角唯一之劣角也. 然在三角法所謂角者,可視爲固定其任何一邊(是謂**首線**),而他邊於其頂點(是謂**極**)之周圍,由首線之位置,依與時計針之迴轉方向相反對之方向(**反時針方向**)迴轉,達於自己之位置而止(此迴轉之邊曰**動徑**),由此迴轉之量以測定其角.



如左圖,OX, OP 爲由 O 引出之無限半直線,O 爲極,OX 爲首線,OP 爲動徑,而 OX 通例依水平由 O 向右方取之.

今設 $\angle XOP$ 爲**幾何學的角**,此不過單表如 (1) 之最小角,若如上述迴轉之結果,即**三角法的角**,則 $\angle XOP$ 爲(2),如下.

1 周角 $+\angle XOP$

又同樣可視為　2 周角 $+\angle XOP$

....

n 周角 $+\angle XOP$

由是同一幾何學的圖形,可以表無限多之三角法的角,是則三角法的角之大無限制,又依動徑之某位置所表之角,亦可解釋為經幾周角而達於其位置者也.

測三角法的角,如以直角為單位,則不便之處頗多,因此以小於直角之角為單位,甚覺便利.　在三角法中,由其所採之單位,通常用下列三種之測角法.

I.　六十分法.

II.　百分法.

III.　弧度法.

4.　六十分法(英國法或實用的測角法)

1 直角之 $\frac{1}{90}$ 曰 **1 度**, 1 度之 $\frac{1}{60}$ 曰 **1 分**, 1 分之 $\frac{1}{60}$ 曰 **1 秒**,秒以下通例以秒之小數或分數表之,而用此等單位,即可呼某角,例如 38 度 25 分 30 秒,可表以如下之記法.

$$38^\circ\ 25'\ 30''.$$

今用此記法表明度分秒之關係如下:

$$1\text{直角}=90^\circ$$

$$1^\circ=60'$$

$$1'=60''.$$

如此各單位皆用六十分進法,是謂**六十分法**,亦稱**英國法**,主於實用上之測角用之.

例 **1**. 0.254 直角,試以六十分法表之.

解. 0.254 直角

$$\begin{array}{r} 90 \\ \hline 22^\circ.86 \\ 60 \\ \hline 51'.6 \\ 60 \\ \hline 36'' \end{array}$$

答 $22^\circ 51' 36''$.

例 **2**. $18^\circ 29' 57''$,試以直角之小數表之.

解

$$\begin{array}{r} 60\,\underline{)\,57''} \\ 60\,\underline{)\,29'.95} \\ 90\,\underline{)\,18^\circ.4991\dot{6}} \\ 0.205546\dot{2}9\dot{6}\ \text{直角} \end{array}$$

答 $0.205546\dot{2}9\dot{6}$ 直角

例 **3**. $15^\circ 3' 12''$,試以直角之分數表之.

解. $15^\circ 3' 12''=15^\circ 3'\frac{12}{60}$

$$=15^\circ\frac{16'}{5}$$

$$=15^\circ\frac{16}{5\times 60}$$

$$=\frac{1129}{75\times 90}\text{直角}$$

$$=\frac{1129}{6750}\text{直角.}\qquad\text{答.}$$

***5. 百分法(法國法).**

1直角之$\frac{1}{100}$曰1**度**(grade), 1度之$\frac{1}{100}$曰1**分**, 1分之$\frac{1}{100}$曰1**秒**, 而用此等單位卽可呼某角. 例如42度68分82秒, 可表以下之記法.

$$42^g\ 68^\backprime\ 82^{\backprime\backprime}.$$

今以此記法表示各單位之相互關係.

$$1\text{直角}=100^g$$

$$1^g=100^\backprime$$

$$1^\backprime=100^{\backprime\backprime}$$

如此各單位皆用百進法,是謂**百分法**,又名**法國法**. 因此方法用百進法,故以此單位與他種單位換算頗易.

例如

$$42^g\quad 68^\backprime\quad 82^{\backprime\backprime}=42^g\,68^\backprime.82^{\backprime\backprime}$$

$$= 42^g.6882$$

$$= 0.426882 \quad \text{直角.}$$

$$0.02,05,07 \text{ 直角} = 2^g.05,07$$

$$= 2^g \quad 5^{`} \quad 07$$

$$= 2^g \quad 5^{`} \quad 7^{``}$$

注意 1. 百分法者,在第十九世紀之初,法蘭西革命之後,始於法國創造,且比六十分法有種種便利,似大有進步也明矣,唯六十分法之創設,其時代既較百分法爲極古,因此而世上用之者甚廣,凡關於角之測法,殆無不以此表之,既如此,欲將書中之六十分法,悉依百分法換算,豈非一大難關乎?故百分法,今惟創造者之法國用之,其餘則依然襲蹈舊慣,遂至於今日.

