高等院校电子信息类教材

电磁场理论

DIANCICHANG LILUN

马海武 王丽黎 赵仙红 编著

1.4
68

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

电磁场理论

马海武　王丽黎　赵仙红　编著

北京邮电大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书全面阐述了电磁场与电磁波的基本规律、基本概念和分析方法，是通过长期教学实践为通信及信息类专业编写的专业基础课教材。主要内容包括：矢量分析与场论、静电场、恒定电流的电场和磁场、静态场的解、时变电磁场、平面电磁波、导行电磁波、电磁波的辐射等。各章后均附有习题。

本书可作为高等院校通信与电子信息类及相关专业本科或研究生的教材，也可作为广大工程技术人员学习电磁场基础理论及应用的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场理论/马海武，王丽黎，赵仙红编著. —北京：北京邮电大学出版社，2004
ISBN 7-5635-0912-7

Ⅰ. 电… Ⅱ. ①马…②王…③赵… Ⅲ. 电磁场—理论—高等学校—教材 Ⅳ O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 062894 号

出 版 者： 北京邮电大学出版社(北京市海淀区西土城路 10 号)
邮编：100876　电话：62282185　传真：62283578
电子信箱： publish@bupt.edu.cn
经　　销： 各地新华书店
印　　刷： 北京源海印刷有限责任公司
印　　数： 1—3 000 册
开　　本： 787 mm×1092 mm　1/16　印张：15.25　字数：390 千字
版　　次： 2004 年 9 月第 1 版　2004 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 7-5635-0912-7/TN・332　定　价：24.00 元

如有印装质量问题请与北京邮电大学出版社发行部联系

高等院校电子信息类教材编审委员会

顾　问：周炯槃

委　员：（以姓氏笔画为序）

卫建华　马海武　孙伟玲　达新宇　刘联会

刘　毓　刘高辉　娄　莉　郭元术　夏清国

秘书长：马海武

前　言

根据当前我国高等学校发展的状况，为适应在新形势下对通信及信息类人才的培养需求，特别是充分考虑21世纪信息科学发展的趋势，根据各高校教学的需要，编写本科信息类系列教材是十分必要的。本书根据2003年4月召开的高等学校信息类系列教材编审工作会议审定的编写大纲进行编写。

现代电子技术和通信技术发展迅速，门类诸多，但都离不开电磁波的发射、传播、接收和控制；并且其他各个领域也都或多或少地应用了电磁场理论所研究的内容。因此，电磁场理论是电气类各专业技术人员必须掌握的基础理论之一，也是高等学校电子类专业必修的专业基础课。本教材的宗旨就是使读者获得足够的电磁场基础理论知识。

本书共8章(通信工程及电子信息专业本科教学参考学时数为72学时)，重点讲述了电磁场与电磁波的基本规律、基本概念和分析方法。第1章是矢量分析与场论，它是学习本课程的数学基础知识；第2、3、4章为静态场，主要介绍静电场、恒定电流的电场和磁场的基本概念，以及分析与计算方法；第5章是时变电磁场，是本书的核心，全面论述了电磁场理论中的基本方程及其边界条件；第6章研究均匀平面电磁波在无界媒质中的传播特性及其在平面分界面的反射、折射等特性；第7章讨论导行电磁波的特性，以及波导、同轴线等；第8章是电磁波的辐射和天线。各章后都附有大量的习题。通过对本教材中各部分内容的学习，使读者对电磁场基本理论有一个整体的概念。基于在编写方式上的见解和特点，相信本书对电子信息类学生和专业人员学习电磁场理论课程有一定帮助。同时，本书也渗透着编著者多年的教学心得，希望能为该类专业的教学和发展起到一定的作用。

本书作为本科生、研究生的教材，在内容的选取上可以根据不同的教学要求灵活选用。另外，可根据自身的教学条件，结合实验和仿真技术，通过多媒体教学使学生对这些理论有更加深刻的理解和认识。

本书由马海武任主编，王丽黎、赵仙红任副主编。马海武编写第1、5、6章并对全书统编定稿，王丽黎编写第2、3、4章，赵仙红编写第7、8章。

在本书的编写过程中，得到了许多人士的大力协助和支持，在此表示诚挚的谢意。尤其感谢北京邮电大学出版社所给予的各方面的帮助。同时，还要对本书所列参考文献的作者表示感谢。

限于作者的水平，书中不妥和错误之处在所难免，敬请广大读者及同行批评指正。

作　者

2004年5月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第1章　矢量分析与场论

1.1　矢量分析

矢量分析是矢量代数的继续，主要内容是介绍矢性函数及其微分、积分等，是学习场论的基础．

1.1.1　矢性函数

1. 矢性函数的概念

矢量代数中讨论了模和方向都保持不变的矢量，这种矢量称为常矢．其中零矢量的方向为任意，是一个特殊的常矢量；另外还有模和方向或其中之一会改变的矢量，这种矢量称为变矢．在矢量分析中还引进了矢性函数的概念，它的定义是：设有数性变量 t 和变矢 $\boldsymbol{A}$，如果对于 t 在某个范围 G 内的每一个数值，$\boldsymbol{A}$ 都以一个确定的矢量与之对应，则称 $\boldsymbol{A}$ 为数性变量 t 的矢性函数，记作

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t) \tag{1.1}$$

并称 G 为函数 $\boldsymbol{A}$ 的定义域．

矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在 $Oxyz$ 直角坐标系中的三个坐标，也就是它在三个坐标轴上的投影，显然都是 t 的函数：$A_x(t)$、$A_y(t)$、$A_z(t)$，所以，矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的坐标表示式为

$$\boldsymbol{A}=A_x(t)\boldsymbol{e}_x+A_y(t)\boldsymbol{e}_y+A_z(t)\boldsymbol{e}_z \tag{1.2}$$

式中，$\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$ 为沿 x、y、z 三个坐标轴正向的单位矢量．可见，一个矢性函数和三个有序的数性函数（坐标）构成一一对应的关系．

2. 矢端曲线

如果不论两个矢量的空间位置如何，只要当两个矢量的模和方向都相同，就说这两个矢量是相等的，这样的矢量称为自由矢量（本书所讲的矢量均指自由矢量）．所以，为了能用图形来直观地表示矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的变化状态，可以将 $\boldsymbol{A}(t)$ 的起点取在坐标原点．当 t 变化时，矢量 $\boldsymbol{A}(t)$ 的终点 M 就描绘出一条曲线 l，称曲线 l 为矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的矢端曲线或矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的图形，如图 1.1 所示；同时称式(1.1)或式(1.2)为曲线 l 的矢量方程．

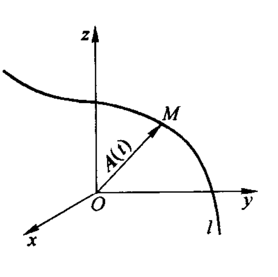

图 1.1　矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的矢端曲线

称起点在坐标原点 O、终点为 $M(x,y,z)$ 的矢量 $\overrightarrow{OM}$ 为点 M（对于点 O）的矢径，一般用 $\boldsymbol{r}$ 表示．

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$$

若把矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的起点取在坐标原点，$\boldsymbol{A}(t)$ 实际上就成为终点 $M(x,y,z)$ 的矢径．$\boldsymbol{A}(t)$ 的三个坐标 $A_x(t)$、$A_y(t)$、$A_z(t)$ 就对应地等于终点 M 的三个坐标 x、y、z. 即

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$x=A_x(t), y=A_y(t), z=A_z(t) \tag{1.3}$$