注意 2. 分,秒之語,有用於六十分法,百分法及時間之三種. 因欲防混雜之故,於六十分法,用記號 °, ′, ″, 於百分法, 用 g, `, ``, 於時間用 h, m, s. 例如 10時 25分 10秒 記爲 $10^h\ 25^m\ 10^s$ 時之記號, 係 John Herschel 所創用. 又度之一語,用於角及溫度,且其記號亦全然相同, 此唯於前後之文意識別之,庶可免實際之混雜.

譯註. 以後凡指百分法之度數,概稱百分度,若單言度

者,則皆指六十分法之度數.

***6. 六十分法與百分法之關係.**

某角依六十分法爲 D 度,依百分法爲 G 度,則

$$D^{\circ}=\frac{D}{90}\text{ 直角},$$

$$G^{g}=\frac{G}{100}\text{ 直角},$$

由是

$$\frac{D}{90}=\frac{G}{100}. \tag{1}$$

據此卽可互相換算.

例 1. 115°,試以百分度表之.

解. $G=\frac{100}{90}D=\frac{10}{9}\times 115=127\frac{7}{9}$.　　答 $127^{g}\frac{7}{9}$.

例 2. 228^{g},試以度數表之.

解. $D=\frac{90}{100}G=\frac{9}{10}\times 228=205.2$.　　答 $205.^{\circ}2$.

次設在六十分法爲 m' 之角,在百分法爲 μ' 卽 $\frac{m}{60\times 90}$ 直角及 $\frac{\mu}{100\times 100}$ 直角,故

$$\frac{m}{60\times 90}=\frac{\mu}{100\times 100},$$

或 $$\frac{m}{27}=\frac{\mu}{50}.\qquad(2)$$

次設在六十分法為 s'' 之角，在百分法為 σ''，則雙方各以直角表之，與上同樣，而得次之關係式.

$$\frac{s}{60\times60\times90}=\frac{\sigma}{100\times100\times100},$$

或 $$\frac{s}{81}=\frac{\sigma}{250}.\qquad(3)$$

由以上求得 (1), (2), (3) 之三結果，而得六十分法與百分法相互之換算.

例 **1**. 試將 $21^\circ\,36'\,17''.1$ 換算為百分法.

解. 由 (1), $21^\circ\quad=23^g.\dot{3}=23^g33'33''.\dot{3}$

由 (2), $36'\quad=66'.\dot{6}=\qquad66'66''.\dot{6}$

由 (3), $17''.1=52''.\dot{7}=\qquad52''.\dot{7}$

$\therefore\ 21^\circ\,36'\,17''.1\qquad=24^g\quad52''.\dot{7}$ 答.

例 **2**. 試將 $24^g\,52''\,\frac{7}{9}$ 換算為六十分法.

解. 由 (1), $24^g=21^\circ.6=21^\circ\,36'$

$52''.\dot{7}\quad=\quad17''.1$

$\therefore\quad24^g\,52''.\dot{7}=21^\circ36'17''.1$

別法．六十分法換算爲百分法，只須先將六十分法化爲直角之單名數，然後將其結果換算爲百分法可矣．百分法換算爲六十分法，亦全與此同樣．

例 **1**．115°，試以百分度表之．

解．$115^\circ=\frac{115}{90}$ 直角 $=1.27\frac{7}{9}$ 直角 $=127\frac{7}{9}^g$．　**答**.

例 **2**．63° 14′ 51″ 試以百分法表之．

解．
$$\begin{array}{r|l} 60 & 51'' \\ 60 & 14'.85 \\ 90 & 63^\circ.2475 \\ \hline & 0.70,27,50 \end{array}$$
直角 $=70^g\,27^{\backprime}\,50^{\backprime\backprime}$．　**答**.

例 **3**．228^g 試以度數表之．

解．$228^g=2.28$ 直角

$=90^\circ\times 2.28$

$=205.2^\circ$．　**答**.

例 **4**．$94^g\,23^{\backprime}\,87^{\backprime\backprime}$ 試以六十分法表之．

解．$94^g\,23^{\backprime}\,87^{\backprime\backprime}=0.942387$ 直角

$$\begin{array}{r} 90 \\ \hline 84^\circ.81483 \\ 60 \\ \hline 48'.8898 \\ 60 \\ \hline 53''.388 \end{array}$$