这是曲线 l 的以 t 为参数的参数方程．

显然，曲线 l 的矢量方程(1.2)和参数方程(1.3)二者之间，存在着一一对应的关系，有了其中的一个，就可以推导出另一个．

3．矢性函数的极限和连续性

矢性函数的极限和连续性，是矢性函数的微分与积分的基础概念．

设矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在点 t_0 的某个邻域内有定义，有一个常矢 $\boldsymbol{A}_0$．若对于任意给定的正数 ε，都存在一个正数 δ，使得当 t 满足 $0<|t-t_0|<\delta$ 时，有 $|\boldsymbol{A}(t)-\boldsymbol{A}_0|<\varepsilon$ 成立，则称 $\boldsymbol{A}_0$ 为矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 当 $t\to t_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{A}_0 \tag{1.4}$$

可见其与数性函数的极限定义类似，矢性函数也应有类似于数性函数中的一些极限运算法则，常用的有：

$$\lim_{t\to t_0}u(t)\boldsymbol{A}(t)=\lim_{t\to t_0}u(t)\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t) \tag{1.5}$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{A}(t)\pm\boldsymbol{B}(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)\pm\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{B}(t) \tag{1.6}$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)\cdot\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{B}(t) \tag{1.7}$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{A}(t)\times\boldsymbol{B}(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)\times\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{B}(t) \tag{1.8}$$

式中，$u(t)$ 为数性函数，$\boldsymbol{A}(t)$、$\boldsymbol{B}(t)$ 为矢性函数；且当 $t\to t_0$ 时 $u(t)$、$\boldsymbol{A}(t)$、$\boldsymbol{B}(t)$ 均有极限存在．

由式(1.2)有

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)=\lim_{t\to t_0}A_x(t)\boldsymbol{e}_x+\lim_{t\to t_0}A_y(t)\boldsymbol{e}_y+\lim_{t\to t_0}A_z(t)\boldsymbol{e}_z \tag{1.9}$$

这样可以把求矢性函数的极限，转化为求三个数性函数的极限．

若矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在点 t_0 的某个邻域内有定义，且有

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{A}(t_0) \tag{1.10}$$

则称 $\boldsymbol{A}(t)$ 在 $t=t_0$ 处连续．

矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在点 t_0 处连续的充要条件是它的三个坐标函数 $A_x(t)$、$A_y(t)$、$A_z(t)$ 都在 t_0 处连续．

若矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在某个区间内的每一点处都连续，则称它在该区间内连续．

1.1.2 矢性函数的导数与微分

1．矢性函数的导数

设有起点在点 O 的矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$，当数性变量 t 在其定义域内从 t 变到 $t+\Delta t(\Delta t\neq 0)$ 时，对应的矢量分别为

$$\boldsymbol{A}(t)=\overrightarrow{OM},\quad \boldsymbol{A}(t+\Delta t)=\overrightarrow{ON}$$

则

$$\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)=\overrightarrow{MN}$$

叫做矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的增量，记作 $\Delta\boldsymbol{A}$，即

$$\Delta\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t) \tag{1.11}$$

如图 1.2 所示．下面给出矢性函数导数的定义．

设矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$在点 t 的某一邻域内有定义，并设 $t+\Delta t$ 也在这个邻域内．若 $\boldsymbol{A}(t)$对应于 Δt 的增量 $\Delta\boldsymbol{A}$ 与 Δt 之比

$$\frac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)}{\Delta t}$$

在 $\Delta t\to0$ 时极限存在，则称此极限为矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$在点 t 处的导数(简称导矢)，记作$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$或 $\boldsymbol{A}'(t)$，即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)}{\Delta t}\tag{1.12}$$

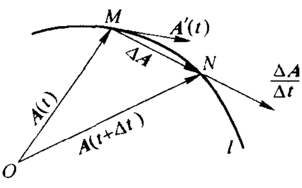

图 1.2　矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的增量

若用坐标表示 $\boldsymbol{A}(t)$为

$$\boldsymbol{A}(t)=A_x(t)\boldsymbol{e}_x+A_y(t)\boldsymbol{e}_y+A_z(t)\boldsymbol{e}_z$$

且函数 $A_x(t)$、$A_y(t)$、$A_z(t)$在点 t 可导，则有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta A_x}{\Delta t}\boldsymbol{e}_x+\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta A_y}{\Delta t}\boldsymbol{e}_y+\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta A_z}{\Delta t}\boldsymbol{e}_z=\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_x+\frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_y+\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_z$$

或

$$\boldsymbol{A}'(t)=A_x'(t)\boldsymbol{e}_x+A_y'(t)\boldsymbol{e}_y+A_z'(t)\boldsymbol{e}_z\tag{1.13}$$

此式把求矢性函数的导数归结为求三个数性函数的导数．

2. 导矢的几何意义

如图 1.2 所示，l 为 $\boldsymbol{A}(t)$的矢端曲线，$\dfrac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t}$是在 l 的割线 MN 上的一个矢量．当 $\Delta t>0$ 时，其方向与 $\Delta\boldsymbol{A}$ 一致，系指向对应 t 值增大的一方；当 $\Delta t<0$ 时，其方向与 $\Delta\boldsymbol{A}$ 相反，如图 1.3 所示，但此时 $\Delta\boldsymbol{A}$ 指向对应 t 值减小的一方，从而$\dfrac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t}$仍指向对应 t 值增大的一方．

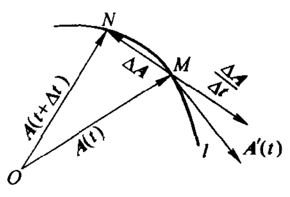

图 1.3　导矢的几何意义

在 $\Delta t\to0$ 时，由于割线 MN 绕点 M 转动，且以点 M 处的切线为其极限位置．此时，在割线上的矢量$\dfrac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t}$的极限位置也就在此切线上，即导矢

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t}$$

不为零时，在点 M 处的切线上，方向恒指向对应 t 值增大的一方．所以导矢在几何上为一矢端曲线的切向矢量，指向对应 t 值增大的一方．

3. 矢性函数的微分

设有矢性函数 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t)$，称

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}'(t)\mathrm{d}t\tag{1.14}$$

为矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$在 t 处的微分．

由于微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 是导矢 $\boldsymbol{A}'(t)$与增量 Δt 的乘积，所以它是一个矢量，而且和导矢 $\boldsymbol{A}'(t)$一样，也在点 M 处与 $\boldsymbol{A}(t)$的矢端曲线 l 相切．但当 $\mathrm{d}t>0$ 时，与 $\boldsymbol{A}'(t)$的方向一致；当 $\mathrm{d}t<0$ 时，则与 $\boldsymbol{A}'(t)$的方向相反，如图 1.4 所示．

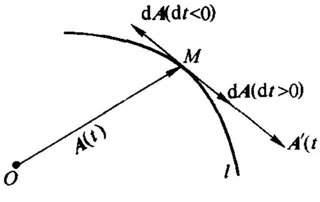

图 1.4　矢性函数微分的几何意义

微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 的坐标表示式，可由式(1.13)求得，即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}'(t)\mathrm{d}t=A_x'(t)\mathrm{d}t\,\boldsymbol{e}_x+A_y'(t)\mathrm{d}t\,\boldsymbol{e}_y+A_z'(t)\mathrm{d}t\,\boldsymbol{e}_z$$

或

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\mathrm{d}A_x\boldsymbol{e}_x+\mathrm{d}A_y\boldsymbol{e}_y+\mathrm{d}A_z\boldsymbol{e}_z \tag{1.15}$$

如果把矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)=A_x(t)\boldsymbol{e}_x+A_y(t)\boldsymbol{e}_y+A_z(t)\boldsymbol{e}_z$ 看作其终点 $M(x,y,z)$ 的矢径函数

$$\boldsymbol{r}=x\,\boldsymbol{e}_x+y\,\boldsymbol{e}_y+z\,\boldsymbol{e}_z$$

这里，$x=A_x(t)$，$y=A_y(t)$，$z=A_z(t)$，则式(1.15)又可写为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x\,\boldsymbol{e}_x+\mathrm{d}y\,\boldsymbol{e}_y+\mathrm{d}z\,\boldsymbol{e}_z \tag{1.16}$$

其模

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2} \tag{1.17}$$

另一方面，如果在有向曲线(即规定了正方向的曲线)l 上，取定一点 M_0 作为计算弧长 s 的起点，并以 l 的正向作为 s 增大的方向，则在 l 上任一点 M 处，弧长的微分是

$$\mathrm{d}s=\pm\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}$$

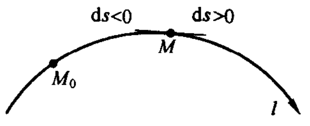

图 1.5　弧长的微分的几何意义

右端"正负"符号的选取：以点 M 为界，当 $\mathrm{d}s$ 位于 s 增大一方时取正号；反之取负号，如图 1.5 所示.

由此可见，有

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=|\mathrm{d}s| \tag{1.18}$$

就是说，矢性函数的微分的模，等于(其矢端曲线的)弧微分的绝对值. 从而由

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right|\cdot|\mathrm{d}s|$$

有

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right|=\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{|\mathrm{d}s|}=1 \tag{1.19}$$

结合导矢的几何意义可知，矢性函数对(其矢端曲线的)弧长 s 的导数 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$ 在几何上是一个切向单位矢量，方向恒指向 s 增大的一方.

4. 矢性函数的导数公式

设矢性函数 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t)$、$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(t)$ 及数性函数 $u=u(t)$ 在 t 的某个范围内可导，则下列公式在该范围内成立：

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{C}$ 为常矢)；

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\pm\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}$；

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k\boldsymbol{A})=k\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$ (k 为常数)；

(4) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u\boldsymbol{A})=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}+u\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$；

(5) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{B}$；

特例：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$ (其中 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}$)；

(6) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{B}$；

(7) 复合函数求导公式：若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(u)$，$u=u(t)$，则

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{A}}{du}\frac{du}{dt}$$

1.1.3　矢性函数的积分

矢性函数的积分和数性函数的积分类似，也有不定积分和定积分两种．

1. 矢性函数的不定积分

定义 1.1　若在 t 的某个区间 I 上，有 $\boldsymbol{B}'(t)=\boldsymbol{A}(t)$，则称 $\boldsymbol{B}(t)$ 为 $\boldsymbol{A}(t)$ 在此区间上的一个原函数．在区间 I 上，$\boldsymbol{A}(t)$ 的原函数的全体，叫做 $\boldsymbol{A}(t)$ 在 I 上的不定积分，记作

$$\int \boldsymbol{A}(t)dt \tag{1.20}$$

这个定义和数性函数的不定积分定义完全类似，所以与数性函数一样，若已知 $\boldsymbol{B}(t)$ 是 $\boldsymbol{A}(t)$ 的一个原函数，则有

$$\int \boldsymbol{A}(t)dt=\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{C}\quad(\boldsymbol{C}\text{ 为任意常矢}) \tag{1.21}$$

而且，数性函数不定积分的基本性质对矢性函数依然成立．例如

$$\int k\boldsymbol{A}(t)dt=k\int \boldsymbol{A}(t)dt \tag{1.22}$$

$$\int[\boldsymbol{A}(t)\pm\boldsymbol{B}(t)]dt=\int \boldsymbol{A}(t)dt\pm\int \boldsymbol{B}(t)dt \tag{1.23}$$

$$\int u(t)\boldsymbol{a}dt=\boldsymbol{a}\int u(t)dt \tag{1.24}$$

$$\int \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{A}(t)dt=\boldsymbol{a}\cdot\int \boldsymbol{A}(t)dt \tag{1.25}$$

$$\int \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{A}(t)dt=\boldsymbol{a}\times\int \boldsymbol{A}(t)dt \tag{1.26}$$

式中，k 为常数；$\boldsymbol{a}$ 为常矢．

据此，若已知 $\boldsymbol{A}(t)=A_x(t)\boldsymbol{e}_x+A_y(t)\boldsymbol{e}_y+A_z(t)\boldsymbol{e}_z$，则由式(1.23)与式(1.24)有

$$\int \boldsymbol{A}(t)dt=\boldsymbol{e}_x\int A_x(t)dt+\boldsymbol{e}_y\int A_y(t)dt+\boldsymbol{e}_z\int A_z(t)dt \tag{1.27}$$

此式把求一个矢性函数的不定积分，归结为求三个数性函数的不定积分．

此外，数性函数的换元积分法与分部积分法亦适用于矢性函数．

2. 矢性函数的定积分

定义 1.2　设矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在区间 $[T_1,T_2]$ 上连续，则 $\boldsymbol{A}(t)$ 在 $[T_1,T_2]$ 上的定积分为

$$\int_{T_1}^{T_2}\boldsymbol{A}(t)dt=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}(\xi_i)\Delta t_i \tag{1.28}$$

式中，$T_1=t_0<t_1<\cdots<t_n=T_2$；$\xi_i$ 为区间 $[t_{i-1},t_i]$ 上的一点；$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$；$\lambda=\max\Delta t_i\ (i=1,2,\cdots,n)$．

可以看出，矢性函数的定积分概念也和数性函数的完全类似，因此，也具有和数性函数定积分相应的基本性质．

此外，类似于式(1.27)，求矢性函数的定积分也可归结为求三个数性函数的定积分，即有

$$\int_{T_1}^{T_2}\boldsymbol{A}(t)dt=\boldsymbol{e}_x\int_{T_1}^{T_2}A_x(t)dt+\boldsymbol{e}_y\int_{T_1}^{T_2}A_y(t)dt+\boldsymbol{e}_z\int_{T_1}^{T_2}A_z(t)dt \tag{1.29}$$

1.2 场

引入场的概念，是为了揭示和探索某种物理量（如温度、密度、电位、力、速度等等）在空间的分布和变化规律．

1.2.1 场的概念

如果在全部空间或部分空间里的每一点，都对应着某个物理量的一个确定的值，就说在这空间里确定了该物理量的一个场．如果该物理量是数量，就称这个场为数量场，比如温度场、密度场、电位场等；若该物理量是矢量，就称这个场为矢量场，比如力场、速度场等．若场中的物理量在各点处的对应值不随时间变化，则称该场为稳定场；否则，称为不稳定场．这里只讨论稳定场．

1.2.2 数量场的等值面

由数量场的定义可知，分布在数量场中各点处的数量 u 是场中一点 M 的函数 $u=u(M)$，当取定了 $Oxyz$ 直角坐标系以后，它就成为点 $M(x,y,z)$ 的坐标的函数，即

$$u=u(x,y,z) \tag{1.30}$$

可见，一个数量场可以用一个数性函数来表示．后面若无特别申明，则总假定这函数单值、连续且有一阶连续偏导数．

在数量场中，为了直观地研究数量 u 在场中的分布状况，给出等值面的概念．等值面是指由场中使函数 u 取相同数值的点所组成的曲面．例如温度场的等值面，是由温度相同的点组成的等温面；电位场中的等值面，是由电位相同的点组成的等位面．

显然，数量场 u 的等值面方程为

$$u(x,y,z)=c \quad (c\text{ 为常数})$$

由隐函数存在定理可知，在函数 u 为单值，且各连续偏导数 u'_x、u'_y、u'_z 不全为零时，这种等值面一定存在．

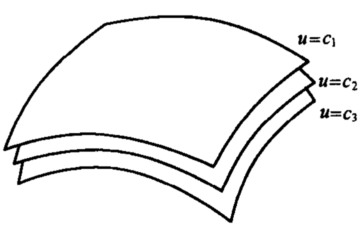

图 1.6 等值面

在上式中给常数 c 以不同的数值，就得到不同的等值面，如图 1.6 所示．这族等值面充满了数量场所在的空间，而且互不相交．这是因为在数量场中的每一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 都有一个等值面

$$u(x,y,z)=u(x_0,y_0,z_0) \tag{1.31}$$

通过；而且由于函数 u 为单值，一个点就只能在一个等值面上．

数量场的等值面，可以直观地帮助了解场中物理量的分布状况．

1.2.3 矢量场的矢量线

和数量场一样，矢量场中分布在各点处的矢量 $\mathbf{A}$ 是场中之点 M 的函数 $\mathbf{A}=\mathbf{A}(M)$，当取定了 $Oxyz$ 直角坐标系以后，它就成为点 $M(x,y,z)$ 坐标的函数，即

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}(x,y,z) \tag{1.32}$$

它的坐标表示式为

$$\boldsymbol{A}=A_x(x,y,z)\boldsymbol{e}_x+A_y(x,y,z)\boldsymbol{e}_y+A_z(x,y,z)\boldsymbol{e}_z \tag{1.33}$$

式中，函数 A_x、A_y、A_z 为矢量 $\boldsymbol{A}$ 的三个坐标，以后若无特别申明，都假定它们为单值、连续且有一阶连续偏导数．

在矢量场中，为了直观地表示矢量的分布状况，引入了矢量线的概念．矢量线是如图 1.7 所示的曲线，在它上面每一点处，曲线都和对应于该点的矢量 $\boldsymbol{A}$ 相切，比如静电场中的电力线、磁场中的磁力线、流速场中的流线等都是矢量线．

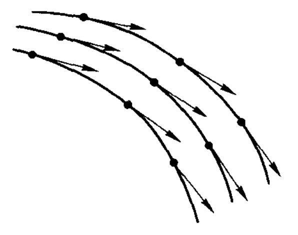

图 1.7　矢量线

若已知的矢量场 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(x,y,z)$，可以求出矢量线的方程．

设 $M(x,y,z)$ 为矢量线上任一点，其矢径为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$$

则微分

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x\,\boldsymbol{e}_x+\mathrm{d}y\,\boldsymbol{e}_y+\mathrm{d}z\,\boldsymbol{e}_z$$

按其几何意义为在点 M 处与矢量线相切的矢量．根据矢量线的定义，它必定在点 M 处与场矢量

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z$$

共线．因此有

$$\frac{\mathrm{d}x}{A_x}=\frac{\mathrm{d}y}{A_y}=\frac{\mathrm{d}z}{A_z} \tag{1.34}$$

这就是矢量线所应满足的微分方程．解之，可得矢量线族．在 $\boldsymbol{A}$ 不为零的假定下，由微分方程的存在定理知道，当函数 A_x、A_y、A_z 为单值、连续且有一阶连续偏导数时，这族矢量线不仅存在，并且也充满了矢量场所在的空间，而且互不相交．

因此，对于场中的任意一条曲线 C(非矢量线)，在其上的每一点处，也都有且仅有一条矢量线通过，这些矢量线的全体，就构成一张通过曲线 C 的曲面，称为矢量面，如图 1.8 所示．显然在矢量面上的任一点 M 处，场的对应矢量 $\boldsymbol{A}(M)$都位于此矢量面在该点的切平面内．

特别，当 C 为一封闭曲线时，通过 C 的矢量面就构成一管形曲面，称为矢量管，如图 1.9 所示．

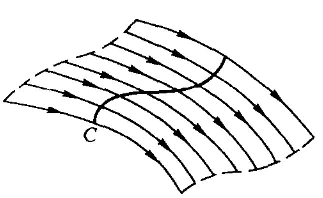

图 1.8　矢量面

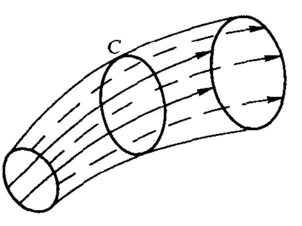

图 1.9　矢量管

1.3　数量场的方向导数和梯度

1.3.1　方向导数

在数量场中，数量 $u=u(M)$的分布状况，可以借助于等值面来进行了解．但这只能大致

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com